

Math. D
409²

Paucker

Die Bildlehre.

Bayrische
Staatsbibliothek
München

Vom

Professor Dr. M. G. von Paucker.

Mit 100 Seiten Fügungen.

M i t a u,

Verlag von Friedrich Lucas.

1846.

61. 2.



Von
Professor Dr. M. G. von Pancker.

Mit
Verlag von Friedrich Lucas.

1846

Z u v o r.

Der Zweck dieses Buches ist eine gänzliche Umgestaltung der niedern Bildlehre, sowohl in ihrer Begründung als in ihrer Anschauungsweise.

Von Euklid bis auf unsere Zeit wurden die Beweise der bildmässigen Wahrheiten durch Maassgleichungen geführt. Hierzu rechne ich sowohl den pythagorischen Lehrsatz und seine Folgerungen, als auch die Lehre von der Aehnlichkeit und den Verhältnissen. Die Maassgleichungen beruhen auf dem Begriff der Zahl. Ihre Einführung in die Bildlehre giebt dieser eine fremdartige Kennzeichnung, und thut ihrer selbständigen Auffassung Eintrag.

Unter den neuern Raumforschern hatte Steiner zuerst das grosse Verdienst, die Abhängigkeit der Fügungen durch die Bildgleichung aufzudecken (Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten 1832). Er begründete diesen Satz durch Bindung von Verhältnissen.

In der Bildlehre ist aber die zahlhafte Be-

handlung nach dem Ausdrücke meines verewigten Lehrers J. W. Pfaff nur „eine Krücke“, welche nach gemachtem Gebrauche weggeworfen wird.

Ich habe daher versucht, die niedere Bildlehre von allem, was an Maassgleichungen und Verhältnisse erinnert, zu befreien. Der Gang, den ich hierbei befolgte, ist in der Kürze folgender:

Der erste Abschnitt „Stab und Ecke“ beweiset den Zeilensatz nicht wie bisher durch Neigungen, sondern durch Gleichheit der Dreiecke. Hieran schliesst sich der Satz (19) vom stralenhaften Zeilensechseck. Hierauf werden (24) die bildhaften Stabdreiecke gegründet. Diese führen (42) auf die bildhaften Vierstralungen, und mittelst derselben (53) auf die bildhaften Stabvierecke. Ein wichtiger Sonderfall der Bildgleichung ist (66) die Gleichmessung, welche sich durch die ganze Bildlehre hindurchzieht. Durch den Satz (73) von der Verbindung zweier Stabdreiecke oder Dreistralungen wird in (74) die Bildgleichung vervollständigt. Als ein Sonderfall der Bildgleichung erscheint in (75) das stralenhafte Sechseck und die stabhafte Sechsseitung. Dieser Satz führt in (84) zur Mitte dieser ganzen Betrachtung in der Vergleichung zweier Fügungen, deren eine als Urbild, die andere als Abbild angesehen wird. Die folgenden Sätze bis (103) sind Anwendungen.

Der zweite Abschnitt „Doppelbildung“ entwickelt die Eigenschaften der Bildgleichung in dem Falle, wo die Bilder in einem Stabe oder in einer Ecke liegen. Aus dem Viereck wird (106) die Flächung abgeleitet. Hierauf folgt (117) der all-

gemeine Satz vom Doppelschnitt, und dessen besondere Fälle: der Wechselschnitt, die Doppelflächung, das Wechselfünfeck, das Wechselviereck. Bei dieser Untersuchung tritt als wichtigster Theil die Gleichmessung hervor. In (126) ist sie auf das Fünfeck des Stabes und die Fünfstralung der Ecke angewendet. Diese Sätze, welche gewöhnlich auf den Kreis gegründet werden, sind hier in ihrer Unabhängigkeit an Stab und Ecke dargestellt.

Der dritte Abschnitt: „Kreis und Abkreis“ wird eingeleitet (131—142) durch die Sätze des Kreises, welche, unabhängig von der Maassgleichung des pythagorischen Lehrsatzes, durch die Flächung zur Auflösung des Wechselvierecks und der Mittelflächung führen. Die Anwendung des Satzes (84) zeigt nun (144—148) frei von aller Raumbetrachtung die Entstehung des Abkreises aus dem Kreise. Hieraus folgt (149), dass das Abkreisviereck und die Abkreisvierseitung sich selbst bildhaft sind, sowie (150) die Bildgleichung eines Abkreisvierecks an zwei Abkreisecken, einer Abkreisvierseitung an zwei Abkreisseiten. Dieser Satz ist die Grundlage der ganzen Betrachtung. Durch ihn wird in (154) die eigenthümliche Gestalt, welche das Bildhafte am Abkreise annimmt, vermittelt. Hieraus fließen die Sätze (157) von der Abkreisgleichmessung, (158) von den gesellten Wendestralen und gesellten Spitzen, (160) von dem eingeschriebenen und umschriebenen Abkreisdreieck, (161) von dem Abkkreissechseck und der Abkreissechsseitung, (166—170) die Bildgleichung zweier Abkreisvierecke oder Abkreisvierseitungen, (171—177) die Abkreisflächung.

Diese Sätze sind so gestellt und ausgedrückt, dass man ihre Uebereinstimmung mit den gleichlautenden Sätzen an Stab und Ecke erkennt, wie dieses auch im Wesen der Sache liegt, da Stab und Ecke Sonderfälle des Abkreises sind, nämlich

150 mit 47, 56; 154 mit 103; 157 mit 66 bis 69; 160 mit 72; 161 mit 73; 162 mit 126; 166 mit 49 bis 54 und mit 74; 169 mit 104; 170 mit 44, 59; 171 und 172 mit 106; 173 mit 47, 56.

Dieser innere enge Zusammenhang der Fügungen an Stab, Ecke und Abkreis macht es nun leicht, die Lehre vom Abkreise, welche bisher zur höhern Raumlehre gehörte, in das Gebiet der niedern Bildlehre zu ziehen. Dieses ist aber ein wahrer Fortschritt der Wissenschaft. Denn ein Fortschreiten tritt immer dann ein, wenn Gegenstände eines höhern nur Wenigen erreichbaren Betrachtungskreises zur allgemein zugänglichen Anschauung geführt werden. Der hierdurch erzielte Gewinn an Zeit und Kraft wird nun zu höhern Bestrebungen verwendet. Ich zweifle daher auch nicht, dass die von mir gewählte Darstellung binnen Kurzem auch für den niedern Unterricht benutzt werden wird. Hierbei muss sich denn eine noch grössere Vereinfachung von selbst darbieten.

Aus den vorgenannten allgemeinen Sätzen ergeben sich (178—193) die Auflösungen des Doppelschnitts und seiner Sonderfälle. Der Doppelschnitt löset, ohne die Maassgleichung zu erfordern, alle Auf-

gaben, welche nach der gewöhnlichen zahlhaften Behandlung auf die zweinamige Gleichung führen.

Als Beleg zum Gesagten bestimme ich in (183) durch Bildgleichung die Seite des Zehnecks, in (189) die Sectio determinata, in (191) die Sectio rationis und spatii, in (192) die Einschreibung einer Fügung in eine andere, in (193) die Einschreibung einer Fügung in einen Abkreis. Diese Sätze habe ich in einer kleinen Schrift „fünf berühmte Fragen aus der Bildlehre 1845“ besonders ausgehoben.

Hierauf folgt (194—226) die Anwendung der allgemeinen Sätze auf die drei eigenthümlichen Gestalten des Abkreises als Schlusszug, Stralenzug und Halbzug. Alle Sätze, welche sich auf die verbundenen Durchmesser, die verbundenen Zeilungen, die Stellenmaasse, die beiden Richten, die beiden Leitecken und die Leitstralen beziehen, sind durch blosses Anwenden der Gleichmessung, des Wechselvierecks, der Mittelflächung und der bildhaften Stabdreiecke entwickelt.

Auf diese Weise ist es mir gelungen, ohne irgend eine zahlhafte Betrachtung oder Maassgleichung die ganze Bildlehre als ein in sich abgeschlossenes Ganzes darzustellen.

Für diejenigen aber, welche gewohnt sind, das Bildmässige nur in der Maassgleichung anzuschauen, habe ich in einem Anhange die wichtigsten Maassgleichungen angeführt, welche sich aus den Bildgleichungen ergeben. Am Schlusse nehme ich die Kreisberührung noch einmal vor und theile aus der bekannten Auflösung Gergonne's, durch einige eigen-

thümliche bemerkenswerthe Sätze, verschiedene eben-
mässige Ausdrücke mit, welche zu einer sehr ge-
schmeidigen Berechnung aller Bestimmungsstücke
führen.

Mitau, am 2/14. September 1845.

Professor Dr. G. von Paucker.

I n h a l t.

Erster Abschnitt.

	Seite
Erster Abschnitt: Stab und Ecke.....	1
Zweiter Abschnitt: Doppelbildung	73
Dritter Abschnitt: Kreis und Abkreis.....	123
Anhang: Maassgleichungen.....	235

Inhalt

Seite	
1	Erster Abschnitt: Stab und Fächer
73	Zweiter Abschnitt: Doppelbildung
123	Dritter Abschnitt: Kreis und Abkreis
225	Vierter Abschnitt: Masszeichnungen

Erster Abschnitt.

Stab und Ecke.

Erster Abschnitt.

Stab und Ecke.

1.

Zwei Stäbe, welche zwei gemeinsame Ecken haben, bilden einen einzigen Stab.

Der Durchschnitt zweier Stäbe ist eine Ecke.

Die Ecke ist untheilbar.

Ein Stab und eine ausserhalb desselben befindliche Ecke bilden eine Ebene.

In einer Ebene kann aus einer Ecke nur ein einziger Stral gezogen werden, welcher mit einem bestimmten Stabe nirgends zusammentrifft.

Auf einem Stabe befindet sich zwischen zwei Ecken eine Mitte, und zwar nur eine.

Der Stab heisst in dieser Mitte gehalbt, oder gleichmessend getheilt.

Ein durch die Mitte gezogener Stral heisst ein gleichmessender Stral.

2.

In einem Dreieck schneidet der gleichmessende Stral zwei Wechseldreiecke ab, von denen das innere grösser als das äussere ist.

Es sei abc ein Dreieck, also ac , bc Stralen von c . Es sei d eine beliebige Ecke von ab . Es sei aus d der gleichmessende Stral fg gezogen, so dass $df = dg$ sei. Man verlängere cd nach k , mache $dk = cd$, so ist das Dreieck $cdg = kdf$, also das Dreieck $dbg = dhf$. Also ist von den beiden Wechseldreiecken adf , bdg das innere adf grösser als das äussere bdg .

3.

Zwei Stäbe, deren Wechseldreiecke in Bezug auf einen gleichmessenden Stral gleich sind, treffen nirgends zusammen.

Es seien K, L zwei Stäbe, fg ihr gleichmessender Stral, so dass $df = dg$ sei. Es sei ab ein anderer Stral von d , und es sei das Wechseldreieck $adf = bdg$. Alsdann treffen die Stäbe K, L nirgends zusammen. Denn wenn sie zusammenträfen, so könnte dieses nur in einer einzigen Ecke c geschehen. Alsdann würde in Bezug auf das Dreieck abc das eine der beiden Wechseldreiecke adf, bdg das innere, das andere das äussere sein. Also würden sie (2) ungleich sein.

Die nirgends zusammentreffenden Stäbe K, L heissen *Zeilen*.

Da das Dreieck $adf = bdg$, und $df = dg$, so ist auch $da = db$, also ab ebenfalls ein gleichmessender Stral. Also sind K, L Zeilen in Bezug auf beide gleichmessende Stralen ab, fg .

Dann ist auch das Dreieck $bdf = adg$. Also sind auch M, N Zeilen in Bezug auf die beiden gleichmessenden Stralen ab, fg .

Die Fügung $KLMN$ heisst eine *Zeilung*, und die gleichmessenden Stralen ab, fg heissen die *Querseiten* der *Zeilung*.

4.

Wenn zwei Stäbe Zeilen in Bezug auf einen gleichmessenden Stral sind, so sind sie auch Zeilen in Bezug auf jeden andern gleichmessenden Stral.

Es seien zwischen den Stäben K, L die Stralen ab, fg gezogen, es sei d die Mitte von ab , und es seien die Wechseldreiecke adf, bdg gleich. Hieraus folgt, dass $df = dg$ ist, dass also auch fg ein gleichmessender Stral von K, L ist. Man ziehe in d einen beliebigen dritten Stral hk , so folgt aus der Gleichheit der Wechseldreiecke adf, bdg auch die Gleichheit der Wechseldreiecke adh, bdk und fdh, gdk . Also sind K, L (3) Zeilen in Bezug auf alle gleichmessenden Stralen der Ecke d .

Man ziehe ak beliebig zwischen den Stäben K, L . Es sei l die Mitte von ak , so dass $lk = la$. Man verlängere

bl nach m , so dass $lm = lb$, so sind die Wechseldreiecke $alm = blk$. Also (3) trifft der Stab am mit L nirgends zusammen. Nun trifft aber auch der Stab ah mit L nirgends zusammen. Also liegt die Ecke m in dem Stabe K .

Wenn also die Stäbe K, L Zeilen in Bezug auf die gleichmessenden Stralen der Ecke d sind, so sind sie auch Zeilen in Bezug auf die gleichmessenden Stralen jeder andern beliebigen Ecke l .

5.

Aus einer gegebenen Ecke zu einem gegebenen Stabe die Zeile zu ziehen.

Es sei a die gegebene Ecke, K der gegebene Stab. Man nehme auf demselben drei Ecken b, c, d an, so dass c die Mitte von bd sei. Man ziehe aus a den Stral ac , verlängere denselben nach f , so dass $cf = ca$ sei. Man ziehe aus f den Stral fd , verlängere denselben so, dass $dg = df$ sei. Man ziehe aus a den Stral ag oder L , so sind K, L Zeilen. Denn da $bc = cd$, $ac = cf$, so sind die Wechseldreiecke $abc = fdc$. Also (3) sind ab, fd oder ab, dg Zeilen in Bezug auf die gleichmessenden Stralen der Ecke c . Also (4) sind ab, dg Zeilen in Bezug auf die gleichmessenden Stralen ad, bg . Nun ist $ab = df$, $df = dg$, also $ab = dg$. Es sei h die Ecke der Stralen ad, bg , so ist h die Mitte von ad . Denn wenn etwa k die Mitte von ad wäre, und bk den Stab dg in l träfe, so müssten, weil ab, dg , folglich auch ab, dl Zeilen in Bezug auf den gleichmessenden Stral ad sind, die Wechseldreiecke $akb = dkl$, also $ab = dl$ sein, was unmöglich ist, da $ab = dg$ ist.

Also ist h die Mitte von ad , also h auch die Mitte von bg , also (3) sind bd, ag oder K, L Zeilen in Bezug auf die gleichmessenden Stralen ad, bg , folglich auch (4) in Bezug auf alle übrigen gleichmessenden Stralen.

6.

Dreiecke und Zeilungen, welche gleichhölig sind und gleiche Grundbänder haben, sind inhaltsgleich.

Dreiecke und Zeilungen, welche inhaltsgleich und gleichhölig sind, haben gleiche Grundbänder.

Dreiecke und Zeilungen, welche inhaltsgleich sind und gleiche Grundbänder haben, sind gleichhölig.

Dreiecke und Zeilungen heißen *gleichhölig*, wenn sie entweder zwischen Zeilen liegen, oder wenn ihr Eckband von ihrem Grundstabe gleichmessend getheilt wird. Die Dreiecke abc , kgh oder die Zeilungen $abcd$, $fghk$ sind gleichhölig, weil sie zwischen den Zeilen K , L liegen. Die Dreiecke abc , lbc oder die Zeilungen $abcd$, $lbcm$ sind gleichhölig, weil ihr Eckband al von dem Grundstabe L gleichmessend getheilt wird.

Bei den gleichhöiligen Zeilungen $abcd$, $fghk$ seien die Grundbänder gleich, $bc = gh$, so sind deckend die Dreiecke

$abg = dch$, $agf = dhk$,
 $abcd = abhk - dch - dhk$,
 $fghk = abhk - abg - agf$,
 also inhaltsgleich die Zeilungen
 $abcd = fghk$

und ihre Hälften, die Dreiecke $abc = kgh$.

Ferner sind deckend die Dreiecke

$abn = dco$, $lbn = mco$,
 aber $abcd = abod - dco$,
 $anod = abod - abn$,
 $lbcm = lbom - mco$,
 $lnom = lbom - lbn$,
 also $abcd = anod$, $lbcm = lnom$;
 aber $anod = lnom$,

also inhaltsgleich die Zeilungen $abcd = lbcm$ und ihre Hälften, die Dreiecke $abc = lbc$.

Hieraus folgen nun auch leicht durch mittelbaren Beweis die beiden umgekehrten Sätze.

7.

Gleichhölige Dreiecke und Zeilungen von gleichen Grundbändern werden durch Stralen, welche aus den gleichmessenden Ecken zeilenhaft zu den Seiten gezogen sind, in deckende Theile getheilt.

Die Dreiecke abc , dbc seien gleichhölig und von gemeinschaftlichem Grundbände bc . Die Ecke $bcad = f$ ist die gleichmessende Ecke der Dreiecke abd , acd . Man ziehe aus f Zeilen zu den Seiten ab , ac , db , dc , so er-

geben sich in den Dreiecken abc , dbc die deckenden Theile 1, 2, 3, 4. Wenn der gleichmessende Stral ad zwischen bc fällt, so bestehen beide Dreiecke aus der Anlage 1, 2, 3, 4. Wenn ad ausserhalb bc fällt, so muss von der Anlage 3, 4 die Anlage 1, 2 oder umgekehrt abgezogen werden.

Wenn die gleichhöhigen Zeilungen $abcg$, $bchd$ einerlei Grundband bc haben, so zieht man aus f Zeilen zu ab , bd , aus k zu ch , aus l zu cg .

Wenn dann der gleichmessende Stral ad zwischen bc fällt, so besteht $abcg$ aus der Anlage 3, 4, 3, 4 nebst der Zeilung $afck$, und $bchd$ aus der Anlage 3, 4, 3, 4 nebst der Zeilung $dfcl$. Wenn aber ad ausserhalb bc fällt, so müssen von der Anlage 3, 4, 3, 4 die Zeilungen $afck$, $dfcl$ abgezogen werden.

Wenn die Dreiecke abc , acd , adf , afg u. s. w. eine gemeinschaftliche Spitze a haben, und ihre Grundbänder bc , cd , df , fg u. s. w. gleich sind, so zieht man aus den Ecken der Grundbänder Zeilen zu den Seiten. Dadurch ergeben sich in jedem Dreiecke dieselben deckenden Theile, nur in anderer Folge. Es sind bei 2 Dreiecken 2, bei 3 Dreiecken 4, bei 4 Dreiecken 7, bei 5 Dreiecken 11 Theile u. s. w. Die Zahlen sind Glieder einer gleichgemessenen Reihe zweiter Ordnung.

Es seien abc , dbc zwei gleichhöhige Dreiecke von gleichem Grundbande bc . Es sei $bg = bc$ und es falle der gleichmessende Stral ad innerhalb bg . Man ziehe aus f Zeilen zu ag , dg , ab , db , aus b Zeilen bh , bk zu ac , dc , aus f , h , k Zeilen zu bh , bk . Hierdurch ergeben sich in den Dreiecken abg , dbg 11 deckende Theile. Diese trägt man durch Zeilen auf die Dreiecke abc , dbc über.

8.

Wenn ein Stab von einer Dreistralung gleichmessend getheilt wird, so wird jede Zeile des Stabes von dieser Dreistralung gleichmessend getheilt.

Drei Stralen einer Ecke machen eine Dreistralung. Der Stab K sei von der Dreistralung ab , ac , ad so getroffen, dass bc in d gleichmessend, also $db = dc$ sei. Eine zu K beliebig gezogene Zeile L wird von der Drei-

strahlung in fgh getroffen. Man ziehe zu ad aus b, c, f, g Zeilen, es sei kl die Zeile zu bc . Alsdann sind folgende Dreiecke deckend:

$$adb = akb, adc = alc,$$

$$aqf = ahf, arg = ahg,$$

$$fob = fmb, gpc = gnc.$$

Also sind inhaltsgleich die Zeilungen

$$adoq = ahmk, adpr = ahnl;$$

$$\text{aber } db = dc, db = hm, dc = hn,$$

$$\text{also } hm = hn,$$

also sind deckend

$$\text{die Zeilungen } ahmk = ahnl,$$

$$\text{also die Zeilungen } adoq = adpr,$$

$$\text{also } do = dp,$$

$$\text{also } hf = hg.$$

9.

Wenn ein Stab von einer Dreistrahlung gleichmessen getheilt wird, und aus zwei Ecken des Stabes, deren Band von der Mitte ebenfalls gleichmessen getheilt wird, Zeilen zu dem mittlern Stral an die äussern Stralen gezogen werden, so ist das Eckband derselben die Zeile zu dem Stabe.

Der Stab K sei von einer aus a gehenden Dreistrahlung gleichmessen getheilt, so dass $db = dc$ sei. Auf K sei odp gleichmessen, so dass $do = dp$. Aus o, p seien zu dem mittlern Stral ad Zeilen of, pg an die äussern Stralen gezogen.

Es seien bk, cl, oq, pr Zeilen zu ad , und fh, gh', kl Zeilen zu bc oder K . Alsdann sind folgende Dreiecke deckend:

$$adb = akb, adc = alc,$$

$$aqf = ahf, arg = ah'g,$$

$$fob = fmb, gpc = gnc,$$

also sind inhaltsgleich die Zeilungen

$$adoq = ahmk, adpr = ah'nl.$$

$$\text{Aber } do = dp,$$

also sind deckend die Zeilungen:

$$adoq = adpr,$$

$$\text{also } ahmk = ah'nl.$$

$$\text{Aber } db = dc, db = hm, dc = h'n,$$

also $hm = h'n$;
 aber $ahmk = ah'nl$,
 also $ah = ah'$,
 also fallen die Ecken h, h' zusammen.
 Also ist fg die Zeile zu bc .

10.

Wenn zwei Stralenpaare auf irgend einer Zeile ihres Eckbandes gleiche Glieder bilden, so bilden sie auch auf jeder andern Zeile des Eckbandes gleiche Glieder.

Die Stralenpaare seien ab, ac und $a'b', a'c'$. Ihr Eckband aa' sei K . Es seien K, L, M Zeilen. Die Stralenpaare bilden auf L die Glieder $bc, b'c'$, auf M die Glieder $df, d'f'$. Es seien die Glieder $bc = b'c'$. Man ziehe aus c, f Zeilen zu ab , aus c', f' Zeilen zu $a'b'$. Alsdann sind deckend die Dreiecke:

$$abc = alc, \quad a'b'c' = a'l'c';$$

$$ahf = adf, \quad a'h'f' = a'd'f';$$

$$fgc = fkc, \quad f'g'c' = f'k'c';$$

also sind inhaltsgleich die Zeilungen:

$$abgh = adkl, \quad a'b'g'h' = a'd'k'l';$$

$$\text{aber } bc = b'c', \quad bc = dk, \quad b'c' = d'k',$$

$$\text{also } dk = d'k'.$$

Also haben die gleichhöhigen Zeilungen $adkl, a'd'k'l'$ gleiche Grundbänder. Also (6) sind inhaltsgleich $adkl = a'd'k'l'$, also inhaltsgleich $abgh = a'b'g'h'$.

Aber diese Zeilungen sind gleichhöhig. Sie sind auch inhaltsgleich. Also (6) haben sie gleiche Grundbänder.

$$\text{Also } bg = b'g';$$

$$\text{aber } bg = df, \quad b'g' = d'f',$$

$$\text{also } df = d'f'.$$

11.

Wenn aus drei Ecken eines Stabes Zeilen nach zwei beliebigen Richtungen gezogen werden, so sind die drei Eckbänder Zeilen, und werden von dem Stabe gleichmessend getheilt. An jeder Ecke des Stabes liegen zwei inhaltsgleiche Zeilungen.

Es seien aus den Ecken a, b, c des Stabes S die Zeilen 1, 2, 3 und 5, 6, 7 gezogen. Es sind also

die Ecken $15 = a$, $26 = b$, $37 = c$, $16 = d$, $25 = f$,
 $17 = g$, $35 = h$, $27 = k$, $36 = l$, die Eckbänder $1625 =$
 df , $1735 = gh$, $2736 = kl$.

Diese Eckbänder werden von dem Stabe 8 in m , n , o
getroffen. Da $adbf$, $agch$, $bkcl$ Zeilungen sind, so wer-
den die Eckbänder df , gh , kl von dem Stabe 8 in m , n ,
 o gleichmessend getheilt. Man ziehe aus n zu 1, 2, 3
die Zeile, welche von den Zeilen 5, 6, 7 in p , q , r
getroffen wird, so ist $ap = ph$, $dq = ql$. Also (8)

$$bq = qt,$$

$$\text{also ist } bd = lt, \quad bl = dt.$$

$$\text{Aber } bd = gk, \quad bl = fh,$$

$$\text{also } gk = lt, \quad fh = dt,$$

$$\text{also sind } gt, \quad kl \text{ und } ht, \quad df \text{ Zeilen,}$$

$$\text{also sind } 1625, \quad 1735, \quad 2736 \text{ Zeilen.}$$

Ferner sind deckend die Dreiecke

$$agc = ahc,$$

$$adb = afb,$$

$$bkc = blc,$$

also durch Anlage und Abzug dieser Dreiecke inhaltsgleich
die Zeilungen:

$$afgk = ahld,$$

$$bdgk = bfhl,$$

$$cgdl = ckfh.$$

12.

Wenn zwei Stralen von zwei Zeilen geschnitten
werden, und aus den Ecken Zeilen zu den Stralen ge-
zogen werden, so sind ihre beiden Durchschnittsecken
und die Stralenecke stabhaft.

Es seien 1, 5 Stralen von a ; die Zeilen df , gh
treffen den Stral 1 in d , g , den Stral 5 in f , h . Es seien
aus d , g zu 5 die Zeilen 6, 7; aus f , h zu 1 die Zei-
len 2, 3 gezogen. Es seien die Ecken $26 = b$, $37 = c$.
Das Band ab sei 8.

Die Zeile 7 treffe den Stab 8 in c' . Es sei $c'h'$ die
Zeile zu 1, so ist (11) gh' die Zeile zu df . Es ist aber
auch gh die Zeile zu df . Also (1) fällt h' in h . Also
fällt (1) auch c' in c . Also sind die Ecken a , b , c
stabhaft.

Also sind auch (11) die an den Ecken a, b, c liegenden Zeilungen inhaltsgleich.

13.

Zwei Stäbe, welche von einer Dreistralung gleichmessenend getheilt werden, sind Zeilen.

Es seien df, gh zwei Stäbe, welche von den drei Stralen 1, 8, 5 gleichmessenend getheilt werden, so dass $md = mf, ng = nh$ sei.

Man nehme auf dem Stral 8

$$mb = ma, nc = na,$$

so sind die Wechseldreiecke deckend

$$maf = mbd, mad = mbf,$$

$$nah = ncg, nag = nch,$$

also (3) bf, ch oder 2, 3 Zeilen zu 1 und bd, cg oder 6, 7 Zeilen zu 5.

Also (11) df, gh Zeilen.

14.

Inhaltsgleiche Dreiecke, welche an zwei Stralen liegen, sind gleichhölig. Wenn inhaltsgleiche Zeilungen an zwei Stralen liegen, so sind die Ecken stabhaft.

An den Stralen 1, 5 der Ecke a liegen die inhaltsgleichen Zeilungen $afkg, adlh$, also auf dem Grundbände df die inhaltsgleichen Dreiecke fdg, dfh . Die Ecke der Stralen fk, dl oder 26 sei b . Der Stral ab oder 8 werde von gk oder 7 in c getroffen. Man ziehe aus c zu 1 die Zeile, welche die Zeilen 5, 6 in h', l' trifft, so sind (11) inhaltsgleich die Zeilungen $afkg = adl'h'$, aber auch inhaltsgleich $afkg = adlh$, also inhaltsgleich $adl'h' = adlh$. Aber $hl, h'l'$ sind Zeilen zu 1. Also fallen sie zusammen. Also sind c, h, l Ecken eines Stabes 3, welcher die Zeile zu 1 ist. Also (11) sind die Eckbänder df, gh Zeilen. Also sind die inhaltsgleichen Dreiecke fdg, dfh gleichhölig.

Wenn also die inhaltsgleichen Zeilungen $afkg, adlh$ an den Stralen 1, 5 liegen und von den Zeilen 1, 2, 7, 5 und 1, 3, 6, 5 gebildet werden, so sind die Ecken 15, 26, 37 stabhaft.

15.

Zwei Zeilen werden durch das Band der Ecken ihrer Eckbänder in gleichmessende Stabdreiecke getheilt.

Es seien ab , cd Zeilen, ihre Eckbänder seien ac , bd und ad , bc . Die Ecken derselben sind $acbd = f$, $adbc = g$. Das Band dieser Ecken ist fg . Man ziehe aus a , c zu dem Eckband bd , aus b , d zu dem Eckband ac Zeilen. Die Ecken seien h , k , so sind (12) die Ecken f , h , k stabhaft, und ihr Stab (11) theilt die Zeilen ab , cd in gleichmessende Stabdreiecke anb , cod . Man ziehe aus a , d zum Eckbande bc , aus b , c zum Eckbande ad Zeilen. Die Ecken seien l , m , so sind (12) die Ecken g , l , m stabhaft, und ihr Stab (11) theilt die Zeilen ab , cd in gleichmessende Stabdreiecke anb , cod . Also fallen die Stäbe fhk , glm zusammen. Also theilt das Band fg die Zeilen ab , cd in gleichmessende Stabdreiecke anb , cod .

16.

Wenn bei zwei Stabdreiecken von den drei Bandpaaren zwei Paare zeilenhaft sind, so ist auch das dritte Paar zeilenhaft.

Die beiden Stabdreiecke seien 123, 567. Die Ecke ihrer Stäbe sei 4.

Es seien die Bandpaare 1526, 1736 zeilenhaft.

Da 1526 zeilenhaft und 1736 zeilenhaft, so sind (6) inhaltsgleich die Dreiecke

$$416 = 425 \text{ und } 416 = 437,$$

also inhaltsgleich die Dreiecke $425 = 437$, also (6) das Bandpaar 2735 zeilenhaft.

17.

Wenn die drei Bandpaare zweier Dreiecke zeilenhaft sind, und das eine Dreieck stabhaft ist, so ist auch das andere Dreieck stabhaft.

Die Dreiecke seien 123, 567. Ihre drei Bandpaare 1526, 1736, 2735 seien zeilenhaft und es sei 123 ein Stabdreieck. Das Band 56 werde von 17 in 7' getroffen.

Dann sind 1526, 17'36 zeilenhaft, also (16) 27'35

zeilenhaft. Aber 2735 zeilenhaft. Also sind 27, 27' Zeilen zu 35. Also (1) fallen die Ecken 7, 7' zusammen. Aber 567' ist ein Stabdreieck. Also ist 567 ein Stabdreieck.

18.

Bei dem Durchschnitt dreier Zeilen durch drei Zeilen entstehen 18 Eckbänder, von denen je drei Stralen einer Ecke sind.

Es seien 1, 2, 3 Zeilen und 5, 6, 7 Zeilen. Man verbinde die Ecken 16, 25 und 17, 35. Die Eckbänder 1625, 1735 seien Stralen einer Ecke a . Man ziehe aus a zu 123 die Zeile 4, zu 567 die Zeile 8.

Da die Ecken a , 16, 25 stabhaft sind, so sind (11) die Zeilungen 4, 1, 5, 8 und 4, 2, 6, 8 inhaltsgleich. Da die Ecken a , 17, 35 stabhaft sind, so sind die Zeilungen 4, 1, 5, 8 und 4, 3, 7, 8 inhaltsgleich. Also sind die Zeilungen 4, 2, 6, 8 und 4, 3, 7, 8 inhaltsgleich.

Also (14) sind die Ecken 48, 27, 36 stabhaft. Also sind die Eckbänder 1625, 1735, 2736 Stralen einer Ecke $48 = a$.

Da die drei Zeilen 5, 6, 7 sechs Versetzungen zulassen, so ergeben sich sechs Ecken oder Dreistralungen, nämlich:

1526, 1736, 2735
1527, 1637, 2635
1625, 1735, 2736
1627, 1537, 2536
1725, 1635, 2637
1726, 1536, 2537.

19.

Wenn bei einem stralenhaften Sechseck zwei Bandpaare zeilenhaft sind, so ist auch das dritte Bandpaar zeilenhaft.

Das Sechseck sei 123, 567. Es sei stralenhaft in a , so dass die Eckbänder 15, 26, 37 Stralen der Ecke a seien. Es seien die Bandpaare 12, 56 und 23, 67 zeilenhaft.

Man ziehe aus 1 zu 23, 67 die Zeile 1b an 37; aus 3 zu 12, 56 die Zeile 3d an 15; aus b zu 26 die Zeile bc an 12; aus d zu 26 die Zeile df an 23.

Da b1, 32 Zeilen, bc, a2 Zeilen und ab3, 12c stabhaft, so sind (16) c3, a1 Zeilen.

Da d3, 12 Zeilen, df, a2 Zeilen und ad1, 23f stabhaft, so sind (16) f1, a3 Zeilen.

Wenn also 13 von bc, df in g, h getroffen wird, so sind cg3, dh1 und bg3, fh1 deckende Dreiecke, also $g3 = h1$, $g1 = h3$.

Man ziehe aus 1, 3 zu 26 an 56, 67 die Zeilen 1k, 3l, so sind 126k, 326l Zeilungen, also 13lk eine Zeilung, deren gleichmessende Stralen l1, k3 die gleichmessende Ecke o haben. Man ziehe aus o zu 26, fh, cg die Zeile op, so wird 13 von der Dreistralung ol, op, o3 gleichmessend getheilt, so dass $p1 = p3$. Aber auch $h1 = g3$. Wenn also o3 von fh in m, ol von cg in n getroffen wird, so ist (9) mn die Zeile zu 13.

Da d3, 5k Zeilen, dm, 1k Zeilen und d15, k3m stabhaft, so sind (16) 13, m5 Zeilen. Da b1, 7l Zeilen, bn, 3l Zeilen und b37, l1n stabhaft, so sind (16) 13, n7 Zeilen. Da 13, mn, ferner 13, m5, ferner 13, n7 Zeilen sind, so sind 13, 57 Zeilen.

Wenn also in dem Sechseck 123, 567 die Bänder 15, 26, 37 Stralen, die Bänder 12, 56 und 23, 67 Zeilen sind, so sind auch die Bänder 13, 57 Zeilen.

20.

Bei drei Zeilpaaren liegen die sechs Eckbänder je drei in vier Ecken.

Die drei Zeilpaare seien 15, 26, 37. Man ziehe die Eckbänder 1256, 2367, ihre Ecke sei a. Man ziehe aus a zur Ecke 13 einen Stral, welcher den Stab 5 in f trifft, so ist (19) der von f zur Ecke 67 gezogene Stral die Zeile zu 3. Aber 7 ist die Zeile zu 3. Also ist das Eckband 1357 ein Stral von a. Also sind 1256, 2367, 1357 Stralen einer Ecke a.

Auf dieselbe Art erhellet der Beweis für die übrigen. Von den sechs Eckbändern liegen also je drei in einer Ecke, nämlich in

a : 2367, 1357, 1256,

b : 2367, 1735, 1625,

c : 1357, 1625, 2736,

d : 1256, 2736, 1735.

21.

Wenn bei einem strahlenhaften Sechseck die beiden Bänder eines Eckpaares Zeilen sind, so ist das Band der Ecken der beiden andern Bandpaare die Zeile zu denselben.

Das Sechseck sei 123, 567. Es sei strahlenhaft in a , so dass 15, 26, 37 Stralen von a seien. Auch seien die Eckbänder 13, 57 Zeilen.

Es seien die Ecken $2367 = k$, $1256 = m$. Man ziehe aus 5 an 26 zu 12 die Zeile 58, so sind (19) in dem strahlenhaften Sechseck 123, 587 die Bänder 23, 87 Zeilen.

Das Sechseck $k2m$, 785 ist strahlenhaft in 6, auch sind $k2$, 78 und $m2$, 58 Zeilen, also (19) km , 57 Zeilen, also km , 13 Zeilen.

22.

Wenn bei einem strahlenhaften Sechseck das eine Band eines Eckpaares die Zeile zu dem Bande der Ecken der beiden andern Bandpaare ist, so ist auch das zweite Band jenes Eckpaares die Zeile zu demselben.

Das Sechseck sei 123, 567.

Es seien 15, 26, 37 Stralen von a .

Es seien die Ecken $2367 = k$, $1256 = m$.

Es sei 57 die Zeile zu km .

Man ziehe aus 5 an 26 zu 12 die Zeile 58, so sind km , 57 und $m2$, 58 Zeilen in dem strahlenhaften Sechseck $k2m$, 785, also (19) $k2$, 78 Zeilen. Das Sechseck 123, 587 ist strahlenhaft in a , es sind 12, 58 und 23, 78 Zeilen, also (19) 13, 57 Zeilen.

23.

Bei einem zeilenhaften Sechseck liegen die sechs Ecken der Bandpaare je drei in vier Stäben.

Das zeilenhafte Sechseck sei 123, 567, die Eckbänder 15, 26, 37 seien Zeilen. Es seien die Ecken $2367 = k$, $1357 = l$, $1256 = m$.

Man ziehe aus 1 an kl zu 23 die Zeile 18.

In dem Sechseck 185, $3k7$ sind 13, $k8$, 57 Strahlen von l , ferner 15, 37 Zeilen, 18, $k3$ Zeilen, also (19) 58, $k7$ Zeilen. In dem Sechseck 185, $2k6$ sind 18, $k2$ Zeilen, 58, $k6$ Zeilen, 15, 26 Zeilen, also (20) 12, 56, $k8$ Strahlen einer Ecke. Aber $1256 = m$, also liegt $k8$ in m . Aber $k8$, kl fallen zusammen. Also sind die Ecken k , l , m in einem Stabe a . Derselbe Beweis gilt für die übrigen. Von den sechs Ecken der Bandpaare liegen also je drei in vier Stäben, nämlich in

a : 2367, 1357, 1256,
 b : 2367, 1735, 1625,
 c : 1357, 1625, 2736,
 d : 1256, 2736, 1735.

24.

Zwei Stabdreiecke, welche in einer bestimmten Lage bildhaft sind, sind in jeder andern Lage bildhaft, und haben in jeder Richtung einen Bildungsstab.

Zwei Stabdreiecke heissen *bildhaft*, wenn die Ecken der aus den Bildern gezogenen Zeilen stabhaft sind. Das Zeichen der Bildgleichung ist $++$.

Es seien 123, 567 Stabdreiecke, $a1$, $b2$, $c3$ Zeilen, $a5$, $b6$, $c7$ Zeilen und abc stabhaft, so heissen 123, 567 *bildhaft*, 1 und 5, 2 und 6, 3 und 7 heissen *Bilder*, der Stab abc heisst der *Bildungsstab*.

123 $++$ 567, 132 $++$ 576, 213 $++$ 657,
 231 $++$ 675, 312 $++$ 756, 321 $++$ 765.

Zieht man aus einer der drei Ecken des Bildungsstabes, z. B. aus a , zu 123 die Zeile adf , zu 567 die Zeile agh , so sind bd , cf und bg , ch Zeilen, bc , df , gh Strahlen von a , also (19) dg , fh Zeilen.

Man ziehe aus a in drei andern beliebigen Richtungen Strahlen, nehme auf denselben $ad' = ad$, $af' = af$, $ag' = ag$, $ah' = ah$, und ab beliebig. Da $ad' = ad$, $af' = af$, so sind die Dreiecke $ad'f$, adf deckend, also die Dreiecke $d'df$, $dd'f'$ inhaltsgleich, also (6, 14) dd' , ff' Zeilen. Aus demselben Grunde sind gg' , hh' Zeilen.

Da bd , cf Zeilen, und dd' , ff' Zeilen, so sind (19) bd' , cf' Zeilen.

Da bg , ch Zeilen, gg' , hh' Zeilen, so sind (19) bg' , ch' Zeilen.

Da bd' , cf' Zeilen, bg' , ch' Zeilen, so sind (19) $d'g'$, $f'h'$ Zeilen.

Man ziehe ab' beliebig.

Man ziehe aus f' an ab' zu $d'b'$ die Zeile $f'c'$.

Da $d'g'$, $f'h'$ Zeilen, $d'b'$, $f'c'$ Zeilen, so sind (19) $b'g'$, $c'h'$ Zeilen. Man ziehe aus a zu $d'b'$, $f'c'$ die Zeile, und zu $b'g'$, $c'h'$ die Zeile. Man ziehe zu den Stäben $ad'f'$, $ag'h'$ beliebige Zeilen, welche von den aus a , d' , f' und aus a , b' , c' gezogenen Zeilen in $1'2'3'$, $5'6'7'$ getroffen werden, dann sind a , b' , c' die Ecken der aus $1'2'3'$, $5'6'7'$ gezogenen Zeilen, also vermöge der Erklärung

$$1'2'3' \parallel 5'6'7'.$$

$$\text{Aber } 1'2'3' = ad'f' = adf = 123,$$

$$5'6'7' = ag'h' = agh = 567.$$

Also sind zwei Stabdreiecke 123 , 567 , welche in einer bestimmten Lage bildhaft sind, auch in jeder andern Lage bildhaft, und haben in jeder beliebigen Richtung einen Bildungsstab abc oder $a'b'c'$.

25.

Bei bildhaften Stabdreiecken liegen die Ecken der Wechselbänder in demjenigen Bildungsstabe, welcher den zu den Stäben gezogenen Zeilen entspricht.

Es seien die Stabdreiecke $123 \parallel 567$, der Stab 123 sei A , der Stab 567 sei B , man ziehe aus 123 zu B , aus 567 zu A Zeilen. Die Ecken derselben seien a , b , c , so liegen (24) die Ecken abc in einem Bildungsstabe C . Da A , $a5$, $b6$ Zeilen und B , $a1$, $b2$ Zeilen, so liegt (18) die Ecke 1625 in ab , also in C .

Da A , $a5$, $c7$ Zeilen und B , $a1$, $c3$ Zeilen, so liegt (18) die Ecke 1735 in ac , also in C .

Da A , $b6$, $c7$ Zeilen und B , $b2$, $c3$ Zeilen, so liegt (18) die Ecke 2736 in bc , also in C .

Also liegen in dem Bildungsstabe C ausser den Ecken a , b , c auch die Ecken

$$1625, 1735, 2736.$$

26.

Wenn bei Stabdreiecken die Ecken der aus zwei Bildern zu den Stäben gezogenen Zeilen und die Ecke des dritten Wechselbandpaares stabhaft sind, so sind die Stabdreiecke bildhaft.

Es seien die Stabdreiecke 123, 567, ihre Stäbe *A*, *B*.

Es seien aus 123 zu *B*, aus 567 zu *A* Zeilen gezogen, deren Ecken *a*, *b*, *c* seien. Es liege die Ecke 2736 = *d* in dem Stabe *ab*.

Es seien die Ecken $b236 = f$, $b627 = g$. In den Stabdreiecken 2g7, 3f6 sind 2f, 76 und 23, g6 Zeilen, also (16) *fg*, 37 Zeilen. Aber auch *bf*, *c3* Zeilen, und *bg*, *c7* Zeilen, also (20) *bcd* stabhaft. Aber auch *abd* stabhaft. Also *abc* stabhaft. Also (24)

$$123 \text{ ++ } 567.$$

Auf gleiche Weise erhellet: wenn *dbc* stabhaft, so ist *abc* stabhaft, also

$$123 \text{ ++ } 567.$$

27.

Wenn bei bildhaften Stabdreiecken zwei Bildbänder Zeilen sind, so ist das dritte Bildband die Zeile derselben. Wenn zwei bildhafte Stabdreiecke in einem Bilde ihre gemeinschaftliche Stabecke haben, so sind die beiden andern Bildbänder Zeilen.

Es sei $123 \text{ ++ } 567$, und *abc* der Bildungsstab, so sind *a1*, *b2*, *c3* und *a5*, *b6*, *c7* Zeilen.

Es seien 15, 26 Zeilen.

Da 15, 26 Zeilen, *a1*, *b2* Zeilen, *a5*, *b6* Zeilen sind, so sind (20) die Stäbe 12, *ab*, 56 Stralen einer Ecke *d*.

Da das Sechseck *a15*, *c37* in *d* stralenhaft ist und *a1*, *c3* Zeilen, *a5*, *c7* Zeilen sind, so sind (19) 15, 37 Zeilen.

28.

Stabdreiecke, deren drei Bildbänder Zeilen sind, sind bildhaft. Wenn zwei Stabdreiecke in einem Bilde ihre gemeinschaftliche Stabecke haben und die beiden andern Bildbänder Zeilen sind, so sind die Stabdreiecke bildhaft.

Es seien 15, 26, 37 Zeilen, die Ecke der Stäbe sei d . Man ziehe aus d einen beliebigen Stral, an denselben in beliebiger Richtung die Zeilen $1a$, $2b$, $3c$, so sind (19) $a5$, $b6$, $c7$ Zeilen, also abc der Bildungsstab der Stabdreiecke 123, 567, also (24)

$$123 \parallel 567.$$

29.

Bildhafte Stabdreiecke lassen sich in eine Lage bringen, in welcher die Bildbänder Zeilen sind.

Es sei a die gemeinsame Ecke zweier beliebig gerichteter Stäbe. Man nehme auf denselben die Dreiecke abc , adf , den gegebenen bildhaften Stabdreiecken 123, 567 gleich, so ist, weil diese Stabdreiecke bildhaft sind, auch

$$abc \parallel adf,$$

also (27) bd , cf Zeilen. Man ziehe aus a zu bd , cf die Zeile. Man ziehe zu den Stäben abc , adf beliebige Zeilen, welche von den aus a , b , c gezogenen Zeilen in 123, 567 geschnitten werden, so ist das Verlangte geschehen.

30.

Wenn zwei Stabdreiecke einem dritten Stabdreiecke bildhaft sind, so sind sie einander bildhaft.

$$\text{Es sei } 123 \parallel abc$$

$$\text{und } 567 \parallel abc.$$

Man ziehe aus a zwei beliebige Stralen und nehme darauf die Stabdreiecke $adf = 123$, $agh = 567$, so ist

$$adf \parallel abc,$$

$$agh \parallel abc,$$

also (27) bd , cf und bg , ch Zeilen,

also (19) dg , fh Zeilen,

also (28) $adf \parallel agh$,

$$\text{also } 123 \parallel 567.$$

31.

Wenn bei zeilenhaften Stabdreiecken die Bildbänder Stralen einer Ecke sind, so sind die Stabdreiecke bildhaft.

Die Stäbe der Stabdreiecke 123, 567 seien Zeilen, und die Bildbänder 15, 26, 37 seien Stralen der Ecke b . Man ziehe aus 2 an 17 zu 37 die Zeile $2a$, so ist (27)

$$123 \vdash 1a7.$$

An den Stabdreiecken $a17$, $b26$ sind 21, 67 Zeilen, $2a$, $b7$ Zeilen, also (16) $b1$, $a6$ oder 15, $a6$ Zeilen.

$$\text{Also (28) } 1a7 \vdash 567,$$

$$\text{also (30) } 123 \vdash 567.$$

32.

Bei zeilenhaften und bildhaften Stabdreiecken sind die Bildbänder Stralen einer Ecke.

$$\text{Es sei } 123 \vdash 567$$

und die Stäbe seien Zeilen. Man ziehe aus 2 an 17 zu 37 die Zeile $2a$, so ist (27)

$$123 \vdash 1a7;$$

$$\text{aber } 123 \vdash 567,$$

$$\text{also (30) } 1a7 \vdash 567,$$

$$\text{also (28) } 15, a6 \text{ Zeilen.}$$

$$\text{Es sei die Ecke } 1537 = b.$$

Nun sind 21, 67 Zeilen, $2a$, $b7$ Zeilen, $b1$, $a6$ Zeilen, aber $a17$ stabhaft. Also (17) $b26$ stabhaft. Also 15, 26, 37 Stralen einer Ecke b .

33.

Wenn bei bildhaften Stabdreiecken die Bildbänder Stralen einer Ecke sind, so sind die Stäbe Zeilen.

$$\text{Es sei } 123 \vdash 567$$

und 15, 26, 37 Stralen der Ecke b . Man ziehe aus 2 an 17 zu 37 die Zeile $2a$, so ist (27)

$$123 \vdash 1a7;$$

$$\text{aber } 123 \vdash 567,$$

$$\text{also (30) } 1a7 \vdash 567,$$

$$\text{also (28) } 15, a6 \text{ Zeilen.}$$

An den Stabdreiecken $a17$, $b26$ sind also $a2$, $7b$ Zeilen, $a6$, $1b$ Zeilen, also (16) 12, 67 Zeilen.

34.

Wenn bei Stabvierecken die Stäbe Zeilen sind und die Bänder der Theile Stralen von Ecken sind, deren

Band die Zeile jener Stäbe ist, so lassen sich aus diesen Theilen bildhafte Stabdreiecke zusammensetzen.

Die Stabvierecke seien 1234, 5678, ihre Stäbe seien Zeilen, die Bänder 15, 26 seien Stralen von u , die Bänder 37, 48 seien Stralen von v , und das Band uv sei die Zeile der Stäbe.

Man nehme auf dem Stabe des Vierecks 1234 die Ecken abc , so dass $ab = 12$, $ac = 34$. Man nehme auf dem Stabe uv die Ecke w beliebig. Die aus w nach abc gezogenen Stralen treffen den Stab des Vierecks 5678 in fgh , so ist (31)

$$abc \parallel fgh.$$

$$\text{Hier ist } ab = 12, \quad ac = 34$$

$$\text{und (10) } fg = 56, \quad fh = 78.$$

35.

Zwei einem dritten bildhafte Stabdreiecke sind auch dann einander bildhaft, wenn sich unter den drei Stäben zwei zeilenhafte befinden.

Es sei $123 \parallel 567$ und $567 \parallel 548$. Die Stäbe der Dreiecke 123, 567 seien Zeilen.

Man ziehe aus 2 an 17 zu 37 die Zeile $2a$, so sind (32) 15, $a6$ Zeilen und 15, 26, 37 Stralen einer Ecke b . Da $567 \parallel 548$, so sind (27) 64, 78 Zeilen. Es sei die Ecke $64a2 = c$ und aus 1 an $c7$ zu ac die Zeile $1d$ gezogen. Da $d1$, ca Zeilen, 15, $a6$ Zeilen, so sind (19) $d5$, $c6$ Zeilen.

Also sind $1d$, $2c$, 37 Zeilen, und $5d$, $4c$, 87 Zeilen, also ist (24) $dc7$ der Bildungsstab der Stabdreiecke 123, 548, also

$$123 \parallel 548.$$

36.

Zwei einem dritten bildhafte Stabdreiecke sind auch dann einander bildhaft, wenn alle drei Stäbe Zeilen sind.

Es sei $123 \parallel 456$, $456 \parallel 789$. Die drei Stäbe seien Zeilen. Also (32) 14, 25, 36 Stralen einer Ecke a und 47, 58, 69 Stralen einer Ecke b .

Da das Sechseck 147, 258 zeilenhaft ist, so sind (23) die Ecken $1425 = a$, $4758 = b$, 1728 stabhaft.

Da das Sechseck 147, 369 zeilenhaft ist, so sind (23) die Ecken $1436 = a$, $4769 = b$, 1739 stabhaft.

Also sind 17, 28, 39 Stralen einer Ecke c des Stabes ab .

Also (31) $123 \vdash 789$.

37.

Bildhafte Stabdreiecke haben einen Bildungsstab, welcher die Zeile eines Bildbandes und ein Stral der Ecke der beiden andern Bildbänder ist. In demselben liegt jede der beiden Ecken, in welchen ein Wechselband von der aus dem Gegenbilde zu dem andern Stabe gezogenen Zeile getroffen wird.

Es sei $123 \vdash 567$.

Es sei die Ecke $1537 = a$. Die aus 3 zu 567 gezogene Zeile werde von 25 in b , die aus 5 zu 123 gezogene Zeile werde von 63 in c getroffen.

Es seien die Ecken

$$\begin{aligned} a6b3 &= d, & a2c5 &= f, \\ 15b3 &= g, & 37c5 &= h, \end{aligned}$$

so ist (31) $567 \vdash gd3$, aber $567 \vdash 123$,

also (35) $123 \vdash gd3$,

also (27) $d2$, $g1$ Zeilen.

In den Stabdreiecken $ad6$, $b25$ sind $d2$, $a5$ Zeilen, db , 65 Zeilen, also (16) ab , 26 Zeilen. Ferner ist (31)

$$123 \vdash 5fh, \text{ aber } 123 \vdash 567,$$

also (35) $567 \vdash 5fh$, also (27) $f6$, $h7$ Zeilen. In den Stabdreiecken $af2$, $c36$ sind $f6$, $a3$ Zeilen, fc , 23 Zeilen, also (16) ac , 26 Zeilen.

Da ab , 26 und ac , 26 Zeilen sind, so sind abc stabhaft, und dieser Bildungsstab ist die Zeile zu dem Bande 26.

Die aus 1 zu 567 gezogene Zeile werde von 27 in b' , die aus 7 zu 123 gezogene Zeile werde von 61 in c' getroffen. Es seien die Ecken

$$\begin{aligned} a6b'1 &= d', & a2c'7 &= f', \\ 73b'1 &= g', & 15c'7 &= h', \end{aligned}$$

so ist (31) $567 \vdash 1d'g'$;

aber 567 ++ 123,
also (35) 123 ++ 1d'g',
also (27) d'2, g'3 Zeilen.

In den Stabdreiecken $ad'6$, $b'27$ sind $d'2$, $a7$ Zeilen, $d'b'$, 67 Zeilen,

also (16) ab' , 26 Zeilen.

Ferner ist (31) 123 ++ $h'f'7$,

aber 123 ++ 567,

also (35) 567 ++ $h'f'7$,

also (27) $f'6$, $h'5$ Zeilen.

In den Stabdreiecken $af'2$, $c'16$ sind $f'6$, $a1$ Zeilen, $f'c'$, 21 Zeilen, also (16) ac' , 26 Zeilen.

Da ab' , 26 und ac' , 26 Zeilen sind, so sind $ab'c'$ stabhaft. Also liegen die Ecken a , b , c , b' , c' in einem Bildungsstabe, welcher die Zeile zu 26 ist.

38.

Wenn bei zwei Stabdreiecken die Ecke zweier Bildbänder und die beiden Ecken, in denen jedes Wechselband von der aus dem Gegenbilde zu dem andern Stabe gezogenen Zeile getroffen wird, stabhaft sind, so sind die Stabdreiecke bildhaft, und jener Bildungsstab ist die Zeile des dritten Bildbandes.

Es sei die Ecke $1537 = a$. Die aus 3 zu 567 gezogene Zeile werde von 25 in b , die aus 5 zu 123 gezogene Zeile werde von 63 in c getroffen. Es seien die Ecken

$$\begin{aligned} a6b3 &= d, & a2c5 &= f, \\ 15b3 &= g, & 37c5 &= h. \end{aligned}$$

In den Stabdreiecken $b25$, $c36$ sind 56, $b3$ Zeilen, $5c$, 23 Zeilen, also (16) bc , 26 Zeilen.

Aber abc ist stabhaft, also sind ab , 26 und ac , 26 Zeilen.

In den Stabdreiecken $ad6$, $b25$ sind ba , 26 Zeilen, bd , 56 Zeilen, also (16) $a5$, $d2$ oder $g1$, $d2$ Zeilen,

$$\begin{aligned} \text{also (28) } 123 & ++ gd3; \\ \text{aber (31) } gd3 & ++ 567, \\ \text{also (35) } 123 & ++ 567. \end{aligned}$$

39.

Zwei gleichmessende Stabdreiecke sind einander in Folge und Gegenfolge bildhaft.

Ein gleichmessendes Stabdreieck ist sich selbst in Gegenfolge bildhaft.

Ein sich selbst in Gegenfolge bildhaftes Stabdreieck ist gleichmessend.

Es seien die Stabdreiecke 123, 145 gleichmessend, sodass

$$12 = 23, 14 = 45.$$

Also sind (6, 7) die Dreiecke 412, 423, ebenso die Dreiecke 412, 425, also auch die Dreiecke 423, 425 inhaltsgleich, also (6) 24, 35 Zeilen. Man ziehe zu 15 die Zeile 26, so ist 4256 eine Zeilung, also $26 = 45$, also $26 = 14$.

Aber auch 14, 26 Zeilen, also 1264 eine Zeilung, also 46, 12 oder 46, 13 Zeilen.

Da 24, 35 Zeilen sind, so ist (28)

$$123 \text{ ++ } 145.$$

Da 15, 26 Zeilen sind, so ist (28)

$$123 \text{ ++ } 563.$$

Da 46, 13 Zeilen sind, so ist (28)

$$563 \text{ ++ } 541,$$

$$\text{also (30) } 123 \text{ ++ } 541.$$

Also sind die gleichmessenden Stabdreiecke 123, 145 einander in Folge und Gegenfolge bildhaft.

$$\text{Da } 123 \text{ ++ } 541,$$

$$\text{so ist } 321 \text{ ++ } 145;$$

$$\text{aber } 123 \text{ ++ } 145,$$

$$\text{also (30) } 123 \text{ ++ } 321.$$

Also ist ein gleichmessendes Stabdreieck sich selbst in Gegenfolge bildhaft.

Es sei umgekehrt ein Stabdreieck 123 angenommen, welches sich selbst in Gegenfolge bildhaft sei, so dass

$$123 \text{ ++ } 321.$$

Man ziehe aus einer beliebigen Ecke 5 die Stralen 51, 53, aus 2 zu 51, 53 die Zeilen 26, 24, so ist (28)

$$123 \text{ ++ } 145 \text{ und } 321 \text{ ++ } 365;$$

$$\text{aber } 123 \text{ ++ } 321,$$

$$\text{also (30) } 145 \text{ ++ } 365,$$

$$\text{also (27) } 46, 13 \text{ Zeilen.}$$

Also sind 1264, 3246 Zeilungen, also $46 = 12$ und $46 = 23$. Also

$$12 = 23.$$

Also ist ein sich selbst in Gegenfolge bildhaftes Stabdreieck gleichmessend.

40.

Einen Stab in gleiche Theile zu theilen.

Je zwei auf einander folgende gleiche Abschnitte machen ein gleichmessendes Stabdreieck. Bei zwei in gleiche Theile getheilten Stäben ist also jedes Stabdreieck des einen dem des andern bildhaft.

Der einzutheilende Stab sei ab . Die Ecken a, b sind gegeben. Auf einem andern beliebigen Stabe nehme man so viel gleiche Abschnitte, als ab Theile enthalten soll. Hierdurch ergeben sich die Ecken c, d . Aus a, b ziehe man in beliebiger Richtung Zeilen, aus c, d ebenfalls in beliebiger Richtung Zeilen. Hierdurch ergeben sich die Ecken f, g eines Bildungsstabes. Aus den Theilungsecken von cd ziehe man Zeilen zu cf, dg an den Bildungsstab fg . Aus den Theilungsecken des Bildungsstabes fg ziehe man Zeilen zu af, bg . Hierdurch ergeben sich die Theilungsecken auf ab . Dieses Verfahren beruht auf (24).

Oder man bestimme die Ecke $acbd = h$, ziehe aus c an bd zu ab die Zeile ck , aus b nach den Theilungsecken von cd Stralen, welche die Zeile ck in ungleiche Theile theilen, aus h zu den Theilungsecken von ck Stralen, und zu diesen Stralen aus den Theilungsecken von cd Zeilen, welche den Stab ab in gleiche Theile theilen. Dieses Verfahren beruht auf (38).

41.

Wenn ein Stabdreieck aus zwei in Folge und Gegenfolge bildhaften Stabdreiecken besteht, so haben der äussere und innere Theil desselben eine gemeinsame Mitte.

Es sei $123 \div 432$.

Aus einer beliebigen Ecke a ziehe man Stralen nach

1, 2, 3, 4, welche von einer zum Stabe 1234 beliebig gezogenen Zeile in 5678 getroffen werden, so ist (31)

$$123 \parallel 567,$$

$$\text{also (35)} \quad 432 \parallel 567,$$

also (32) 45, 36, 27 Stralen einer Ecke *b*.

$$\text{Ferner ist (31)} \quad 432 \parallel 876,$$

$$\text{also (35)} \quad 123 \parallel 876,$$

also (32) 18, 27, 36 Stralen einer Ecke,

also sind 18, 45 und 27, 36 Stralen derselben Ecke *b*.

Wenn also der Stral *ab* den Stab 1234 in *c* trifft, so ist (15) *c* die Mitte von 14 und 23.

42.

In bildhaften Vierstralungen werden auf der zu einem Bilde gezogenen Zeile von den drei andern Bildern bildhafte Stabdreiecke abgeschnitten.

Vier Stralen einer gemeinsamen Ecke machen eine *Vierstrahlung*. Die Vierstralungen 1234, 5678 heissen *bildhaft* oder es ist

$$1234 \parallel 5678,$$

und die Stralen 15, 26, 37, 48 heissen *Bilder*, wenn auf den zu einem Bilde 1, 5 gezogenen Zeilen die drei andern Bilder 234 und 678 bildhafte Stabdreiecke

$$abc \parallel dfg$$

abschneiden. Da alsdann auch

$$bac \parallel fdg, \quad cab \parallel gdf \text{ u. s. w.,}$$

$$\text{so ist auch } 1324 \parallel 5768,$$

$$1423 \parallel 5867$$

in beliebiger gleichmässiger Versetzung der drei andern Bilder.

43.

Eine Vierstrahlung ist sich selbst auf vierfache Art bildhaft.

Zwei bildhafte Vierstralungen sind einander auf vierfache Art bildhaft.

Die Ecke der Vierstrahlung 1234 sei *u*. Es sei *b* eine Ecke von 3, aus *b* sei zu 1 die Zeile gezogen, welche von 24 in *ac* getroffen wird; aus *b* sei zu 2 die Zeile gezogen, welche von 41 in *df* getroffen wird, so ist (28)

$$abc \parallel udc, \quad udc \parallel fdb,$$

also (30) $abc \vdash fdb$,

also (42) $1234 \vdash 2143$.

Aus b sei zu 4 die Zeile gezogen, welche von 21 in gh getroffen wird, so ist (28)

$abc \vdash agu, agu \vdash bgh$,

also (30) $abc \vdash bgh$,

also (42) $1234 \vdash 4321$.

Aus g sei zu 3 die Zeile gezogen, welche von 41 in kl getroffen wird, so ist (28)

$bgh \vdash ulh, ulh \vdash klg$, also (30) $abc \vdash klg$,

also (42) $1234 \vdash 3412$,

also überhaupt $1234 \vdash 2143 \vdash 3412 \vdash 4321$

und $1234 \vdash 5678 \vdash 6587 \vdash 7856 \vdash 8765$.

Auch können bei der Bezeichnung bildhafter Vierstrahlungen die Bilder auf gleichmässige Art versetzt werden.

44.

Wenn zwei Vierstrahlungen einer dritten bildhaft sind, so sind sie einander bildhaft.

Es sei

$1234 \vdash abcd$,

$5678 \vdash abcd$.

Die zu 1, 5, a gezogenen Zeilen werden von den übrigen Stralen

in $2'3'4'$,

in $6'7'8'$,

in $b'c'd'$

getroffen, so ist (42)

$2'3'4' \vdash b'c'd'$,

$6'7'8' \vdash b'c'd'$,

also (30, 35, 36) $2'3'4' \vdash 6'7'8'$,

also (42) $1234 \vdash 5678$.

45.

Zwei stabhafte Dreistralungen machen mit dem Bande ihrer Ecken bildhafte Vierstrahlungen.

Die Dreistralungen seien 234, 678, das Band ihrer Ecken uv sei 1, sie seien in b, c, d stabhaft, so dass $26 = b, 37 = c, 48 = d$ Ecken eines Stabes 5 seien, welcher den Stral 1 in a trifft.

Ziehe aus b zu 1 die Zeile, welche von 34 in gh , von 78 in kl getroffen wird. Ziehe aus g zu 4 die Zeile, welche den Stab 5 in f trifft.

In dem Sechseck duv , fgk sind df , ug , vk Stralen von c , und du , fg Zeilen, uv , gk Zeilen, also (19) dv , fk Zeilen.

Da du , fg oder dh , fg Zeilen sind, so ist (28) $bgh \parallel bfd$.

Da dv , fk oder dl , fk Zeilen sind, so ist (28)

$$bkl \parallel bfd,$$

$$\text{also (30) } bgh \parallel bkl,$$

$$\text{also (42) } 1234 \parallel 1678.$$

46.

Bei Dreistralungen, welche mit dem Bande ihrer Ecken bildhafte Vierstralungen machen, sind die drei Ecken stabhaft.

Die Dreistralungen seien 234, 678, das Band ihrer Ecken uv sei 1, und es sei

$$1234 \parallel 1678.$$

Es seien die Ecken $26 = b$, $37 = c$. Ziehe aus b zu 1 die Zeile, welche von 3, 4, 7, 8 in g , h , k , l getroffen wird, so ist (42)

$$bgh \parallel bkl.$$

Der Stral 4 treffe den Stab $bc = 5$ in d . Ziehe aus g zu 4 die Zeile, welche den Stab 5 in f trifft, so ist (28)

$$bgh \parallel bfd,$$

$$\text{also (30) } bfd \parallel bkl,$$

$$\text{also (27) } dl, fk \text{ Zeilen, wo } vl = 8.$$

In dem Sechseck duv , fgk sind df , ug , vk Stralen von c , und du , fg Zeilen, uv , gk Zeilen, also (19) dv , fk Zeilen.

Also (1) fallen dl , dv zusammen, also ist d eine Ecke des Strals $vl = 8$.

Aber die Ecke $45 = d$.

Also sind die Ecken 26, 37, 48 stabhaft.

47.

Stabhafte Vierstralungen sind bildhaft.

Die Ecken der Vierstralungen 1234, 5678 seien u , v ,

es seien $15 = a$, $26 = b$, $37 = c$, $48 = d$ Ecken eines Stabes 9.

Es sei f eine beliebige Ecke des Stabes 9. Aus f seien Zeilen zu 15 gezogen, welche die Stralen 234 in ghk , die Stralen 678 in lmn treffen. Hier sind:

In dem Sechseck auv , fgl , welches in b stralenhaft, au , fg Zeilen, av , fl Zeilen, also (19) uv , gl Zeilen.

In dem Sechseck auv , fhm , welches in c stralenhaft, au , fh Zeilen, av , fm Zeilen, also (19) uv , hm Zeilen.

In dem Sechseck auv , fkn , welches in d stralenhaft, au , fk Zeilen, av , fn Zeilen, also (19) uv , kn Zeilen.

Also sind gl , hm , kn Zeilen, also (28)

$ghk \parallel lm$,
also (42) $1234 \parallel 5678$.

48.

Bei bildhaften Vierstralungen, deren drei Bildecken stabhaft sind, liegt die vierte Bildecke in demselben Stabe.

Es sei an den Ecken u , v

$1234 \parallel 5678$,

$15 = a$, $26 = b$, $37 = c$, $48 = d$.

Es seien abc stabhaft, ihr Stab sei 9. Es sei f eine beliebige Ecke des Stabes 9. Aus f seien Zeilen zu 15 gezogen, welche die Stralen 234 in ghk , die Stralen 678 in lmn treffen. Hier sind:

In dem Sechseck auv , fgl , welches in b stralenhaft, au , fg Zeilen, av , fl Zeilen, also (19) uv , gl Zeilen.

In dem Sechseck auv , fhm , welches in c stralenhaft, au , fh Zeilen, av , fm Zeilen, also (19) uv , hm Zeilen.

Also gl , hm Zeilen. Aber $1234 \parallel 5678$, also (42)

$ghk \parallel lm$.

Also (27) kn die Zeile zu gl , hm . Also uv , kn Zeilen, au , fk Zeilen, av , fn Zeilen, also (20) af , uk , vn oder af , 4, 8 Stralen einer Ecke. Aber $48 = d$ und $af = 9$. Also liegt die vierte Ecke in dem Stabe 9 der drei Ecken 15, 26, 37.

49.

Wenn bei Vierstralungen die Wechselbänder Stralen einer Ecke sind, so sind die Vierstralungen bildhaft.

Die Vierstralungen seien 1234, 5678. Es seien die Ecken:

$$\begin{aligned} 15 &= f, & 25 &= g, & 35 &= h, & 45 &= k, \\ & & 16 &= l, & 17 &= m, & 18 &= n. \end{aligned}$$

Es seien die Wechselbänder:

$$\begin{aligned} 1625 &= lg = b, & 1735 &= mh = c, \\ & & 1845 &= nk = d. \end{aligned}$$

Es seien die Wechselbänder bcd Stralen einer Ecke t . Es sei der Stral $tf = a$. Dann sind die Vierstralungen 1234, $abcd$ stabhaft in $fghk$, die Vierstralungen 5678, $abcd$ stabhaft in $flmn$, also (47)

$$\begin{aligned} &1234 \parallel abcd, & 5678 \parallel abcd, \\ \text{also (44)} &1234 \parallel 5678. \end{aligned}$$

Die Ecke t der Wechselbänder 1625, 1735, 1845 heisst die *Bildungsecke*.

50.

Bei bildhaften Vierstralungen sind die Wechselbänder Stralen einer *Bildungsecke*.

Es sei $1234 \parallel 5678$.

Es seien die Ecken

$$\begin{aligned} 15 &= f, & 25 &= g, & 35 &= h, & 45 &= k, \\ & & 16 &= l, & 17 &= m, & 18 &= n. \end{aligned}$$

Es seien die Wechselbänder

$$1625 = lg = b, \quad 1735 = mh = c.$$

Es sei die Ecke $bc = t$, die Stralen $tf = a$, $tk = d$. Die Vierstralungen 1234, $abcd$ sind in $fghk$ stabhaft, also (47)

$$\begin{aligned} &1234 \parallel abcd, \\ &\text{aber } 1234 \parallel 5678, \\ \text{also (44)} &abcd \parallel 5678. \end{aligned}$$

Aber die Ecken $a5 = f$, $b6 = l$, $c7 = m$ sind stabhaft. Also (48) liegt die Ecke $d8$ in dem Stabe $flm = l$. Also liegt die Ecke $18 = n$ in $tk = d$.

Also liegt die Ecke t in dem Wechselbände $nk = 1845$. Also sind die Wechselbänder 1625, 1735, 1845 Stralen der *Bildungsecke* t .

51.

Wenn zwei Vierstralungen an zwei Stralen einer Bildecke eine gemeinsame Vierstralung haben, so sind sie bildhaft.

Bei den Vierstralungen 1234, 5678 sei $15 = f$ die Ecke zweier Stäbe, welche von 1234 in $fghk$, von 5678 in $flmn$ getroffen werden. Es seien $gl = b$, $hm = c$, $kn = d$ Stralen einer Ecke t . Es sei $tf = a$. Dann sind 1234, $abcd$ in $fghk$, ferner 5678, $abcd$ in $flmn$ stabhaft. Also (47)

$$1234 \parallel abcd, \quad abcd \parallel 5678,$$

$$\text{also (44) } 1234 \parallel 5678.$$

52.

Bildhafte Vierstralungen haben an zwei beliebigen Stralen einer Bildecke eine gemeinsame Vierstralung.

Es sei $1234 \parallel 5678$.

Aus $15 = f$ seien zwei beliebige Stralen gezogen, welche von 1234 in $fghk$, von 5678 $flmn$ getroffen werden. Es sei $lg = b$, $mh = c$, $bc = t$, $tf = a$, $tk = d$, so sind 1234, $abcd$ in $fghk$ stabhaft. Also (47)

$$1234 \parallel abcd.$$

$$\text{Aber } 1234 \parallel 5678,$$

$$\text{also (44) } 5678 \parallel abcd.$$

Aber $a5 = f$, $b6 = l$, $c7 = m$ sind stabhaft, also (48) liegt $d8 = n$ in dem Stabe flm . Also ist nk ein Stral von t . Also sind lg , mh , nk Stralen einer Ecke.

53.

Zwei Stabvierecke heissen bildhaft, wenn sie bildhaften Vierstralungen entsprechen.

54.

Wenn bei Stabvierecken die Wechselecken stabhaft sind, so sind sie bildhaft. Der Stab der Wechselecken heisst der Bildungsstab.

Bei den Stabvierecken 1234, 5678, wo die Zeichen Ecken bedeuten, seien die Wechselecken $1625 = b$, 1735

$= c$, $1845 = d$ in einem Bildungsstabe B . Das Band 15 treffe denselben in a .

Die aus 1 nach $abcd$, aus 5 nach $abcd$ gehenden Vierstralungen sind in $abcd$ stabhaft, also (45) bildhaft. Also sind die aus 1 nach 5678, aus 5 nach 1234 gehenden Stralungen bildhaft.

Es seien u , v zwei beliebige Ecken. Die aus 1 nach 5678, aus v nach 5678 gehenden Stralungen sind in 5678 stabhaft, also (47) bildhaft. Die aus 5 nach 1234, aus u nach 1234 gehenden Stralungen sind in 1234 stabhaft, also (47) bildhaft. Also (44) sind die aus u nach 1234, aus v nach 5678 gehenden Stralungen bildhaft. Also (53) sind die Stabvierecke 1234, 5678 bildhaft, d. h.

$$1234 \vdash 5678.$$

55.

Bei bildhaften Stabvierecken liegen die Wechselecken in einem Bildungsstabe.

Es sei $1234 \vdash 5678$.

Also (53) entsprechen diese Stabvierecke bildhaften Vierstralungen. Also sind die aus 5 nach 1234, aus 1 nach 5678 gehenden Stralungen bildhaft.

Es seien die Wechselecken

$$1625 = b, 1735 = c, 1845 = d.$$

Der Stab $bc = B$ werde von 15 in a getroffen.

Also machen die aus 5 nach 234, aus 1 nach 678 gehenden Dreistralungen mit dem Bande ihrer Ecken 15 bildhafte Vierstralungen.

Also (46) liegt die dritte Bildecke $1845 = d$ in dem Stabe B .

56.

Stralenhafte Stabvierecke sind bildhaft.

Bei den Stabvierecken 1234, 5678 seien die Bildbänder 15, 26, 37, 48 Stralen einer Ecke u , so heissen diese Stabvierecke stralenhaft.

Sie entsprechen alsdann einer und derselben Vierstralung und sind also (53) bildhaft.

57.

Wenn bei bildhaften Stabvierecken drei Bildbänder Stralen einer Ecke sind, so ist das vierte Bildband ein Stral derselben Ecke.

Es sei $1234 \parallel 5678$, so entsprechen diese Stabvierecke (53) bildhaften Vierstralungen. Es seien nun 15, 26, 37 Stralen einer Ecke w , so sind die von u nach 1234, 5678 gehenden Vierstralungen bildhaft. Aber die Stralen $u1$, $u5$, ferner $u2$, $u6$, ferner $u3$, $u7$ fallen zusammen. Also (42) fallen die Stralen $u4$, $u8$ zusammen. Also ist das Bildband 48 ein Stral von u .

58.

Wenn zwei bildhafte Stabvierecke in der Ecke ihrer Stäbe ein gemeinsames Bild haben, so sind die drei andern Bildbänder Stralen einer Ecke.

Es sei $1234 \parallel 5674$, und 4 die gemeinsame Ecke der Stäbe. Es sei die Ecke $1526 = u$, so sind (53) die von u nach 1234, 5674 gehenden Vierstralungen bildhaft. Aber die Stralen $u1$, $u5$, ferner $u2$, $u6$, ferner $u4$, $u4$ fallen zusammen. Also (42) fallen die Stralen $u3$, $u7$ zusammen. Also ist das Bildband 37 ein Stral der Ecke u .

59.

Wenn zwei Stabvierecke einem dritten bildhaft sind, so sind sie einander bildhaft.

Es seien die Stabvierecke

$$1234 \parallel abcd, \quad 5678 \parallel abcd.$$

Es seien u, v, t drei beliebige Ecken und die aus u nach 1234, aus v nach 5678, aus t nach $abcd$ gehenden Vierstralungen durch U, V, T bezeichnet, so ist (53)

$$U \parallel T, \quad V \parallel T,$$

$$\text{also (44) } U \parallel V,$$

$$\text{also (53) } 1234 \parallel 5678.$$

60.

Stabvierecke sind bildhaft, wenn sie aus zwei Ecken eines Bildbandes ein gemeinsames Stabdreieck haben.

Bei den Stabvierecken 1234, 5678 seien u, v Ecken

von 15, und es seien die Ecken $u_2v_6 = b$, $u_3v_7 = c$, $u_4v_8 = d$ stabhaft. Dieser Stab treffe das Band 15 in a , so sind die aus u nach 234, aus v nach 678 gehenden Dreistralungen in bcd stabhaft. Also (45) machen sie mit dem Bande ihrer Ecken $uv = 15$ bildhafte Vierstralungen. Also ist (53)

$$1234 \vdash 5678.$$

61.

Bildhafte Stabvierecke haben aus zwei beliebigen Ecken eines Bildbandes ein gemeinsames Stabdreieck.

Es sei $1234 \vdash 5678$.

Man nehme auf dem Bildbande 15 zwei beliebige Ecken u, v an. Es seien die Ecken $u_2u_6 = b$, $u_3v_7 = c$, $u_4v_8 = d$, so machen die aus u, v nach bcd gehenden Dreistralungen mit dem Bande ihrer Ecken 15 bildhafte Vierstralungen. Also (46) bcd stabhaft.

62.

Einem Stabvierecke entspricht ein bildhaftes Stabdreieck.

Das Stabviereck sei 1234. Aus einer beliebigen Ecke u ziehe Stralen nach 1234, zu u_4 ziehe die Zeile, welche von u_1, u_2, u_3 in abc getroffen wird, so ist (56)

$$1234 \vdash abc\infty.$$

Das Zeichen der zeilenhaften Lage oder des Durchschnits im Unendlichen ist ∞ .

63.

Zweien bildhaften Stabvierecken entspricht ein beiden bildhaftes Stabdreieck.

Es sei $1234 \vdash 5678$.

Ziehe aus 4, 8 Zeilen in beliebiger Richtung, welche das Band 15 in u, v treffen. Es sei die Ecke $u_2v_6 = b$. Ziehe aus b zu u_4, v_8 die Zeile, welche die Stralen u_1, u_3 in a, c trifft, so ist (56)

$$1234 \vdash abc\infty,$$

$$\text{also (59) } 5678 \vdash abc\infty.$$

Aber a_5, b_6, ∞_8 sind Stralen der Ecke v . Also

(57) $c7$ ein Stral von v . Das Stabdreieck abc ist also den bildhaften Stabvierecken 1234, 5678 bildhaft.

64.

Zwei bildhafte Stabvierecke sind einander auf vierfache Art bildhaft.

Ein Stabviereck ist sich selbst auf vierfache Art bildhaft.

Es sei 1234 $\dagger$ 5678,
so ist (53) die aus einer beliebigen Ecke u nach 1234 gehende Stralung der aus einer beliebigen Ecke v nach 5678 gehenden Stralung bildhaft. Aber (43) die aus v nach 5678 gehende Stralung ist den aus v nach 6587, 7856, 8765 gehenden Stralungen bildhaft.

Wenn also die Stabvierecke

1234 $\dagger$ 5678,
so sind auch 1234 $\dagger$ 6587,
1234 $\dagger$ 7856,
1234 $\dagger$ 8765.

Auch bleibt die Bildgleichung gültig, wenn die Bilder auf gleiche Art versetzt werden:

1324 $\dagger$ 5768, 1342 $\dagger$ 5786 u. s. w.,
2134 $\dagger$ 6578, 2341 $\dagger$ 6758 u. s. w.

Auch folgt hieraus, dass ein Stabviereck sich selbst auf vierfache Art bildhaft ist:

1234 $\dagger$ 1234,
1234 $\dagger$ 2143,
1234 $\dagger$ 3412,
1234 $\dagger$ 4321.

65.

Wenn bei verbundenen Dreiecken die aus den beiden Ecken einer Querseite beliebig gezogenen Zeilen von den beiden andern Querseiten bildhaft geschnitten werden, so machen die verbundenen Dreiecke ein stralenhaftes Sechseck.

Die Dreiecke seien 123, 567.

Sie heissen *verbunden*, wenn die Seiten 23, 31, 12 Stralen der Ecken 5, 6, 7 sind. Alsdann heissen 15, 26, 37 die *Querseiten*. Zwei aus 1, 5 beliebig gezogenen

Zeilen seien A, B . Es werde A von den Querseiten 26, 37 in a, b getroffen.

Es werde B von den Querseiten 26, 37 in c, d getroffen.

Wenn nun $1ab \parallel 5cd$,
so sind (32) 15, ac, bd oder 15, 26, 37 Stralen einer Ecke 4.

Wenn als Sonderfall B in 23 fällt, also A die Zeile zu 23 ist, so fällt c in 2, d in 3. Alsdann ist das Sechseck 123, 567 in 4 stralenhaft, wenn
 $1ab \parallel 523$.

66.

Wenn eine Vierstrahlung oder ein Stabviereck sich selbst bei verwechselter Folge der Theile eines Gliedes bildhaft ist, so heisst die Vierstrahlung oder das Stabviereck eine Gleichmessung.

Eine Gleichmessung besteht aus zwei Gliedern, jedes Glied aus zwei Theilen, welche Stralen oder Ecken sind: der eine Theil heisst der Wendestral oder die Spitze des andern.

Auf einen Theil eines Gliedes folgt ein Theil des andern Gliedes.

Es seien also 12, 34 die beiden Glieder einer Gleichmessung, wo die Zeichen Stralen einer Ecke oder Ecken eines Stabes bedeuten.

Bei Ecken heisst:

1	die Spitze von	2,
2	„	1,
3	„	4,
4	„	3.

Bei Stralen heisst:

1	der Wendestral von	2,
2	„	1,
3	„	4,
4	„	3.

Wenn 1234 Ecken eines Stabes sind und aus einer beliebigen Ecke nach 1234 die Stralen 1'2'3'4' gezogen werden, so heisst:

1' der Wendestral von 2, 2 ie Spitze von 1',
 2' „ „ „ 1, 1 „ „ 2',
 3' „ „ „ 4, 4 „ „ 3',
 4' „ „ „ 3, 3 „ „ 4'.

Es seien nun 1234 Ecken eines Stabes oder Stralen einer Ecke, so ist, wenn 12, 34 die beiden Glieder einer Gleichmessung sein sollen, vermöge der obigen Erklärung

$$1234 \dashv\dashv 1243.$$

Aber eine Vierstrahlung oder ein Stabviereck sind sich selbst auf vierfache Art bildhaft (43, 64), also ist auch

$$1234 \dashv\dashv 2134,$$

$$1234 \dashv\dashv 4312,$$

$$1234 \dashv\dashv 3421.$$

Die Folge der Theile einer Gleichmessung ist also

$$1324 \text{ oder } 1423,$$

$$2413 \text{ oder } 2314,$$

$$3241 \text{ oder } 3142,$$

$$4132 \text{ oder } 4231.$$

67.

Eine Gleichmessung entspricht einem gleichmessenden Stabdreieck.

Ein gleichmessendes Stabdreieck entspricht einer Gleichmessung.

Wenn ein Glied einer Gleichmessung und ein Theil des andern Gliedes gegeben sind, so ist für den zweiten Theil nur ein Werth möglich.

Bei einer Gleichmessung entsprechen die Theile des einen Gliedes den Seiten, die Theile des andern Gliedes den Querseiten einer Zeilung oder eines zeilenhaften Vierecks.

Es seien 12, 34 die Glieder einer gleichmessenden Vierstrahlung, deren Ecke a sei. Ziehe zu dem Strale 1 die Zeile, welche von den Stralen 234 in bcd getroffen wird. Da (66)

$$1234 \dashv\dashv 1243,$$

$$\text{so ist (42) } bcd \dashv\dashv bdc,$$

$$\text{also (39) } bc = bd.$$

Also entspricht die gleichmessende Vierstrahlung einem gleichmessenden Stabdreieck cbd .

Es seien 12, 34 die Glieder eines gleichmessenden Stabvierecks. Ziehe aus einer beliebigen Ecke a zu den Ecken 1234 die Stralen 1234.

Da bei dem Stabviereck (66)

$$1234 \parallel 1243,$$

so ist auch bei der Vierstrahlung (53)

$$1234 \parallel 1243.$$

Ziehe zu dem Strale 1 die beliebige Zeile, welche von den Stralen 234 in bcd getroffen wird, so erhellet wie oben, dass $bc = bd$. Also entspricht das gleichmessende Stabviereck 12, 34 einem gleichmessenden Stabdreieck cbd .

Ebenso erhellet umgekehrt, dass jedem gleichmessenden Stabdreieck cbd eine Schaar gleichmessender Vierstrahlungen und gleichmessender Stabvierecke entspricht.

Wenn zwei Ecken eines gleichmessenden Stabdreiecks cbd gegeben sind, so ist für die dritte Ecke nur ein Ort möglich (1).

Wenn also ein Glied einer Gleichmessung und ein Theil des andern Gliedes gegeben sind, so ist für den zweiten Theil, Stral oder Ecke nur eine einzige Lage möglich.

Wenn bei der gleichmessenden Vierstrahlung 12, 34 auf dem Stral 2 die Abschnitte $bf = ab$, auf dem Stral 1 die Abschnitte $ag = ah = cd$, auf dem Stral 3 die Abschnitte $ak = ac$, auf dem Stral 4 die Abschnitte $al = ad$, so sind (3) $acfd$, $acgl$, $adhk$, $cdkl$ Zeilungen, deren Seiten dem einen, deren Querseiten dem andern Gliede der Gleichmessung entsprechen.

Wenn auf 2 die Ecke m beliebig, und 3 von dm in o , 4 von cm in p getroffen wird, so ist (15) op die Zeile zu cb und wird von 2 in n gleichmessend getheilt.

68.

Einer gleichmessenden Vierstrahlung entspricht ein gleichmessendes Stabviereck.

Einem gleichmessenden Stabviereck entspricht eine gleichmessende Vierstrahlung.

Alle gleichartige Gleichmessungen sind einander bildhaft.

Es sei in der Ecke a 12, 34 eine gleichmessende Vierstrahlung, so ist (66)

1234 $\dagger$ 1243.
Die Stralen 1234 werden von einem Stabe in 1234 getroffen.

Bildhaften Vierstralungen entsprechen (53) bildhafte Stabvierecke, also ist auch bei dem Stabviereck

1234 $\dagger$ 1243.

Also (66) 12, 34 ein gleichmessendes Stabviereck.

Es sei umgekehrt das Stabviereck 12, 34 gleichmessend. Aus einer beliebigen Ecke a seien nach den Ecken 1234 die Stralen 1234 gezogen.

Da bei dem Stabviereck (66)

1234 $\dagger$ 1243,

und da (53) bildhafte Stabvierecke diejenigen heissen, welche bildhaften Vierstralungen entsprechen, so ist auch bei der Vierstralung

1234 $\dagger$ 1243.

Also (66) 12, 34 eine gleichmessende Vierstralung.

Es seien in den Ecken a, f zwei gleichmessende Vierstralungen 12, 34 und 56, 78, so dass (66)

1234 $\dagger$ 1243, 5678 $\dagger$ 5687.

Zu den Stralen 1, 5 seien beliebige Zeilen gezogen, welche von den Stralen 234, 678 in bcd, ghk getroffen werden, so sind (67) die Stabdreiecke $cbd, h g k$ gleichmessend,

also (8) $bcd \dagger ghk$,

also (42) 1234 $\dagger$ 5678,

also auch 1243 $\dagger$ 5678 u. s. w. (66).

Also sind alle gleichmessende Vierstralungen einander bildhaft.

Es seien 12, 34 und 56, 78 gleichmessende Stabvierecke, so dass (66)

1234 $\dagger$ 1243, 5678 $\dagger$ 5687.

Aus beliebigen Ecken a, f seien nach den Ecken 1234, 5678 die Stralen 1234, 5678 gezogen. Da (53) bildhafte Stabvierecke diejenigen sind, welche bildhaften Vierstralungen entsprechen, so ist auch bei diesen

1234 $\dagger$ 1243, 5678 $\dagger$ 5687.

Aber, wie so eben gezeigt, ist bei den Vierstralungen 1234 $\dagger$ 5678, also auch (53) bei den Stabdreiecken

1234 $\dagger$ 5678,

und (66) 1243 $\dagger$ 5678 u. s. w.

Also sind alle gleichmessenden Stabvierecke einander bildhaft.

69. Bildhaften Vierstrahlungen entsprechen (68) bildhafte Stabvierecke, also ist auch bei dem Stabvier-

In einer Vierseitung machen zwei Stralen das eine Glied, ihre beiden Querstralen das andere Glied einer Gleichmessung.

In einem Viereck machen zwei Ecken das eine Glied, die beiden Querecken das andere Glied einer Gleichmessung.

Eine Vierseitung oder ein Viereck hat neun Gleichmessungen.

In g seien 123, und es sei 12 das eine Glied einer Gleichmessung.

In 3 sei f beliebig, und in f seien 6, 7 beliebig. Es seien

$$16 = a, 27 = b, 17 = c, 26 = d,$$

$$abcd = h, gh = 4, fh = 8.$$

Bei der Vierseitung heissen f, g die *Hauptecken*, 67, 12 ihre Stralenpaare, a, b, c, d die *Nebenecken*, ab, cd die *Gegenseiten*, h die *dritte Hauptecke*, die von einer Hauptecke zu den beiden andern gezogenen Stralen 3, 4 die *Querstralen*.

Bei dem Viereck heissen f, g die *Hauptseiten*, 67, 12 ihre *Bänder*, a, b, c, d die *Nebenseiten*, ab, cd die *Gegenecken*, h die *dritte Hauptseite*, die Ecken 3, 4, in welchen eine Hauptseite von den beiden andern getroffen wird, die *Querecken*.

Nun sind (47, 56)

$$\text{an } aboh \quad 1234 \quad ++ \quad 6738,$$

$$\text{an } dcph \quad 2134 \quad ++ \quad 6738,$$

$$\text{also (44, 59) } 1234 \quad ++ \quad 2134,$$

$$\text{also (66) } 12, 34 \text{ eine Gleichmessung.}$$

Wenn aber ein Glied einer Gleichmessung und ein Theil des andern Gliedes gegeben sind, so ist für den zweiten Theil dieses Gliedes nur eine einzige Lage möglich (67). Also folgt aus jeder beliebigen Annahme von $f, 6, 7$ immer dieselbe Lage von 4. Jeder gleichmessenden Vierstrahlung entspricht ein gleichmessendes Stabviereck, und umgekehrt (68). Also enthält die Vierseitung

oder das Viereck neun gleichmessende Vierstralungen und Stabvierecke, nämlich:

$fk, ad,$	$fl, bc,$	$gh, kl,$
$gm, ac,$	$gn, bd,$	$hf, mn,$
$ho, ab,$	$hp, cd,$	$fg, op.$

Zweiter Beweis.

Es sei ghk ein beliebiges Stabviereck, gc, hc zwei beliebige Stralen, welche von einem beliebigen aus k gezogenen Stral in a, d getroffen werden. Die Ecken $gdha = b, bcad = f, bcgh = l$.

Ziehe aus a zu gh die Zeile aq an gd , aus a zu fh die Zeile ar an fc .

Da das Sechseck $gf'h, gra$ in b stralenhaft, so sind (19) fg, qr Zeilen.

Ziehe aus c zu gh die Zeile cs an gd , aus c zu fh die Zeile ct an fd .

Da das Sechseck $gf'h, stc$ in d stralenhaft, so sind (19) fg, st Zeilen.

In dem Sechseck gra, stc sind also aq, cs Zeilen, ar, ct Zeilen, qr, st Zeilen. Also (20) ac, qs, rt Stralen einer Ecke.

Aber ac, qs sind Stralen von g , also ist rt ein Stral von g .

Wenn also die Ecke $arfg = u$, so ist (15) aur ein gleichmessendes Stabdreieck.

Wenn die Ecke $aqfg = v$, so sind qr, uv Zeilen, also (28) avq ein gleichmessendes Stabdreieck.

Es sei also die Ecke $csfg = w$, so ist (31) cws ein gleichmessendes Stabdreieck.

Ebenso erhellet, wenn cs von ha, hf in x, y getroffen wird, so ist cyx ein gleichmessendes Stabdreieck.

Dritter Beweis.

Ziehe aus b, c zu gh Zeilen, welche von gc, hc, ad in 1, 2, 3, von gd, fg, ha, hf, ad in s, w, x, y, z getroffen werden, so ist (31)

aus a 1b3 ++ ghk ,

aus d ghk ++ scz ,

also (36) 1b3 ++ scz ,

also (32) $s1, cb, z3$ Stralen einer Ecke.

Aber cb , $z3$ oder cb , ad Stralen von f . Also $s1$ ein Stral von f .

Also (15) cws ein gleichmessendes Stabdreieck.

Ferner (31)

aus d $2b3$ $++$ hgk ,

aus a hgk $++$ xcz ,

also (36) $2b3$ $++$ xcz ,

also (32) $x2$, cb , $z3$ Stralen einer Ecke.

Also $x2$ ein Stral von f .

Also (15) cyx ein gleichmessendes Stabdreieck.

70.

Einen Stab in gleichmessender Folge zu theilen.

Aus einer beliebigen Ecke a ziehe man zu $u1$ die Zeile, welche von den Stralen $u2$, $u3$, $u4$, $u5$, $u6$ in b , c , d , f , g getroffen wird. Wenn die Abschnitte bc , cd , df , fg einander gleich sind, so sind 13, 24, ferner 14, 35, ferner 15, 46 u. s. w. Gleichmessungen (67).

Wenn ab diesen Abschnitten bc , cd , df gleich und ua die Zeile zu 12 ist, so ist:

13 die Hälfte von 12, 34 die Hälfte von 14,

14 das Drittel von 12, 45 das Drittel von 15,

15 das Viertel von 12, 56 das Viertel von 16,

16 das Fünftel von 12 u. s. w.

Es sei das Dreieck $u12$ von einem beliebigen Stabe $12'$ geschnitten, und die Ecken

$v212' = 3'$, $u3'12 = 3$,

$v312' = 4'$, $u4'12 = 4$,

$v412' = 5'$, $u5'12 = 5$ u. s. w.,

so sind $13'$, $2'4'$, ferner $14'$, $3'5'$, ferner $15'$, $4'6'$ u. s. w., also 13, 24, ferner 14, 35, ferner 15, 46 u. s. w. Gleichmessungen.

Wenn $v2'$ die Zeile zu 12, so ist von 12, 13 die Hälfte, 14 das Drittel, 15 das Viertel, 16 das Fünftel, 17 das Sechstel u. s. w.

71.

Durch Gleichmessungen zu zwei Ecken die dritte desselben Stabes, oder zu zwei Stralen den dritten derselben Ecke zu bestimmen.

I.

Es seien g, h gegeben, und h' sei so zu bestimmen, dass h' in $gh = 4$ liege. Man nehme 1, 2 in g beliebig, und bestimme 3 so, dass 12, 34 eine Gleichmessung sei, nach (69). Man nehme also in h 8, 9 beliebig, so ergeben sich $1928 = 6$, $1829 = 7$, $67 = f$ und $fg = 3$.

Man nehme nun f' in 3 beliebig, $6', 7'$ in f' beliebig, so ergeben sich $17'26' = 8'$, $16'27' = 9'$, $8'9' = h'$. Dann liegt h' in 4, also in gh .

II.

Als Sonderfall kann man f' in 38 annehmen. Dann wird $8 = 7'$, $1638 = 6'$, $6 = 9'$, $1826' = 8'$, $8'9' = 8'6' = h'$. Auf diese Weise lassen sich unzählige Bestimmungen für h' machen.

III.

Eine zweite Auflösung ist folgende: Man nehme in g beliebig 12, in h beliebig 89. Es seien $19 = a$, $28 = d$, $29 = b$, $18 = c$, $ad = 6$.

Man nehme a' in 6 beliebig. Dann sei $ca' = 1'$, $ba' = 9'$, $21' = g'$, $89' = h'$, $bcg'h' = l$, so liegt l in gh .

Denn wenn $dl = 7$, so ist 28, 67 sowohl aus b, c, g, h als aus b, c, g', h' eine Gleichmessung.

72.

<i>Jede Ecke eines Vierecks kann als Lichtecke zweier verbundenen Dreiecke angesehen werden.</i>	<i>Jede Seite einer Vierecksseitung kann als Lichtstab zweier verbundenen Dreiecksseiten angesehen werden.</i>
--	--

<i>Der Lichtecke entspricht ein Lichtstab, in welchem die Ecken der drei Paare Gegenseiten der verbundenen Dreiecke liegen.</i>	<i>Dem Lichtstabe entspricht eine Lichtecke, in welcher die Bänder der drei Paare Gegenecken der verbundenen Dreiecksseiten liegen.</i>
---	---

<i>Auf jeder Seite des umschriebenen Dreiecks steht durch die Ecke des</i>	<i>In jeder Ecke der eingeschriebenen Dreiecksseite entsteht durch die Seite der</i>
--	--

*eingeschriebenen und den umschriebenen und die Licht-
Lichtstab eine Gleichmes- ecke eine Gleichmessung.
sung.*

Das Viereck oder die Vierseitung sei 1234.

Die Lichtecke oder der Lichtstab sei 4. Es sei 4123
= 5, 4231 = 6, 4312 = 7,

$$2367 = k, \quad 1357 = l, \quad 1256 = m,$$

$$kl15 = t, \quad kl26 = u, \quad kl37 = v.$$

Also (47, 56)

$$\text{an } k \quad 2u64 \quad \vdash \quad 3v74,$$

$$\text{an } l \quad 1t54 \quad \vdash \quad 3v74,$$

$$(44, 59) \quad 2u64 \quad \vdash \quad 1t54,$$

$$\text{also (46, 58) } tu \text{ in } 1256 = m,$$

$$\text{aber } tu \text{ in } kl,$$

$$\text{also } m \text{ in } kl.$$

Also *klm* der Lichtstab oder die Lichtecke von 4.

Hieraus folgt:

In 123, 567 sind 15, 26, 37 in 4, und $2367 = k$,
 $1357 = l$, $1256 = m$ stabhaft oder stralenhaft in *d*.

In 234, 765 sind 27, 36, 45 in 1, und $2367 = k$,
 $2457 = o$, $3456 = p$ stabhaft oder stralenhaft in *a*.

In 341, 567 sind 35, 46, 17 in 2, und $1357 = l$,
 $3456 = p$, $1467 = n$ stabhaft oder stralenhaft in *b*.

In 412, 765 sind 47, 16, 25 in 3, und $1256 = m$,
 $1467 = n$, $2457 = o$ stabhaft oder stralenhaft in *c*.

Auch folgen aus (69) die Gleichmessungen

$$k5, 23, \quad l6, 31, \quad m7, 12,$$

$$n5, 14, \quad o6, 24, \quad p7, 34.$$

73.

*Bei zwei Stabdreiecken Bei zwei Dreistralun-
liegen je drei von den acht- gen liegen je drei von den
zehn Bändecken in einem achtzehn Eckbändern in ei-
Bildungsstabe. ner Bildungsecke.*

In *u* seien 123.

In *v* seien 567.

Es seien $1625 = m$, $1735 = l$, $2736 = k$,

$$u^n = n, \quad 1635 = o, \quad 2536 = p,$$

$$\text{so ist (47, 56) an 1 } 5lo3 \quad \vdash \quad 576n,$$

$$\text{an 2 } pk63 \quad \vdash \quad 576n,$$

also (44, 59) $5lo3 \parallel pk63$,

also (46, 58) kl in $o65p = m$.

Also sind k, l, m stabhaft oder stralenhaft. Da drei Zeichen sechs Versetzungen haben, so ergeben sich sechs Bildungsstäbe oder Bildungsecken. Ihre Ecken oder Strahlen sind:

I.	1526,	1736,	2735,
II.	1527,	1637,	2635,
III.	1625,	1735,	2736,
IV.	1627,	1537,	2536,
V.	1725,	1635,	2637,
VI.	1726,	1536,	2537.

Der eine dieser Sätze folgt auch aus dem andern. Denn man bezeichne:

$$u = 1', \quad 35 = 2', \quad 36 = 3',$$

$$27 = 6', \quad v = 5', \quad 17 = 7',$$

$$\text{so ist } 1'6' = 2, \quad 1'7' = 1, \quad 2'5' = 5, \quad 3'5' = 6,$$

$$\text{also } 1'6'2'5' = 25, \quad 1'7'3'5' = 16.$$

$$\text{Setzt man noch } 3'6' = k, \quad 2'7' = l,$$

$$\text{so ist } 3'6'2'7' = kl.$$

Da nun nach einem der beiden Sätze:

$$1'6'2'5', \quad 1'7'3'5', \quad 2'7'3'6'$$

stabhaft oder stralenhaft, so gilt dasselbe für 25, 16, kl .

Also $1625 = m$ liegt in kl .

74.

Bei bildhaften Vierstrahlen liegen in jeder der ecken liegen in jedem der vier Bildungsecken sechs vier Bildungsstäbe sechs Eckbänder. Bei bildhaften Stabvierungen liegen in jeder der ecken liegen in jedem der vier Bildungsecken sechs vier Bildungsstäbe sechs Bandecken.

Es sei $1234 \parallel 5678$, so ist (43, 64) auch $1234 \parallel 6587, 1234 \parallel 7856, 1234 \parallel 8765$.

Jeder Bildgleichung entspricht (50, 55) eine Bildungsecke oder ein Bildungsstab. Die Strahlen oder Ecken derselben sind:

$$\text{I. } 1625, \quad 1735, \quad 1845,$$

$$\text{II. } 1526, \quad 1836, \quad 1746,$$

$$\text{III. } 1827, \quad 1537, \quad 1647,$$

$$\text{IV. } 1728, \quad 1638, \quad 1548.$$

Aber (73) in 1625, 1735 liegt 2736,
in 1625, 1845 liegt 2846,
in 1735, 1845 liegt 3847.

Ebenso für die übrigen. Die vier Bildungsecken oder Bildungsstäbe enthalten demnach die sechs Stralen oder Ecken:

I.	1625,	1735,	1845,	2736,	2846,	3847,
II.	1526,	1836,	1746,	2835,	2745,	3748,
III.	1827,	1537,	1647,	2538,	2648,	3645,
IV.	1728,	1638,	1548,	2637,	2547,	3546.

75.

Ein stralenhaftes Sechseck hat vier Lichtstäbe. In jeder Lichtecke liegen drei der sechs Bänder. Eine stabhafte Sechseck hat vier Lichtecken. In jeder Lichtecke liegen drei der sechs Bänder.

Das Sechseck oder die Sechseckung sei 123, 567, wo 15, 26, 37 in u liegen. Bei dem stralenhaften Sechseck heisst u die Lichtecke dieser Stralen. Bei der stabhaften Sechseckung heisst u der Lichtstab dieser Ecken. Die sechs Bänder oder Eckbänder sind:

$$\begin{aligned} 2736 &= f, & 1735 &= g, & 1625 &= h, \\ 2367 &= k, & 1357 &= l, & 1256 &= m. \end{aligned}$$

Es sei ferner

$$15 = k', \quad 26 = l', \quad 37 = m', \quad kl = q, \quad k'q = a, \quad l'q = b, \quad m'q = c.$$

Alsdann ist (47, 56)

$$\text{an } k \quad 2b6u \quad \text{an } l \quad 1a5u \quad \text{also (44, 59) } 1a5u \quad \text{also (46, 58) } ab = q = kl \text{ in } 1256 = m.$$

$$\text{an } l \quad 1a5u \quad \text{also (44, 59) } 1a5u \quad \text{also (46, 58) } ab = q = kl \text{ in } 1256 = m.$$

$$\text{also (44, 59) } 1a5u \quad \text{also (46, 58) } ab = q = kl \text{ in } 1256 = m.$$

$$\text{also (46, 58) } ab = q = kl \text{ in } 1256 = m.$$

$$\text{Also liegen } k, l, m \text{ in } q.$$

$$\text{Ebenso erhellet der Satz für } kgh, lhf, mfg.$$

Also entsprechen der Lichtecke u vier Lichtstäbe, dem Lichtstabe u vier Lichtecken, nämlich:

I.	2367,	1357,	1256,
II.	2367,	1735,	1625,
III.	1357,	1625,	2736,
IV.	1256,	2736,	1735.

Nun lässt sich der Satz noch weiter ausdehnen:
Bei $lg7$, $mh6$ liegen lm , gh , 67 in k . Also sind stabhaft oder stralenhaft:

$$\begin{aligned} lgmh, g7h6 &= 1, l7m6 = 5, \\ g7h6 &= 1, lhmg = f, l6m7, \\ l7m6 &= 5, lhmg = f, g6h7, \\ g6h7, lgmh, l6m7. \end{aligned}$$

Bei $mh5$, $kf7$ liegen mk , hf , 57 in l . Also sind stabhaft oder stralenhaft:

$$\begin{aligned} mhkf, h5f7 &= 2, m5k7 = 6, \\ h5f7 &= 2, mfkh = g, m7k5, \\ m5k7 &= 6, mfkh = g, h7f5, \\ h7f5, mhkf, m7k5. \end{aligned}$$

Bei $kf6$, $lg5$ liegen kl , fg , 56 in m . Also sind stabhaft oder stralenhaft:

$$\begin{aligned} kflg, f6g5 &= 3, k6l5 = 7, \\ f6g5 &= 3, kglf = h, k5l6, \\ k6l5 &= 7, kglf = h, f5g6, \\ f5g6, kflg, k5l6. \end{aligned}$$

76.

Bei bildhaften Stabvierecken machen die beiden Grenzecken mit den Bildern gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke.

Auf den Stäben U , V seien die Stabvierecke

$$1234 \quad \text{++} \quad 5678.$$

Hierdurch ist (74) der Bildungsstab B gegeben, mit den Ecken:

$$1625, 1735, 1845, 2736, 2846, 3847.$$

Man wähle zwei beliebige Bilder, z. B. 1 und 5, ziehe aus 1 zu V , aus 5 zu U Zeilen, welche B in d , f treffen. Die Stralen $d5$, $f1$ treffen U , V in S , T .

Man wähle zwei andere Bilder, z. B. 2 und 6, ziehe aus 2 zu V , aus 6 zu U Zeilen, welche B in g , h treffen.

Da $d1$, $g2$, 56 Zeilen, und 16 , 25 , dg Stralen einer Ecke k sind, so sind (73) $d5$, 12 , $g6$ Stralen einer Ecke S .

Da $f5$, $h6$, 12 Zeilen und 16 , 25 , fh Stralen einer Ecke k sind, so sind (73) $f1$, 56 , $h2$ Stralen einer Ecke T .

Also giebt jedes der vier Bildpaare 16, 25, 37, 48 dieselben Ecken S , T .

Diese Ecken S , T heissen die Grenzecken der obi-

gen Bildgleichung $1234 \vdash 5678$. Bei den Stabdreiecken $Sd5$, $Tf1$ sind $1d$, $T5$ Zeilen, $1S$, $f5$ Zeilen, also (16) ST , df Zeilen. Also ist das Grenzband ST die Zeile des Bildungsstabes B .

Wenn für irgend zwei der obigen vier Bildpaare, z. B. für 16 und 25 die Stralen $S5$, $S6$ den Bildungsstab B in d , g und die Stralen $T1$, $T2$ ihn in f , h treffen, so sind $d1$, $g2$ Zeilen zu V , $f5$, $h6$ Zeilen zu U . Die Zeile $g2$ werde von den Stralen $S5$, ST in l , m getroffen, so ist (28) $S12 \vdash Sdl \vdash mgl$,

(31) $mgl \vdash T65$, also $S12 \vdash T65$.

Dieselben Schlüsse gelten für jedes Bildpaar.

Also $S12 \vdash T65$, $S13 \vdash T75$, $S14 \vdash T85$,
 $S23 \vdash T76$, $S24 \vdash T86$, $S34 \vdash T87$.

Es seien die Ecken $UV = a$, $UB = b$, $VB = c$, so ist $Sa1 \vdash S5d \vdash T5c$, $Sb1 \vdash T51 \vdash Tfa$, überhaupt also

$Sa1 \vdash T5c$, $Sb1 \vdash T5a$,
 $Sa2 \vdash T6c$, $Sb2 \vdash T6a$,
 $Sa3 \vdash T7c$, $Sb3 \vdash T7a$,
 $Sa4 \vdash T8c$, $Sb4 \vdash T8a$,

Man hat ferner (56) wenn B von 15, 16, 17 in nko getroffen wird, aus den Ecken 5 und 1

$123S \vdash nkod$, $nkod \vdash 567\infty$,

$123\infty \vdash nkof$, $nkof \vdash 567T$.

Also überhaupt

$123S \vdash 567\infty$, $123\infty \vdash 567T$,

$124S \vdash 568\infty$, $124\infty \vdash 568T$,

$134S \vdash 578\infty$, $134\infty \vdash 578T$,

$234S \vdash 678\infty$, $234\infty \vdash 678T$.

Zweiter Beweis.

Es seien die Stralen

aus 1 nach $dfnk$ $d'f'n'k'$,

aus 5 nach $dfnk$ $d''f''n''k''$,

so ist (43) $d'f'k'n \vdash f'd'n'k'$,

(45) $f'd'n'k' \vdash f''d''n''k''$,

also (44) $d'f'k'n' \vdash f''d''n''k''$,

aber V , d' und U , f'' sind Zeilen,

V wird von $f'k'n'$ in $T65$,

U wird von $d''n''k''$ in $S12$ getroffen.

Also (42) $S12 \vdash T65$.

Ebenso ergeben sich die übrigen Bildgleichungen.

77.

Wenn die Grenzecken der Stabvierecke mit den Bildern gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke machen, so sind die Stabvierecke bildhaft.

Es sei

$S12 \vdash T65$, $S13 \vdash T75$, $S14 \vdash T85$.

Ziehe aus 1 zu V , aus 5 zu U Zeilen, welche von den Stralen $S5$, $T1$ in d , f getroffen werden. Bei den Stabdreiecken $Sd5$, $Tf1$ sind $1d$, $T5$ Zeilen, $1S$, $f5$ Zeilen, also (16) ST , df oder ST , B Zeilen.

Also (37) liegen in B

wegen $S12 \vdash T65$ die Ecke 1625,

wegen $S13 \vdash T75$ die Ecke 1735,

wegen $S14 \vdash T85$ die Ecke 1845.

Also (54) $1234 \vdash 5678$.

78.

Bei einer Vierstralung oder bei zwei bildhaften Vierstralungen machen der Grenzstral und je zwei Bilder an den Zeilen der wechselnamigen Grenzstralen gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke.

Wenn diese Stabdreiecke gegenfolgend bildhaft sind, so sind die Vierstralungen bildhaft.

In u sei die Vierstralung 1234. Man ziehe in u zwei beliebige Grenzstralen S , U , der eine heisst der wechselnamige des andern. Man ziehe zu S , U beliebige Zeilen. Die Zeile zu U werde von $S1234$ in $S'1'2'3'4'$, die Zeile zu S von $U1234$ in $S''1''2''3''4''$ getroffen. Man ziehe zu U die Zeile $ab2''$, so ist (31) $S'1'2' \vdash ab2''$ und (28) $ab2'' \vdash ub1'' \vdash S''2''1''$. Also (35)

$S'1'2' \vdash S''2''1''$.

Ebenso erhellet für die übrigen $S'1'3' \vdash S''3''1''$, $S'1'4' \vdash S''4''1''$, $S'2'3' \vdash S''3''2''$ u. s. w.

Es sei in v eine zweite Vierstralung 5678, in v seien zwei beliebige Grenzstralen T , V gezogen, und zu ihnen

zwei beliebige Zeilen. Die Zeile zu V werde von $T5678$ in $T'5'6'7'8'$, die Zeile zu T werde von $V5678$ in $T''5''6''7''8''$ getroffen, so ist aus gleichem Grunde $T'5'6' \dagger T'6''5''$, $T'5'7' \dagger T''7''5''$, $T'5'8' \dagger T''8''5''$ u. s. w.

Es seien nun diese Vierstralungen bildhaft:

$$1234 \dagger 5678,$$

so sind (50) 1625, 1735, 1845 Stralen einer Bildungsecke B .

Man nehme zwischen diesen Grenzstralen eine solche gegenseitige Abhängigkeit an, dass 1VS5, 1TU5 Stralen von B seien, so sind (49)

$$SU12 \dagger VT56, SU13 \dagger VT57,$$

$$SU14 \dagger VT58, SU23 \dagger VT67 \text{ u. s. w.}$$

Also (43) $SU12 \dagger TV65$, $SU13 \dagger TV75$ u. s. w.

Also an den Zeilen von U und V (42) $S'1'2' \dagger T'6'5'$, $S'1'3' \dagger T'7'5'$, $S'1'4' \dagger T'8'5'$, $S'2'3' \dagger T'7'6'$ u. s. w.

Umgekehrt, wenn diese Bildgleichungen gelten, so sind $SU12 \dagger VT56$, $SU13 \dagger VT57$, $SU14 \dagger VT58$ u. s. w.

Also 1625, 1735, 1845 Stralen der Ecke der Bänder $S5V1$, $U5T1$.

Also (49)

$$1234 \dagger 5678.$$

Wenn die Grenzstralen S , T so bestimmt werden, dass sie zu ihren wechselnamigen Grenzstralen U , V lothhaft sind, so hängen die bildhaften Stabdreiecke nur von der Grösse der Neigungen ab, welche der Grenzstral S mit den Stralen 1234 und der Grenzstral T mit den Stralen 5678 bildet.

79.

Bei zwei stralenhaften Eckfügungen bildet jedes Paar entsprechender Dreiecke ein stralenhaftes Sechseck, welchem vier Lichtstäbe zugehören, jeder mit drei Ecken.

Bei zwei stabhaften Stralfügungen bildet jedes Paar entsprechender Dreiseitungen eine stabhafte Sechseitung, welcher vier Lichtecken zugehören, jede mit drei Stralen.

Die Fügungen seien 1234, 1'2'3'4', wo die Zeichen

Ecken oder Stäbe bedeuten, so dass 11', 22', 33', 44' u. s. w. in u stralenhaft oder stabhaft sind. Dann sind

123, 1'2'3',
124, 1'2'4',
134, 1'3'4',
234, 2'3'4' u. s. w.

stralenhafte Sechsecke oder stabhafte Sechseckungen, für welche der Satz (75) gilt.

80.

Wenn in ein Eckpaar einer Vierseitung ein drittes Stralenpaar gelegt wird, so erhält jede Ecke einer Seite und Gegenseite vier neue Stralen.
Wenn in ein Stralenpaar eines Vierecks ein drittes Eckpaar gelegt wird, so erhält jedes Band einer Ecke vier neue Ecken.

In u seien 1, 2, in v seien 5, 6. Es sei $15 = b$, $26 = c$, $uv = 4$, $bc = 8$. Es sei $48 = a$, $25 = d$, $1b = f$. Hier heisst 4 die Seite oder Ecke, 8 die Gegenseite oder Gegenecke, a ihre Ecke oder ihr Band.

In u werde 3, in v werde 7 gelegt. Es kommen also hinzu:

$35 = g$, $36 = h$, $17 = k$, $27 = l$.

Es seien bl , $3 = m$; cg , $7 = n$;

bh , $7 = o$; ck , $3 = p$.

Alsdann sind (73)

in bml , cng . . . $lnbg = v$, $lcmg = u$,

also $bcmn = a$;

in boh , cpk . . $hpbk = u$, $hcok = v$,

also $bcop = a$.

Oder: 1526, 4 1527, 3 3526, 7

1526, 4 1536, 7 1726, 3

sind stabhaft oder stralenhaft.

Ferner seien:

kg , $2 = q$; lh , $5 = r$; $lgqr = t$.

Aber (73) $1625 = df$, $1735 = kg$, $2736 = lh$ liegen in w .

Es seien $bcd f = x$, $dtqg = y$.

Alsdann bilden (72) l , g , q , r in kg die Gleichmes-

sung gg , wy und b , c , d , f in bc die Gleichmessung cb , xa . Also (68)

$$ggwy \div cbxa.$$

Aber cq , wx , bg liegen in d .

Also (48, 57) liegt ay in d .

Also liegt dt in a .

Hieraus ergibt sich:

Das Band oder die Ecke von 1735, 2 und 2736, 5 verbunden mit 2735 giebt eine Ecke oder einen Stab. Diese Ecke oder dieser Stab verbunden mit 25 giebt ein Band oder eine Ecke, liegend in 1526, $4 = a$.

Auf dieselbe Art erhellet:

Das Band oder die Ecke von 2736, 1 und 1735, 6 verbunden mit 1736 giebt eine Ecke oder einen Stab. Diese Ecke oder dieser Stab verbunden mit 16 giebt ein Band oder eine Ecke, liegend in 1526, $4 = a$.

81.

Wenn von zwei Dreistralungen diejenigen beiden Bildungsecken genommen werden, welche zwei gemeinsame Ecken haben, und wenn in denselben die Gleichmessungen bestimmt werden, so liegt die Ecke ihrer vierten Stralen in dem Bande der ursprünglichen Dreistralungen.

Wenn von zwei Stabdreiecken diejenigen beiden Bildungsstäbe genommen werden, welche zwei gemeinsame Stralen haben, und wenn in denselben die Gleichmessungen bestimmt werden, so liegt das Band ihrer vierten Ecken in der Ecke der ursprünglichen Stabdreiecke.

In u liegt 123, in v liegt 567. Je zwei der Bildungsecken oder Bildungsstäbe (73) haben gemeinsame Theile, z. B.

$$w \dots 1526 = a, 1736 = b, 2735 = c,$$

$$x \dots 1527 = f, 1637 = g, 2635 = h.$$

Die gemeinsamen Theile sind 15 und 35. Es seien $a3c6 = l$, $achl = d$, $f3h7 = m$, $fhcm = k$, $uv = 4$, so sind (69) ac , bd und fh , gk Gleichmessungen. Aber (80) m liegt in $a4$ und l liegt in $f4$. Also $amfl = 4$. Bei adl , mkf sind $adm k = c$, $almf = 3$, $dlkf = h$ stabhaft

oder stralenhaft. Also (75) am , dk , lf stralenhaft oder stabhaft. Aber $amfl = 4$. Also liegt dk in 4.

82.

In der Bildungsecke In dem Bildungsstabe
zweier Dreistralungen sei zweier Stabdreiecke sei die
die Gleichmessung genom- Gleichmessung genommen.
men. Der vierte Stral der- Die vierte Ecke derselben
selben und ein Stral, wel- und eine Ecke, welche an
cher auf zwei ursprüngli- zwei ursprünglichen Ecken
chen Stralen eine Gleich- eine Gleichmessung bildet,
messung bildet, haben ihre haben ihr Band in der Ecke
Ecke in dem Bande der der ursprünglichen Stab-
ursprünglichen Dreistra- dreiecke.
lungen.

In u seien 123, in v seien 567. Von den sechs Bil-
dungsecken oder Bildungsstäben (73) sei

$$w \dots 1627 = a, 1537 = b, 2536 = c.$$

Es seien $uv = 4$, $26 = n$, $a4 = o$, $b4 = p$, $c4 = q$,
 $35 = f$, $36 = g$, $71 = k$, $72 = l$,
 nq , $3 = h$; no , $7 = m$; hm , $4 = r$,
 nh , $5 = y$; nm , $1 = t$; $wr = d$.

Hieraus folgen die Gleichmessungen (69)

ug , fh und vl , km ,
 nq , yh und no , tm .

Also (68) $nqyh \parallel notm$,
 $nqyh \parallel nomt$.

Also (46, 58) ty in $oqmh = r$,
 my in $oqth$ oder $myth$ in $oq = 4$.

Also bei ymv , thu liegen ty , mh , uv in r .

Also (75) $myth$ in $utvy$, $uhvm$.

Aber $utvy = 15$, $uhvm = 37$, $1537 = b$.

Also $myth$ in b .

Aber auch $myth$ in 4.

Also $myth = b4 = p$.

Also (45, 56) an $y \dots opqr \parallel omnt$.

Aber no , tm eine Gleichmessung.

Also (68) oq , pr eine Gleichmessung.

Also (68) ac , bd eine Gleichmessung.

Hieraus folgt:

Wenn bei den Gleichmessungen

das eine Glied $1627 = a$, $2536 = c$,

das andere Glied $1537 = b$, d ;

in 3 das eine Glied u , 36 ,

das andere 35 , h ;

in 7 das eine Glied v , 72 ,

das andere 71 , m ;

so liegt d in $uvhm = r$.

Alsdann ist aber (81) von einer Gleichmessung

das eine Glied $1625 = a'$, $2736 = c'$,

das andere Glied $1735 = b'$, d .

Also ergibt sich d auch durch Vertauschung von 5 mit 7, und von 7 mit 5. Hieraus folgt: Wenn bei den Gleichmessungen

das eine Glied $1627 = a$, $2536 = c$,

das andere Glied $1537 = b$, d ;

in 3 das eine Glied u , 36 , das andere 37 , h' ;

in 7 das eine Glied v , 52 ,

das andere 51 , m' ;

so liegt d auch in $uvh'm' = r$.

83.

*Es sei eine Dreistra- Es sei ein Stabdreieck
lung und ein Stab gegeben; und eine Ecke gegeben; in
in demselben eine Ecke so derselben einen Stral so zu
zu bestimmen, dass der von bestimmen, dass die Ecke,
der Ecke der Dreistralung in welcher er den Stab
dahin gezogene Stral mit trifft, mit dem Stabdreieck
dieser in Gleichmessung sei. in Gleichmessung sei.*

Gegeben sei w , und in w . . . a , b , c .

Gegeben sei 4.

Man nehme in b beliebig x .

Man nehme in 4 beliebig u , v .

Es seien $ux = 1$, $vx = 5$, u , $c5 = 2$; v , $a1 = 6$;
 u , $c6 = 3$; v , $a2 = 7$; $26 = n$;

n , $c4$ mit 3 giebt h ,

n , $a4$ mit 7 giebt m .

Es sei hm , $4 = r$, $wr = d$, so ist ab , cd eine Gleichmessung.

Oder es seien $1625 = a'$, $2736 = c'$;
 n , $c'4$ mit 3 giebt h' ,
 n , $a'4$ mit 5 giebt m' .
 Es sei $h'm'$, $4 = r$, $wr = d$, so ist ebenfalls ac , bd
 eine Gleichmessung.

84.

Zwei Fügungen, welche das Urbild und Abbild heißen, entsprechen einander

- 1) *entweder mittelst eines festen Stabdreiecks und eines festen Stabes;*
- 2) *oder mittelst einer festen Ecke und zweier festen Zeilen;*
- 3) *oder mittelst zweier festen Ecken und eines festen Stabes.*

Im Urbilde und Abbilde sind:
 das Band entsprechender Ecken ein Stral der Lichtecke;
 die Ecke entsprechender Stäbe eine Ecke des Lichtstabes;
 den Zeilen des Urbildes entsprechen Stralen einer Ecke seines Grenzstabes;
 den Zeilen des Abbildes entsprechen Stralen einer Ecke seines Grenzstabes;
 den stabhaften Ecken und Stralungen des einen entsprechen stabhafte Ecken und Stralungen des andern;
 den bildhaften Stabvierecken und Vierstralungen des einen entsprechen bildhafte Stabvierecke und Vierstralungen des andern.

Den Gleichmessungen des einen entsprechen Gleichmessungen des andern.

Die Mitte der beiden Grenzstäbe stimmt mit der Mitte zwischen der Lichtecke und dem Lichtstabe.

Die Lichtecke, Urbild-Grenzecke und Abbildecke haben dieselbe Lage gegen einander wie die Urbildecke, Abbild-Grenzecke und Lichtecke.

Gegeben seien drei feste stabhafte Ecken, nämlich die Lichtecke u , die Sehecke v des Urbildes, die Sehecke v' des Abbildes. Gegeben sei auch ein fester Stab Q , welcher der Lichtstab heißt.

Es seien $123 \dots$ Ecken des Urbildes, $1'2'3' \dots$ ent-

sprechende Ecken des Abbildes. Sie seien durch die Bedingung verknüpft, dass die Bänder $11', 22', 33' \dots$ in der Lichtecke u liegen, und dass die Ecken $v1v'1' = a$, $v2v'2' = b$, $v3v'3' = c$ u. s. w. Ecken des Lichtstabes Q seien.

Hieraus folgt (75) wegen der in u stralenhaften Sechsecke $v12, v'1'2'$, ferner $v23, v'2'3'$, ferner $v31, v'3'1'$ u. s. w., dass die Ecken entsprechender Stäbe $121'2' = m$, $232'3' = k$, $313'1' = l$ u. s. w. Ecken des Lichtstabes Q sind.

Wenn 123 stabhaft, so fallen klm zusammen, also $1'2'3'$ stabhaft. Umgekehrt, wenn $1'2'3'$ stabhaft, so sind 123 stabhaft.

Wenn die Ecken $12, 23, 31$ zusammenfallen, und ihre Stäbe den Lichtstab Q in klm treffen, so fallen auch die Ecken $1'2', 2'3', 3'1'$ zusammen, während ihre Stäbe den Lichtstab in klm treffen. Also entsprechen den Stralungen des Urbildes Stralungen des Abbildes. Umgekehrt entsprechen diesen jene.

Es seien $1234, 5678$ Stabvierecke des Urbildes, $1'2'3'4', 5'6'7'8'$ die entsprechenden Stabvierecke des Abbildes. Die Bänder entsprechender Ecken sind Stralen von u , also (56)

$$1'2'3'4' \parallel 1234, 5'6'7'8' \parallel 5678.$$

Wenn also $1234' \parallel 5678$, so ist $1'2'3'4' \parallel 5'6'7'8'$, und umgekehrt.

Es seien $1234, 5678$ Vierstralungen des Urbildes, $1'2'3'4', 5'6'7'8'$ die entsprechenden Vierstralungen des Abbildes. Da die Ecken entsprechender Stäbe in Q liegen, so ist (47) $1'2'3'4' \parallel 1234, 5'6'7'8' \parallel 5678$.

Wenn also $1234 \parallel 5678$, so ist $1'2'3'4' \parallel 5'6'7'8'$.

Es sei $12, 34$ eine Gleichmessung, so ist (68) auch $1'2', 3'4'$ eine Gleichmessung, und umgekehrt.

Es sei a eine beliebige Ecke von Q . Ziehe aus u Zeilen zu $va, v'a$. Sie bilden eine Zeilung $udaf$, deren Ecken d, f in zwei Zeilen des Lichtstabes Q liegen. Diese Zeilen RS heissen die *Grenzstäbe* des Urbildes und Abbildes. Die Mitte der Zeilung $udaf$ ist die Mitte der Grenzstäbe und die Mitte zwischen der Lichtecke und dem Lichtstabe. Wird die Lage der Ecke a in Q verändert, so folgt aus (19, 20), dass die Lage der Grenzstäbe RS unverändert bleibt.

Der Stab $uv'v$ treffe die Zeilen RQS in $d'a'f'$, so hat man die bildhaften Stabdreiecke (28)

$$\begin{array}{l} uv'v \parallel dv'a, \quad dv'a \parallel d'v'a', \\ uv'v \parallel fav, \quad fav \parallel f'a'v, \\ \text{also } uv'v \parallel d'v'a' \parallel f'a'v. \end{array}$$

Nimmt man in den beliebigen Stralen va , $v'a$ die beliebigen entsprechenden Ecken $l'l$ an, so dass $l'l$ ein Stral von u , nimmt man in Q eine beliebige Ecke l an, und zieht aus u zu ll , ll' die Zeilen ug , uh , so entsteht die Zeilung $uglh$. Da die Sechsecke udg , lal in l' ; uhf , $l'la$ in l stralenhaft, so liegen (19, 20) die Ecken g , h in den Grenzstäben R , S . Da dieses für jede beliebige Lage der Ecken a , l im Lichtstabe Q gültig bleibt, so folgt:

Allen Zeilen des Urbildes entsprechen Stralen des Abbildes, deren Ecke in dem Grenzstabe des Urbildes liegt.

Allen Zeilen des Abbildes entsprechen Stralen des Urbildes, deren Ecke in dem Grenzstabe des Abbildes liegt.

Auch folgt hieraus die Aehnlichkeit der Dreiecke ugl' , lhu , und die Bildgleichung

$$ul'l \parallel gl'l \parallel hll.$$

Dieses führt auf die zweite Bestimmung des Abbildes, wenn die Lichtecke u , der Lichtstab Q und der Grenzstab S gegeben sind. Man nimmt in S beliebige Ecken w , w' an, zieht $w1$, $w'2$, welche Q in $1''2''$ treffen, zieht aus $1''$ die Zeile $1''1'$ zu uw an $u1$, aus $2''$ zu uw' die Zeile $2''2'$ an $u2$.

Denn es seien die Ecken $121''2'' = m$, $12ww' = n$, so ist (19) bei dem in l stralenhaften Sechseck uwn , $1'1''m$, $1'm$ die Zeile zu un . Ebenso ist bei dem in 2 stralenhaften Sechseck $uw'n$, $2'2''n$, $2'm$ die Zeile zu un . Also liegt der Abbildstab $1'2'$ in m .

Hieraus folgt die dritte Bestimmung des Abbildes, wenn die Lichtecke u , eine feste Grenzecke w und der Lichtstab Q gegeben sind. Man zieht aus w nach allen Ecken $1, 2 \dots$ des Urbildes Stralen, welche den Lichtstab Q in $1'', 2'' \dots$ treffen, aus diesen Ecken $1'', 2'' \dots$ Zeilen zu uw , welche die Stralen $u1, u2 \dots$ in $1', 2'$ tref-

fen, so sind $1'2'$ die Abbilder von 12, und (75) die Ecke $121'2'$ liegt in Q.

Der vorstehende Satz ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der *erfindenden Bildlehre*. Man entdeckt durch denselben die Eigenschaften einer Fügung, indem man sie als Abbild eines einfachen Urbildes ansieht.

Weiterhin (143 und ff.) wird gezeigt werden, wie mittelst desselben aus einfachen Eigenschaften des Kreises sämtliche Eigenschaften des Abkreises hergeleitet werden können.

85.

Bei zwei Fügungen, deren eine das Urbild, die andere das Abbild ist, entsprechen jedem Hauptstabe zwei Bildstäbe, jeder Hauptecke zwei Bildecken. In dem einen Bildstabe liegen die Bilder aller Ecken, die dem Hauptstabe und den Stäben des Urbildes gemeinsam sind. In dem andern Bildstabe liegen die Bilder der Ecken, die dem Hauptstabe und den Stäben des Abbildes gemeinsam sind.

Ebenso liegen in der einen Bildecke die Bilder aller Stralen, welche von der Hauptecke nach den Ecken des Urbildes gezogen werden, in der andern Bildecke die Bilder aller Stralen, welche von der Hauptecke nach den Ecken des Abbildes gezogen werden.

Der Lichtstab, Hauptstab und beide Bildstäbe sind stralenhaft, die Lichtecke, Hauptecke und die beiden Bildecken sind stabhaft.

Diese Stäbe bilden mit einem gemeinsamen Stral Gleichmessungen.

Ebenso bilden diese Ecken mit einer gemeinsamen Ecke Gleichmessungen.

Gegeben seien:

die Lichtecke oder der Lichtstab u ,
der Lichtstab oder die Lichtecke Q,
der Hauptstab oder die Hauptecke Z.

Gegeben ferner:

im Urbilde x, y , also $xy = 1$,
im Abbilde $1'$ in $u1$.

Hieraus folgen (84)

$$\begin{aligned} Qx &= l, \quad Qy = m, \quad l1' = x', \quad m1' = y', \\ Zx &= a, \quad Zy = c, \quad Zx' = b, \quad Zy' = d, \\ ual1' &= a', \quad ucm1' = c', \quad ubl1 = b', \quad udm1 = d', \\ a'c' &= R, \quad b'd' = T. \end{aligned}$$

Hier ist R der Bildstab oder die Bildecke des Urbildes, T der Bildstab oder die Bildecke des Abbildes.

Aus (84) folgt, dass Q, R, T, Z stabhaft oder strahlenhaft in v sind. Es sei $wv = W$.

Es sei $abul = f, a'b'ul = f', aba'b = f'', cdum = g, c'd'um = g', cdc'd' = g'',$ so sind (69) ul, ff' und um, gg' Gleichmessungen, also (68)

$$ulff' \parallel umgg'.$$

Also (46, 58) $f'g' = S$ in $lmfg = QZ = v$.

Also liegt S in v .

Auch sind (69) $a'b', f'f''$ und $c'd', g'g''$ Gleichmessungen. Man hat also (68) die Gleichmessungen WQ, ZS und RT, ZS .

86.

Wenn bei zwei Fügungen, deren eine das Urbild, die andere das Abbild ist, aus der Lichtecke Zeilen zu den Stäben des Urbildes bis an die entsprechenden Stäbe des Abbildes, ebenso Zeilen zu den Stäben des Abbildes bis an die entsprechenden Stäbe des Urbildes gezogen werden, liegen die Ecken in zwei Bildstäben, welche Zeilen der Lichtecke und dem Lichtstabe übereinstimmt.

Wenn bei zwei Fügungen, deren eine das Urbild, die andere das Abbild ist, aus den Ecken des Urbildes und Abbildes Zeilen zu einem beliebigen Hauptstral gezogen werden, so sind die Bilder dieser Zeilen Stralen zweier Bildecken, welche in jenem Hauptstral liegen, und deren Mitte mit der Mitte zwischen der Lichtecke und dem Lichtstabe übereinstimmt.

Dieser Satz ist ein Sonderfall des allgemeinen Satzes (85). Hier liegt Z im Unendlichen. Entsprechend sind im Urbilde 12, 13,

im Abbilde $1'2'$, $1'3'$;

$121'2' = l$, $131'3' = m$, $lm = Q$;

$11'$, $22'$, $33'$ in u ;

ua' die Zeile zu 12, oder $ua'12 = a$ die Zeile zu v ;

uc' die Zeile zu 13, oder $uc'13 = c$ die Zeile zu v ;

ub' die Zeile zu $1'2'$, oder $ub'1'2' = b$ die Zeile zu v ;

ud' die Zeile zu $1'3'$, oder $ud'1'3' = d$ die Zeile zu v ;

$a'c' = R$, $b'd' = T$,

R , T , Q Zeilen, oder R , T , Q in v .

Im ersten Falle sind ua' , lb' Zeilen, und uc' , md' Zeilen, also stimmt die Mitte von ul mit der Mitte von $a'b'$, also die Mitte von Qu mit der Mitte von RT .

Im andern Falle werden a , b und RT von einem Stral $a'b'ul$ gleichmessend getheilt oder gehalbt, also wird auch QW von diesem Stral gehalbt, also stimmt die Mitte von QW mit der Mitte von RT .

87.

Jede Ecke eines Vierecks kann als Lichtecke, die drei übrigen Ecken als Urbilder, die verbundenen Ecken als Abbilder, der Stab der Ecken der Gegenseiten der verbundenen Dreiecke als Lichtstab angesehen werden.

Jede Seite einer Viereckseitung kann als Lichtstab, die drei übrigen Seiten als Urbilder, die verbundenen Seiten als Abbilder, die Ecke der Bänder der Gegenecken der verbundenen Dreieckseitungen als Lichtecke angesehen werden.

Wenn aus der Lichtecke Zeilen zu den Seiten des einen Dreiecks bis an die Seiten des verbundenen Dreiecks gezogen werden, so liegen je drei Ecken in einem Bildstabe; die Bildstäbe sind Zeilen des Lichtstabes, und ihre Mitte stimmt mit der Mitte zwi-

Wenn aus der Lichtecke ein beliebiger Stral, zu diesem Stral Zeilen aus den Ecken der einen Dreieckseitung bis an den Lichtstab, aus diesen Ecken desselben Bänder zu den Ecken der verbundenen Dreieckseitung gezogen werden, so sind je drei Bänder Stralen einer

schen der Lichtecke und Bildecke, die beiden Bildecken liegen in dem Stral dem Lichtstabe überein. der Lichtecke, und ihre Mitte stimmt mit der Mitte zwischen der Lichtecke und dem Lichtstabe überein.

Dieser Satz ist ein Sonderfall des allgemeinen Satzes (86). Das Viereck oder die Vierseitung sei 1234; 4 sei beim Viereck die Lichtecke, bei der Vierseitung der Lichtstab, 123 das Urbild.

Es seien $4123 = 5$, $4231 = 6$, $4312 = 7$, so ist 567 das Abbild von 123; 123, 567 sind die verbundenen Dreiecke oder Dreiseitungen.

Aus (75) folgt, dass

$$2367 = k, 1357 = l, 1256 = m$$

in 8 stabhaft oder stralenhaft sind.

Beim Viereck seien $a4$, 67 Zeilen, $b4$, 75 Zeilen, $c4$, 56 Zeilen, so sind abc in T stabhaft, T , 8 sind Zeilen. Es seien $d4$, 23 Zeilen, $f4$, 31 Zeilen, $g4$, 12 Zeilen, so sind dfg in R stabhaft, R , 8 sind Zeilen. Es sind $a4kd$, $b4lf$, $c4mg$ Zeilungen, also stimmt die Mitte der Bildstäbe RT mit der Mitte von 48 überein. Bei der Vierseitung sei aus der Lichtecke 8 ein beliebiger Stral v gezogen.

Zu v seien aus den Ecken 23, 31, 12 Zeilen abc gezogen, aus den Ecken, in welchen sie den Lichtstab 4 treffen, zu den Ecken 67, 75, 56 die Bilder a' , b' , c' , so sind sie Stralen von R .

Zu v seien aus den Ecken 67, 75, 56 Zeilen dfg gezogen, aus den Ecken, in welchen sie den Lichtstab 4 treffen, zu den Ecken 23, 31, 12 die Bilder d' , f' , g' , so sind sie Stralen von T , die Bildecken RT liegen im Stral v , und die Mitte von RT stimmt mit der Mitte von 48 überein.

88.

In einem Viereck kann jede Ecke als Lichtecke, eine andere als Doppelecke der verbundenen Dreiecke angesehen werden. In einer Vierseitung kann jede Seite als Lichtstab, eine andere als Doppelseite der verbundenen Dreiseitungen angesehen werden.

Der Lichtstab ist alsdann ein Stral dieser Doppelseite.

Zieht man aus der Lichtecke Zeilen zu den Seiten an die Gegenseiten, so liegen die vier Ecken in einem Stabe, welcher die Zeile zu dem Lichtstabe ist und den Abstand zwischen der Lichtecke und dem Lichtstabe halbt.

Die Lichtecke ist alsdann eine Ecke dieser Doppelseite.

Zieht man aus der Lichtecke einen beliebigen Stral, zu diesem Stral Zeilen aus den vier Ecken bis an den Lichtstab, aus diesen Ecken desselben die Bänder zu den verbundenen Ecken, so sind sie die Bilder der Zeilen, und Stralen einer Ecke des durch die Lichtecke gehenden Strals, welche die Mitte der Lichtecke und des Lichtstabes ist.

Dieser Satz ist ein Sonderfall des allgemeineren Satzes (87). Das Viereck oder die Vierseitung sei 1234; 4 sei beim Viereck die Lichtecke, bei der Vierseitung der Lichtstab. Es sei $4231 = 6$, $4312 = 7$, so ist 123 das Urbild, 167 das Abbild, $2367 = k$, $k1 = 8$, so ist 8 beim Viereck der Lichtstab, bei der Vierseitung die Lichtecke.

Beim Viereck seien $a4$, 67 Zeilen, $b4$, 72 Zeilen, $c4$, 36 Zeilen, $d4$, 23 Zeilen, so sind $abcd$ stabhaft in R , R die Zeile zum Lichtstab 8 und die Mitte von 48.

Bei der Vierseitung sei v ein beliebiger Stral von 8, zu v seien Zeilen $abcd$ aus 23, 16, 12, 67 an den Lichtstab gezogen, die von den Ecken desselben nach 67, 12, 16, 23 gezogenen Bänder a' , b' , c' , d' sind die Bilder von $abcd$, und Stralen einer Ecke R von v . R ist die Mitte von 48.

Unmittelbarer Beweis. Beim Viereck.

In $k12$, $db4$ liegen kd , $b1$, 24 in 6, es sind $k2$, $d4$ Zeilen, 12, $b4$ Zeilen, also (19) $k1$, bd Zeilen. In $k13$, $dc4$ liegen kd , $c1$, 34 in 7; es sind $k3$, $d4$ Zeilen, 13, $c4$ Zeilen, also (19) $k1$, cd Zeilen. In $k17$, $ab4$ liegen ka , $b1$, 47 in 3; es sind $k7$, $a4$ Zeilen, 17, $b4$ Zeilen, also (19) $k1$, ab Zeilen.

Also liegen a, b, c, d in einem Stabe R , welcher die Zeile zu $k1$ ist. In den Zeilungen $ka4d, 1b4c$ werden $k4, 14$ von R gehalten.

Bei der Vierseitung.

In $kaa', 1bb'$ sind $kab1 = 3, ka'b'1 = 7, aa'bb' = 4$; a, b Zeilen, also (21) $k1a'b'$ die Zeile zu a, b .

In $kdd', 1cc'$ sind $kdc1 = 7, kd'c'1 = 3, cc'dd' = 4$; c, d Zeilen, also (21) $k1c'd'$ die Zeile zu c, d .

In $kaa', 1cc'$ sind $kac1 = 2, ka'c'1 = 6, aa'cc' = 4$; a, c Zeilen, also (21) $k1a'c'$ die Zeile zu a, c .

Aber $k1 = 8$, also sind $a'b'c'd'$ Stralen einer Ecke R , und $R8$ die Zeile zu a, b, c, d . Diese Zeile sei v , und $v4 = W$, so ist (15) R die Mitte von $W8$.

89.

Zwei Stralen einer Ecke bilden mit ihren beiden Lothstralen eine Gleichmessung.

Es seien 12 Stralen der Ecke a .

Die Neigung 12 werde vom Stral 3, die Nebenneigung 21 vom Stral 4 gehalten, so heissen 34 die Lothstralen.

Es sei beliebig $ab = ac = ad$, bc werde von 3 in f , cd werde von 4 in g getroffen, so sind bad, bfc, cgd gleichmessende Stabdreiecke; die vier Dreiecke baf, caf, acg, adg sind deckend, also fg die Zeile zu 1, cd die Zeile zu 3, bc die Zeile zu 4. Also sind auch $bc, 3$, ferner $cd, 4$, ferner bc, cd Lothungen. Also (67) 12, 34 bilden eine gleichmessende Vierstralung.

Wenn die Stralen 1234 von einem beliebigen Stabe in 5678 getroffen werden, so ist (71) 56, 78 eine Gleichmessung.

90.

Bei zwei Lothungen sind die auf jedem Stral ruhenden Neigungen gleich.

Es seien ca, cb und da, db Lothungen, und amb ein gleichmessendes Stabdreieck, so sind (89) $mc = ma = mb$ und $md = ma = mb$, also die Neigungen abc, adf, cdf

die Hälften der Neigungen amc , amf , cmf . Also die auf dem Stral ac ruhenden Neigungen abc , adc gleich.

Ebenso erhellet, dass die auf dem Stral bc ruhenden Neigungen bac , bdc , die auf dem Stral bd ruhenden Neigungen bad , bcd , die auf dem Stral ad ruhenden Neigungen abd , acd , die auf dem Stral cd ruhenden Neigungen cbd , cag gleich sind.

91.

Bei zwei Lothungen machen die Gegenseiten ebenfalls eine Lothung.

Die von jeder der vier Ecken auf die drei Seiten des eingeschriebenen Dreiecks gezogenen Lothe sind gleich.

In dem Viereck 1234 seien 12, 34 und 13, 24 Lothungen.

Es seien die Ecken $4123 = 5$, $4231 = 6$, $4312 = 7$, so sind (90) in dem Viereck 1647 die Neigungen 714, 764 oder 215, 762 gleich, in dem Viereck 2367 die Neigungen 762, 732 gleich, also die Neigungen 215, 732 gleich. In den Dreiecken 215, 732 ist die Neigung 2 gemeinsam. Also sind die Neigungen 251, 273 gleich. Also bilden die Stralen 41, 23 in 5 eine Lothung. Hieraus folgt weiter (90), dass in dem Viereck 1256 die Neigungen 265, 215, also die Neigungen 265, 762 gleich sind.

Also wird in dem eingeschriebenen Dreieck 567 die Neigung 567 vom Stral 24 gehalbt. Ebenso die Neigung 675 von 43, die Neigung 756 von 41 gehalbt. Also sind die von 4 auf 56, 67, 75 gezogenen Lothe gleich. Hieraus folgt, dass auch die von 1, 2, 3 auf die Seite des Dreiecks 567 gezogenen Lothe gleich sind.

92.

Wenn bei drei Lothungen aus den Ecken des eingeschriebenen Dreiecks Lothe auf die Seiten des umschriebenen Dreiecks gezogen werden, so ist jedes Eckband die Zeile einer Seite des eingeschriebenen Dreiecks und halbt die beiden andern Seiten.

Das Viereck sei 1234, es seien 12, 34 und 13, 24

Lothungen, so ist auch (91) 23, 14 eine Lothung. Es seien die Ecken:

$$4123 = 5, 4231 = 6, 4312 = 7.$$

Man ziehe aus 5 auf 12, 13 Lothe, so sind sie die Zeilen zu 37, 26. Also (88) ist ihr Eckband die Zeile zu 67, und halbt die Seiten 75, 56 in b, c . Ebenso ist das Eckband der aus 6 auf 23, 12 gezogenen Lothe die Zeile zu 57, und halbt die Seiten 56, 67 in c, a . Ebenso ist das Eckband der aus 7 auf 23, 31 gezogenen Lothe die Zeile zu 56 und halbt die Seiten 67, 75 in a, b .

93.

Wenn aus einer beliebigen Ecke eines Strals einer Gleichmessung auf den Wendestral ein Loth, aus der Ecke desselben auf die beiden Stralen des andern Gliedes der Gleichmessung Lothe gezogen werden, so halbt ihr Eckband das erste Loth.

Die Gleichmessung in a sei 12, 34, es sei b eine beliebige Ecke von 1, bc das Loth auf 2, welches von 3, 4 in df getroffen wird.

Aus d sei auf 4 das Loth dh gezogen, bh treffe den Stral 3 in n , so ist (69) die Ecke $dhfn = g$ in 2, und (91) fg das Loth auf 3.

Aus c seien auf 3, 4 die Lothe ck, cl gezogen, so sind ck, fg und cl, gh Zeilen, also (88) $k1$ die Zeile zu nh , halbend in m das Loth bc .

94.

In den vier Dreiseitungen zweier Stralenpaare sind die Lothecken stabhaft.

In a sei das Stralenpaar 12.

In b sei das Stralenpaar 34.

Die vier Dreiseitungen sind

$$123, 124, 134, 234.$$

Die aus den drei Ecken einer Dreiseitung auf die Gegenseiten gezogenen Lothe sind (91) Stralen einer Ecke. Diese Lothecken seien:

in 123 c ,
in 124 d ,
in 134 f ,
in 234 g .

Es seien die Ecken $13 = k$, $14 = l$, $23 = m$, $24 = n$. Alsdann sind kc , ld Lothe auf 2, also Zeilen; kf , ad Lothe auf 4, also Zeilen; ac , lf Lothe auf 3, also Zeilen. Auch sind akl stabhaft. Also sind (17) cdf stabhaft.

Ebenso ac , ng Lothe auf 3, also Zeilen; ad , mg Lothe auf 4, also Zeilen; mc , nd Lothe auf 1, also Zeilen. Aber amn stabhaft. Also (17) cdg stabhaft. Also $cdfg$ stabhaft.

95.

Wenn in einer Ecke eines Vierecks Lothe auf die von dieser Ecke nach den drei übrigen Ecken gehenden Stralen gezogen werden, so sind die Ecken, in welchen diese Lothe die Gegenseiten treffen, stabhaft.

Das Viereck sei 1234; in 4 seien auf die Stralen 41, 42, 43 die Lothe $4a$, $4b$, $4c$ gezogen, welche die Gegenseiten 23, 31, 12 in a , b , c treffen.

Es sei 5 eine beliebige Ecke des Strals 41. Ziehe aus 5 auf den Stral 43 ein Loth, welches den Stral 42 in 6 trifft, und aus 5 auf den Stral 42 ein Loth, welches den Stral 43 in 7 trifft, so ist (91) 67 ein Loth auf 41.

Hier sind 15, 26, 37 Stralen von 4, und $a4$, $b4$, $c4$ Zeilen zu 67, 75, 56. Also (87) die Ecken abc stabhaft.

96.

Wenn zwei stabhafte Stralungen von zwei beliebigen Stralen einer beliebigen Ecke ihres Stabes getroffen werden, so sind die Bildbänder Stralen einer Bildecke in einem Stral Ecke des gemeinsamen Strals der Ecke der Stäbe der Stralungen.

In u seien 1, 2, 3, 4 . . .

In v seien 5, 6, 7, 8 . . .

Es seien $15 = a$, $26 = b$, $37 = c$, $48 = d$. . .

Es liegen $a, b, c, d \dots$ in T .

In T sei p beliebig, in p seien R, S beliebig. Es seien $R1 = 1', R2 = 2', R3 = 3', R4 = 4',$

$S5 = 5', S6 = 6', S7 = 7', S8 = 8' \dots$

Bei $a1'5', b2'6'$ sind $ab, 1'2', 5'6'$ in p ; $a1', b2'$ in u ; $a5', b6'$ in v . Also (75) $1'5', 2'6'$ in uv .

Dasselbe erhellet für die übrigen. Also sind $1'5'2'6' = 1'5'3'7' = 1'5'4'8' = w$, und w liegt in uv .

97.

Bei einer Fünfseitung Bei einem Fünfeck entspricht dem fünften Stabe spricht der fünften Ecke zu zu jeder Dreiseitung ein jedem Dreieck eine Ecke Stab mit drei gleichmessen- mit drei gleichmessenden den Ecken. Stralen.

Die Fünfseitung oder das Fünfeck sei $ABCDF$. Es seien

$AD = 1, AB = 2, BC = 3, CD = 4,$

$BD = 5, AC = 7, 1324 = 6.$

Die drei Dreiseitungen oder Dreiecke sind

$A, C, 56; B, D, 67; 13, 24, 57.$

In $A, C, 56$ sei $FA = d; FC = f; F, 56 = g$. Man bilde die Gleichmessungen

$\left. \begin{array}{l} 12, da \\ 34, fb \\ 56, gc \end{array} \right\}$

so ist (68)

$12da \vdash 34bf,$

$12da \vdash 43bf.$

Die Bildungsstäbe oder Bildungsecken dieser Bildgleichungen enthalten (74) die Bandecken oder Eckbänder

$4123 = 5, d4b2 = h, abdf = l,$

$4231 = 6, d3b2 = k, abdf = l.$

Hier liegt l in F , und $ab, h5, k6$ in l . Es sei $F, b2 = m$, so ist

$(45, 56) \text{ an } d \dots 34fb \vdash khmb.$

Aber $34, fb$ eine Gleichmessung.

Also (68) kh, mb eine Gleichmessung.

Also (68) $khmb \vdash 65gc.$

Aber $k6, h5, mg$ liegen in l .

Also (48, 57) liegt bc in l .

Aber ab liegt in l .

Also ist G ein Stab oder eine Ecke, enthaltend drei gleichmessende Ecken oder Stralen abc , so dass

12, da ; 34, fb ; 56, gc
Gleichmessungen sind.

Auf dieselbe Art erhellet:

Wenn bei 23, 14, 67 die Ecken oder Stralen

$F, 23 = d'$; $F, 14 = f'$; $F, 67 = g'$

bezeichnet werden, und die Gleichmessungen

23, $d'a'$; 14, $f'b'$; 67, $g'c'$

genommen werden, so liegen $a'b'c'$ in einem Stabe oder einer Ecke G' .

Wenn bei 31, 24, 57 die Ecken oder Stralen

$F, 31 = d''$; $F, 24 = f''$; $F, 75 = g''$

bezeichnet werden und die Gleichmessungen

31, $d''a''$; 24, $f''b''$; 75, $g''c''$

genommen werden, so liegen $a''b''c''$ in einem Stabe oder in einer Ecke G'' .

98.

Bei einer Fünfseitung *Bei einem Fünfeck bil-*
bilden die dem fünften Stabe den die der fünften Ecke
entsprechenden gleichmes- *entsprechenden gleichmes-*
senden Stäbe eine Dreistra- *senden Ecken ein Stabdrei-*
lung, und ihre gleichmes- *eck, und ihre gleichmessen-*
senden Ecken ein Sechseck, den Stralen eine Sechsei-
dessen Wechselbandecken *tung, deren Wechseleckbün-*
stabhaft sind. *der Stralen einer Ecke sind.*

Es seien 1, 2, 3, 4, F beliebig.

4123 = 5, 4231 = 6, 4312 = 7,

$F, 12 = d$; $F, 34 = f$; $F, 56 = g$,

$F, 23 = d'$; $F, 14 = f'$; $F, 67 = g'$,

$F, 31 = d''$; $F, 24 = f''$; $F, 75 = g''$.

Man bilde die Gleichmessungen

12, da 34, fb 56, gc

23, $d'a'$ 14, $f'b'$ 67, $g'c'$

31, $d''a''$ 24, $f''b''$ 75, $g''c''$

so sind (97) abc , $a'b'c'$, $a''b''c''$ in Stäben oder Ecken G , G' , G'' .

Diese Gleichmessungen geben (68) Bildgleichungen, in denen jeder Theil 1234 drei Mal, jeder Theil 567 zwei Mal vorkommt,

$$\text{z. B. } 12da \parallel 14f'h',$$

$$32d'a' \parallel 34f'b.$$

$$\text{Also (46, 58) } ab' \text{ in } 24df' = f'',$$

$$a'b \text{ in } 24d'f = f''.$$

Ebenso für die übrigen. Also liegen

$$a'a'', b'b'' \text{ in } d; aa'', bb'' \text{ in } d',$$

$$aa', bb' \text{ in } d'',$$

$$a'b'', b'a'' \text{ in } f; ab'', ba'' \text{ in } f',$$

$$ab', ba' \text{ in } f'',$$

$$c'c'' \text{ in } g; c''c \text{ in } g'; cc' \text{ in } g''.$$

Es liegen also z. B.

$$\text{bei } aa'b'', bb'a'':$$

$aa', bb' \text{ in } d''; ab'', ba'' \text{ in } f'; a'b'', b'a'' \text{ in } f.$ Aber $d''f'f \text{ in } F$. Also (75) $ab, a'b', a''b''$ oder G, G', G'' Stralen einer Ecke n oder Ecken eines Stabes n .

Ferner liegen bei $ab'a'', a'bb''$:

$aa', b'b \text{ in } d''; ab'', a''b \text{ in } f'; a'a'', b'b'' \text{ in } d.$ Aber $d''f'd \text{ in } F$ stabhaft oder stralenhaft. Also ist $aba'b'a''b''$, wie später (161) bewiesen werden wird, ein Abkreis-Sechseck oder eine Abkreis-Sechsseitung.

Es sei $FG = l, FG' = l', FG'' = l''$, so sind (69)

$$ab, nl \quad a'b', nl' \quad a''b'', nl''$$

Gleichmessungen.

Ebenso ergeben sich Gleichmessungen aus der Verbindung von F mit $cc'c''$.

99.

Bei einem Viereck sind die Mitten der drei Seiten jeder Dreiseitung stabhaft.

Dieser Satz ist ein Sonderfall des allgemeineren Satzes (97). Der unabhängige Beweis ist folgender:

Das Viereck sei 1234, die Ecken seien $4123 = 5, 4231 = 6, 4312 = 7$. Die Seiten 12, 34, 56 bilden eine Dreiseitung. Die Mitten dieser Seiten seien abc , so ist (39)

$$a12 \parallel b43, a12 \parallel b34.$$

Ziehe zu 12 die Zeilen $k3, h4$ an $b2$, so folgt (37):

aus $a12 \parallel b43$, dass $ab, h5$ Zeilen;

aus $a12 \parallel b34$, dass $ab, k6$ Zeilen.

Also ab die Zeile zu $h5, k6$.

Aber $k3, h4$ Zeilen.

Also (28) $hbk \parallel 4b3$.

Aber (39) $5c6 \parallel 4b3$.

Also (30) $hbk \parallel 5c6$.

Aber $h5, k6$ Zeilen.

Also (27) bc die Zeile zu $h5, k6$.

Aber ab die Zeile zu $h5, k6$.

Also (1) abc stabhaft.

100.

Wenn zwei Stäbe auf zwei Seiten eines Dreiecks gleiche Stücke abschneiden, so schneiden sie auch auf der dritten Seite gleiche Stücke ab.

Dieser Satz ist ebenfalls ein Sonderfall des allgemei-
nern Satzes (97). Der unabhängige Beweis ist folgender:

Das Dreieck sei 789. Die Seiten 78, 79 seien von
den Stäben ab, df so geschnitten, dass $a8 = d7, b7 =$
 $f9$. Halbe 78 in 1, 79 in 4, so ist 1 die Mitte von ad ,
4 die Mitte von bf . Halbe 89 in 6, so sind (3) 16, bf
und 46, ad Zeilen. Es sei die Ecke $abdf = l$. Die aus
 b zu ad gezogene Zeile werde von $d4$ in h , von df in
 m getroffen.

Nun ist (39) $a1d \parallel b4f$.

Also (37) $hl, 14$ Zeilen. Also hl, cg Zeilen. Ziehe
aus d zu bf die Zeile dk an bh .

Da $a1d \parallel f4b$, so ist (25) $kl6$ stabhaft.

Da das Stabdreieck $b4f$ gleichmessend und die Zeile
zu dk ist, so ist (67) aus der Stralung von d
 bm, hk eine Gleichmessung.

Aber $kl6$ stabhaft, und hl, cg Zeilen.

Also (67) $c6g$ ein gleichmessendes Stabdreieck. Aber
auch 869 ein gleichmessendes Stabdreieck.

Also $c8 = g9, c9 = g8$.

101.

*Wenn vier feste Ecken Wenn vier feste Stäbe
in vier festen Stäben liegen in vier festen Ecken liegen*

und die erste Hauptseite und die erste Hauptecke des Vierecks in der drit- der Vierseitung in der drit-
ten Hauptecke der Viersei- ten Hauptseite des Vierecks
tung liegt, so liegen zwei liegt, so liegen zwei Wech-
Wechselbänder in jedem seleckbänder in jeder der
der vier Stralen, welche vier Ecken, in welcher die
von der ersten Hauptecke erste Hauptseite des Vier-
der Vierseitung nach den ecks von der zweiten und
Ecken der zweiten und drit- dritten Hauptseite der Vier-
ten Hauptseite des Vierecks seitung getroffen wird.
gehen.

Es liegen k in K , l in L , m in M , n in N . Es
seien

$$KM = a, LN = b, LM = c, KN = d,$$

$$km = A, ln = B, lm = C, kn = D,$$

$$kl = F, KL = f, AB = o, CD = p,$$

$$ab = O, cd = P,$$

$$OP = abcd = h.$$

Nun sei angenommen, dass F in h liege.

Alsdann seien

$$OA = 1, OB = 2, OE = 3, OD = 4,$$

$$PA = 5, PB = 6, PC = 7, PD = 8.$$

Alsdann sind in h stralenhaft oder stabhaft die Sechsecke oder Sechsseitungen

$$ak5, bl7, cl3, dk1,$$

$$ak8, bl6, cl2, dk4,$$

$$ak5, bl6, cl2, dk1,$$

$$ak8, bl7, cl3, dk4.$$

Also folgt aus (75), dass:

$$a5b7 \text{ in } fm, c3d1 \text{ in } fm,$$

$$a8b6 \text{ in } fn, c2d4 \text{ in } fn,$$

$$a5b6 \text{ in } fo, c2d1 \text{ in } fo,$$

$$a8b7 \text{ in } fp, c3d4 \text{ in } fp.$$

Wenn vier feste Ecken Wenn vier feste Stäbe
in vier festen Stäben lie- in vier festen Ecken liegen,
gen, die erste Hauptseite die erste Hauptecke der
des Vierecks in der drit- Vierseitung in der dritten
ten Hauptecke der Vier- Hauptseite des Vierecks,
seitung, auch eine Gegen- auch eine Gegenseite der

ecke des Vierecks in einer Vierseitung in einer Gegen-
Gegenseite der Vierseitung ecke des Vierecks liegt, so
liegt, so liegt die zweite liegt die zweite Gegenseite
Gegenecke des Vierecks in der Vierseitung in der
der zweiten Gegenseite der zweiten Gegenecke des Vier-
Vierseitung und die dritte ecks und die dritte Haupt-
Hauptseite des Vierecks ecke der Vierseitung in der
in der ersten Hauptecke ersten Hauptseite des Vier-
der Vierseitung. ecks.

Es liegen k in K , l in L , m in M , n in N . Es
seien

$$KM = a, LN = b, LM = c, KN = d,$$

$$km = A, ln = B, lm = C, kn = D,$$

$$kl = F, KL = f, AB = o, CD = p, ab = O,$$

$$cd = P,$$

$$OP = abcd = h, op = ABCD = H.$$

Nun sei angenommen, dass F in h und p in O liege.
Alsdann folgt aus (73):

bei amc , khl , dass $akcl = KL = f$, $ahml = OC = CD$
 $= p$, und $chmk$ stab- oder stralenhaft sind;

bei bnd , khl , dass $bldk = LK = f$, $bhnk = OD = CD$
 $= p$, und $dhnl$ stab- oder stralenhaft sind.

Aber $chmk = PA$, $dhnl = PB$.

Also liegen PA , PB in fp .

Also liegt $AB = o$ in P , und o in fp .

Also liegt f in $op = H$.

Ausserdem seien

$$OA = 1, OB = 2, PC = 7, PD = 8,$$

$$oa = 1', ob = 2', pc = 7', pd = 8',$$

so folgt aus (101)

$aob7$, $cpd1$ in fm ; $a8bo$, $c2dp$ in fn ; $c2d1$, $a8b7$ in H ;

$AOB7'$, $CPD1'$ in FM ; $AS'BO$, $C2'DP$ in FN ;

$C2'D1'$, $AS'B7'$ in h .

Wenn vier feste Ecken Wenn vier feste Stäbe
in vier festen Stäben lie- in vier festen Ecken liegen,

gen und die beiden ersten und die beiden ersten Haupt-
Hauptseiten des Vierecks ecken der Vierseitung in
in der dritten Hauptecke der dritten Hauptseite des
der Vierseitung liegen, so Vierecks liegen, so liegen
liegen die beiden ersten die beiden ersten Haupt-
Hauptecken der Viersei- seiten des Vierecks in der
tung in der dritten Haupt- dritten Hauptecke der Vier-
seite des Vierecks. seitung.

Es liegen k in K , l in L , m in M , n in N .

Es seien $KM = a$, $LN = b$, $LM = c$, $KN = d$,
 $km = A$, $ln = B$, $lm = C$, $kn = D$,
 $KL = f$, $MN = g$, $kl = F$, $mn = G$,
 $AB = o$, $CD = p$, $ab = O$, $cd = P$,
 $OP = abcd = h$, $op = ABCD = H$.

Nun sei angenommen, dass F und G in h liegen.

Alsdann folgt:

bei kdn , lcm sind kl , cd , mn in h , also (75)

$kdlc = KL = f$, $dncm = NM = g$,
 $knln = DC = p$ stab- oder stralenhaf.

Bei kam , lbn sind kl , ab , mn in h , also (75)

$kalb = KL = f$, $ambn = MN = g$,
 $kmln = AB = o$ stab- oder stralenhaf.

Also liegen o und p in fg .

Also liegen f und g in $op = H$.

Ausserdem folgt noch (75)

aus kdn , lcm und kam , lbn ,
aus KDN , LCM und KAM , LBN ,

dass $ckld$, $cnmd$, $alkb$, $anmb$ in H liegen, und dass $CKLD$,
 $CNMD$, $ALKB$, $ANMB$ in h liegen.

Es seien ferner:

$OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$, $OD = 4$,
 $PA = 5$, $PB = 6$, $PC = 7$, $PD = 8$,
 $oa = 1'$, $ob = 2'$, $oc = 3'$, $od = 4'$,
 $pa = 5'$, $pb = 6'$, $pc = 7'$, $pd = 8'$,

so folgt aus (101)

$a5b7$, $c3d1$ in fm ; $a8b6$, $c2d4$ in fn ,
 $a5b8$, $c1d4$ in gk ; $a7b6$, $c3d2$ in gl ;
 $a5b6$, $a6b5$, $a7b8$, $a8b7$ }
 $c1d2$, $c2d1$, $c3d4$, $c4d3$ } in H .

$A5'B7', C3'D1'$ in FM ,
 $A8'B6', C2'D4'$ in FN ,
 $A5'B8', C1'D4'$ in GK ,
 $A7'B6', C3'D2'$ in GL ,
 $A5'B6', A6'B5', A7'B8', A8'B7'$
 $C1'D2', C2'D1', C3'D4', C4'D3'$ } in h .

Es liegen h in A , h in B , h in C , h in D .
 Es seien $KM = a$, $LN = b$, $LM = c$, $KN = d$.
 $km = a$, $ln = b$, $lm = c$, $kn = d$.
 $KL = f$, $LN = g$, $LM = h$, $KN = i$.
 $AB = o$, $CD = p$, $AD = q$, $BC = r$.
 $OP = abcd = e$, $OP = ABCD = f$.
 Nun sei angenommen, dass V und Q in h liegen.
 Alsdann folgt:
 Bei h en, km sind kl , ld sind in h , also (15).
 $kl = f$, $ld = i$, $km = a$, $ln = b$.
 $kl = f$, $ld = i$, $km = a$, $ln = b$.
 Bei h en, ln sind kl , ld sind in h , also (15).
 $kl = f$, $ld = i$, $km = a$, $ln = b$.
 $kl = f$, $ld = i$, $km = a$, $ln = b$.
 Also liegen o und p in h .
 Also liegen q und r in h .
 Ausserdem folgt noch (15).
 aus km , ln und km , ln .
 aus KM , LN und KM , LN .
 dass cd , cm , cl , cn in h liegen, und dass CD ,
 CM , CL , CN in h liegen.

Es seien ferner:
 $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$, $OD = 4$.
 $PA = 5$, $PB = 6$, $PC = 7$, $PD = 8$.
 $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$, $OD = 4$.
 $PA = 5$, $PB = 6$, $PC = 7$, $PD = 8$.
 so folgt aus (101)
 $acbd$, $cbda$ in h ; $acbd$, $cbda$ in h .
 $acbd$, $cbda$ in h ; $acbd$, $cbda$ in h .
 $acbd$, $cbda$ in h ; $acbd$, $cbda$ in h .
 in h

Zweiter Abschnitt.

104.

Ein Stab, welcher zwei Ecken, welche zwei bildhafte Stabvierecke enthält, heißt ein Doppelstab, enthält, heißt eine Doppel-

Doppelbildung.

Der Doppelstab oder die Doppelreife sei W .

In W seien $10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

In U seien $1, 2, 3, 4$.

In V seien $5, 6, 7, 8$.

In u seien $26, 37, 48$.

In v seien $22, 33, 44$.

In e seien $66, 77, 88$.

Wenn 123567 gegeben sind, so lassen U in $1, V$ in 5 , so in W , endlich $26, 37$ in u beliebig angenommen werden. Hierdurch sind $22, 33 = u$, $66, 77 = v$ gegeben. Dann hängen $4, 8$ so von einander ab, dass $44, 88, 28, 82$ stabhaft oder strahlenhaft sind. Dann ist

in u $1234 + 12'3'4'$,

in v $12'3'4' + 56'7'8'$,

in so $56'7'8' + 30'78'$,

also $1234 + 5678$.

105.

Die Doppelbildung hat vier Bildstrichungen.

In W seien doppelbildhaft

$1234 + 5678$.

Zweiter Abschnitt.

Doppelbildung.

104.

Ein Stab, welcher zwei bildhafte Stabvierecke enthält, heisst ein Doppelstab. Eine Ecke, welche zwei bildhafte Vierstrahlungen enthält, heisst eine Doppelsecke.

Der Doppelstab oder die Doppelsecke sei W .

In W seien $w, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

In U seien $1, 2', 3', 4'$.

In V seien $5, 6', 7', 8'$.

In w seien $2'6', 3'7', 4'8'$.

In u seien $22', 33', 44'$.

In v seien $66', 77', 88'$.

Wenn 123567 gegeben sind, so können U in 1, V in 5, w in W , endlich $2'6', 3'7'$ in w beliebig angenommen werden. Hierdurch sind $22'33' = u$, $66'77' = v$ gegeben. Dann hängen 4, 8 so von einander ab, dass $u44'$, $w4'8'$, $w48$, $v88'$ stabhaft oder stralenhaft sind. Dann ist

$$\text{in } u \dots 1234 \text{ ++ } 12'3'4',$$

$$\text{in } v \dots 12'3'4' \text{ ++ } 56'7'8',$$

$$\text{in } w \dots 56'7'8' \text{ ++ } 5678,$$

$$\text{also} \dots 1234 \text{ ++ } 5678.$$

105.

Die Doppelbildung hat vier Bildgleichungen.

In W seien doppelbildhaft

$$1234 \text{ ++ } 5678.$$

Es sei U beliebig. In U seien $1'2'3'4'$ so, dass $1'1$, $2'2$, $3'3$, $4'4$ in n liegen. Dann ist

$$1234 \quad \text{++} \quad 1'2'3'4'.$$

$$\text{Aber } 1234 \quad \text{++} \quad 5678,$$

$$\text{also } 1'2'3'4' \quad \text{++} \quad 5678.$$

$$\text{Aber } 5678 \quad \text{++} \quad 6587 \quad \text{++} \quad 7856 \quad \text{++} \quad 8765.$$

$$\text{Also } 1'2'3'4' \quad \text{++} \quad 5678 \quad \text{++} \quad 6587 \quad \text{++} \quad 7856 \quad \text{++} \quad 8765.$$

Es ergeben sich also vier Bildungsstäbe (Bildungsecken) B .

$$\text{I. } 1'62'5, 1'73'5, 1'84'5, 2'73'6, 2'84'6, 3'84'7.$$

$$\text{II. } 1'52'6, 1'83'6, 1'74'6, 2'83'5, 2'74'5, 3'74'8.$$

$$\text{III. } 1'82'7, 1'53'7, 1'64'7, 2'53'8, 2'64'8, 3'64'5.$$

$$\text{IV. } 1'72'8, 1'63'8, 1'54'8, 2'63'7, 2'54'7, 3'54'6.$$

Bei je zweien derselben gehören zwei Eckpaare (Stralenpaare) gemeinsamen Vierecken an, z. B.]

$$\text{I. } 1'62'5 \text{ und II. } 1'52'6,$$

$$\text{I. } 3'84'7 \text{ und II. } 3'74'8.$$

106.

Wenn auf einem Doppelstabe (Doppelecke) von drei Gliedern das erste den beiden andern bildhaft ist, so ist auch das zweite und dritte den beiden andern bildhaft. Diese drei Glieder machen eine Flächung.

Die drei Glieder einer Flächung entsprechen den drei Gliedern einer Vierseitung (eines Vierecks).

Eine vollständige Flächung hat 24 Bildgleichungen.

Wenn in einem Gliede einer Flächung die beiden Theile sich vereinigen, so heisst die Flächung eine Doppelflächung.

Wenn in zwei Gliedern einer Flächung die beiden Theile sich vereinigen, so heisst die Flächung eine Gleichmessung.

Nämlich zwei zu einander bezogene Ecken oder Stralen machen ein Glied, die beiden zu einander bezogenen Ecken oder Stralen heissen die Theile des Gliedes.

Wenn der Doppelstab oder die Doppelecke W die Glieder 15, 26, 37 enthält, und das erste den beiden andern bildhaft ist, so wird dieses durch die Bildgleichung

$$1532 \quad \text{++} \quad 1567$$

ausgedrückt. Es seien in einer Vierseitung (Viereck)

$KLMN$, f beliebig und $f1 = K$, $f5 = L$. Es sei ferner M in 2 beliebig, und $KM = a$, $LM = c$. Es sei nun $a3 = O$ und hieraus

$$LO = b, b6 = N, KN = d, cd = P,$$

$$KL = f, MN = g, OP = h,$$

so enthalten f, g, h die drei Glieder KL, MN, OP , und es entspricht das Glied KL dem Gliede 15, das Glied MN dem Gliede 26. Alsdann ist an a

$$1532 \text{ ++ } f5bc,$$

$$\text{angenommen } 1532 \text{ ++ } 1567,$$

$$\text{also } 1567 \text{ ++ } f5bc.$$

Da 5 gemeinsam ist und $f1, b6$ in d liegen, so liegt auch (46, 58) $c7$ in d , also cd in 7. Aber $cd = P$, also liegt P in 7. Also entspricht das Glied OP dem Gliede 37.

Durch veränderte Annahme von f und M lässt sich auf diese Weise eine Schaar von Vierseitungen (Vierecken) KL, MN, OP bilden, welche sämtlich die Bildgleichung

$$1532 \text{ ++ } 1567$$

befriedigen.

Dieser Satz lässt sich auf folgende Art beweisen:

Es seien $KK' = 1, LL' = 5, MM' = 2, NN' = 6$,
 $K'M' = K'O' = a', L'N' = L'O' = b', L'M' = L'P' = c'$,
 $K'N' = K'P' = d'$.

Da $MM' = 2, LL' = 5, OO' = 3$ in W liegen, so liegen aa', bb', cc' in x .

Da $KK' = 1, NN' = 6, OO' = 3$ in W liegen, so liegen aa', bb', dd' in x .

Also liegen aa', cc', dd' in x .

Aber $ad = K, a'd' = K', ac = M, a'c' = M', cd = P, c'd' = P', KK' = 1, MM' = 2$ und $12 = W$, also $PP' = W$.

Wenn also $WP = 7$, so ist auch $WP' = 7$.

Hierdurch ist also bewiesen:

Wenn $1532 \text{ ++ } 1567$ und $KL = f, MN = g, OP = h, WK = 1, WL = 5, WM = 2, WN = 6, WO = 3$, so ist $WP = 7$. Alsdann heisst 15 bildhaft zu 26 und 37.

Man hat nun ferner:

$$\text{an } b \quad 1536 \text{ ++ } 1fad,$$

$$\text{an } c \quad 1fad \text{ ++ } 1527,$$

$$\text{an } a \quad 2613 \text{ ++ } g6db,$$

an c $g6db \vdash 2675,$
 an d $2617 \vdash 2gac,$
 an b $2gac \vdash 2635,$
 an a $3721 \vdash h7cd,$
 an b $h7cd \vdash 3756,$
 an c $3725 \vdash 3hab,$
 an d $3hab \vdash 3716.$

Wenn also 15 zu 26, 37 bildhaft ist, so ist 26 zu 37, 15 und 37 zu 15, 26 bildhaft. Die drei Glieder 15, 26, 37

machen eine *Flächung*. Die vollständige Flächung hat also 24 Bildgleichungen

1532 $\vdash$ 1567 $\vdash$ 5176 $\vdash$ 6715 $\vdash$ 7651,
 1536 $\vdash$ 1527 $\vdash$ 5172 $\vdash$ 2715 $\vdash$ 7251,
 2613 $\vdash$ 2675 $\vdash$ 6257 $\vdash$ 7526 $\vdash$ 5762,
 2617 $\vdash$ 2635 $\vdash$ 6253 $\vdash$ 3526 $\vdash$ 5362,
 3721 $\vdash$ 3756 $\vdash$ 7365 $\vdash$ 5637 $\vdash$ 6573,
 3725 $\vdash$ 3716 $\vdash$ 7361 $\vdash$ 1637 $\vdash$ 6173.

Wenn 3, 7 sich vereinigen, so entsteht die *Doppel-
 flächung* 15, 26, 33, deren Bildgleichungen sind:

1532 $\vdash$ 1563 $\vdash$ 5136 $\vdash$ 6315 $\vdash$ 3651,
 2613 $\vdash$ 2635 $\vdash$ 6253 $\vdash$ 3526 $\vdash$ 5362.

Wenn 2, 6 und 3, 7 sich vereinigen, so entsteht die *Gleichmessung* 15, 22, 33 oder 15, 23, deren Bildgleichungen sind:

1532 $\vdash$ 1523 $\vdash$ 5132 $\vdash$ 2315 $\vdash$ 3251.

107.

*Die drei Gliederpaare einer Flächung haben eine
 Schaar gemeinsamer Flächenglieder.*

In W seien 15, 26, 37 die Glieder einer Flächung, und f beliebig.

In f sei U beliebig.

In U seien $1'5'2'6'3'7'$, so dass

$1'1, 5'5, 2'2, 6'6, 3'3', 7'7$

in u liegen, wo u beliebig sei.

Aus der Flächung 15, 26, 37 folgt (106)

$1'5'3'2' \vdash 5176, \quad 1'5'3'6' \vdash 5172,$

$2'6'1'3' \vdash 6257, \quad 2'6'1'7' \vdash 6253,$

$3'7'2'1' \vdash 7365, \quad 3'7'2'5' \vdash 7361.$

Da $1'15'5 = 2'26'6 = 3'37'7 = u$, so liegen die Bil-

dingsstäbe oder Bildungssecken dieser Bildgleichungen sämtlich in u .

Ausserdem haben je zwei derselben einen gemeinsamen Theil, z. B.

die erste, zweite, dritte $1'73'5$,
 die erste, vierte, fünfte $1'62'5$,
 die erste, dritte, sechste $3'62'7$.

Also fallen alle sechs zusammen.

Dieser gemeinsame Bildungsstab oder Bildungssecke H enthält also 12 Theile, welche sich so abtheilen lassen:

A $1'26'5$, $1'62'5$, $5'26'1$, $5'62'1$,
 B $1'37'5$, $1'73'5$, $5'37'1$, $5'73'1$,
 C $2'37'6$, $2'73'6$, $6'37'2$, $6'73'2$.

Hier entspricht A den Gliedern 15, 26,

B „ „ 15, 37,

C „ „ 26, 37.

Es seien also $WH = h$, $UH = h'$, so folgen hieraus die Bildgleichungen (49, 54)

$fh12 \parallel hf56$, $fh16 \parallel hf52$,
 $fh13 \parallel hf57$, $fh17 \parallel hf53$,
 $fh23 \parallel hf67$, $fh27 \parallel hf63$,

also (106) fh , 15, 26 }
 fh , 15, 37 } Flächungen,
 fh , 26, 37 }

Das Glied fh , welches mit jedem Gliederpaare der Flächung 15, 26, 37 eine Flächung bildet, heisst das *Flächenglied* dieser Flächung.

Jedem beliebigen Theile f entspricht ein bestimmter Theil h . Jede Flächung hat also eine Schaar von Flächengliedern.

108.

Wenn zwei Flächungen zwei gemeinsame Glieder haben, so macht jedes dieser Glieder mit den beiden andern Gliedern ebenfalls Flächungen. Die vier Glieder machen ein doppelbildhaftes Achteck (Achtstralung).

Es seien 15, 26, 37 }
 und 15, 26, 48 } Flächungen.

In W nehme man f beliebig, in f sei U beliebig, in

U seien $1'5'2'6'3'7'4'8'$ so, dass $1'1, 5'5, 2'2, 6'6, 3'3, 7'7, 4'4, 8'8$ in u liegen, wo u ebenfalls beliebig ist. Man hat nun

$$\begin{array}{l} 1532 \quad \vdash \quad 5176 \\ \text{und } 1542 \quad \vdash \quad 5186, \\ \text{also auch } 1'5'3'2' \quad \vdash \quad 5176, \\ 1'5'4'2' \quad \vdash \quad 5186. \end{array}$$

In den Bildungsstäben (Bildungsecken) H, H' dieser Bildgleichungen liegen

in $H \dots 1'15'5, 1'73'5, 1'62'5, 5'73'1, 5'62'1, 3'62'7,$

in $H' \dots 1'15'5, 1'84'5, 1'62'5, 5'84'1, 5'62'1, 4'62'8.$

Da $1'15'5, 1'62'5, 5'62'1$ gemeinsam sind, so fallen H' und H zusammen. Dieser gemeinsame Bildungsstab (Bildungsecke) H liegt in u .

Da $2'26'6, 5'62'1, 5'26'1$ } stabhaft
und $2'26'6, 1'62'5, 1'26'5$ } (stralenhaft)
sind, so liegen in H noch
 $5'26'1, 1'26'5.$

Es sei $1'62'5 = a, 5'62'1 = b, 3'62'7 = c,$
 $4'62'8 = d,$

$5'26'1 = a', 5'84'1 = b', 5'73'1 = c',$

so ist an

$$\begin{array}{ll} 6 \dots 1'5'3'4' \quad \vdash \quad abcd, & 2' \dots badc \quad \vdash \quad 1587, \\ 1 \dots 2'6'3'4' \quad \vdash \quad ba'c'b', & 5' \dots a'bb'c' \quad \vdash \quad 2687 \end{array}$$

$$\text{also } 1534 \quad \vdash \quad 1587, \\ 2634 \quad \vdash \quad 2687.$$

Also sind $15, 37, 48$ } Flächungen.
 $26, 37, 48$ }

Da in H $1'62'5, 1'73'5, 1'84'5$ liegen, so ist H der Bildungsstab (Bildungsecke) der Bildgleichung

$$1'2'3'4 \quad \vdash \quad 5678.$$

Also ist $1234 \quad \vdash \quad 5678.$

Auch sind $fh, 15, 26$ }
 $fh, 15, 37$ }
 $fh, 15, 48$ } Flächungen.
 $fh, 26, 37$ }
 $fh, 26, 48$ }
 $fh, 37, 48$ }

109.

Auf dem Doppelstabe entsteht die einfache Flächung aus der vollständigen, indem eine Ecke der letztern ins Unendliche rückt, oder indem ein Stral der erzeugenden Vierseitung die Zeile des Doppelstabes wird. Bei der einfachen Flächung macht die Flächenecke mit den Ecken der Glieder Stabdreiecke, welche auf zwiefache Art gegenfolgend bildhaft sind.

Bei der Stralung aus zwei Ecken der Zeile wird die Flächenecke durch vier Stralen abgeschnitten.

Die Flächenecke eines Gliederpaares einer vollständigen Flächung ist auch die Flächenecke der beiden andern Gliederpaare.

Wenn zwei Gliederpaare eine gemeinsame Flächenecke haben, so hat das dritte Gliederpaar dieselbe Flächenecke, und die drei Glieder machen eine vollständige Flächung.

Eine einfache Flächung, deren Flächenecke die Mitte eines der beiden Glieder ist, heisst eine Mittelflächung.

Eine einfache Flächung, in welcher die beiden Theile eines Gliedes sich vereinigen, heisst ein Wechselviereck.

Durch Rücklegung geht die Mittelflächung in ein Wechselviereck, das Wechselviereck in eine Mittelflächung über.

Es sei auf dem Doppelstabe eine Flächung 12, 34, 56 angenommen.

Wenn nun die Ecke 6 ins Unendliche, und alsdann die Ecke 5 in h fällt, so heisst h die Flächenecke der Glieder 12, 34, und

das Stabfünfeck 12, 34, h ,

oder die Flächung 12, 34, $h\infty$

heisst eine einfache Flächung.

I.

Es seien also KL , MN die Stralenpaare einer Vierseitung, das Band $KNLM$ sei die Zeile zum Doppelstabe, und auf diesem Doppelstabe werde durch KL das Glied 12, durch MN das Glied 34, durch das Band $KMLN$ die

Ecke h abgeschnitten, so ist (106) h die Flächenecke der Glieder 12, 34.

II.

Auf einer Zeile zum Doppelstabe seien die Ecken u' , u'' beliebig. Die von u' nach 1234 gehenden Stralen seien $1'2'3'4'$, die von u'' nach 1234 gehenden Stralen seien $1''2''3''4''$. Diese Stralungen sind in 1234 stabhaft, also (47) bildhaft.

Also (43)

$$1'2'3'4' \vdash 2''1''4''3''.$$

Die Bildungsecke dieser Bildgleichung enthält (74) die Bänder

$$1'1''2'2'', 1'4''3'2'', 1'3''4'2'', 2'4''3'1'', 2'3''4'1'', 3'3''4'4''.$$

$$\text{Aber } 1'1'' = 1, 2'2'' = 2, 3'3'' = 3, 4'4'' = 4.$$

Also fällt die Bildungscke in den Doppelstab, und wird auf demselben durch die Bänder

$$1'4''3'2'', 1'3''4'2'', 2'4''3'1'', 2'3''4'1''$$

abgeschnitten.

In der Vierseitung der Stralen $1'2''3'4''$ schneiden $1'2''$ das Glied 12, $3'4''$ das Glied 34 ab, und das Band $1'3'2''4'' = u'u''$ ist die Zeile zum Doppelstabe. Also schneidet das Band $1'4''3'2''$ auf dem Doppelstabe die Flächenecke h der Glieder 12, 34 ab.

Dasselbe lässt sich von den übrigen drei Bändern beweisen. Also wird die Flächenecke der Glieder 12, 34 durch die oben bezeichneten vier Stralen auf dem Doppelstabe abgeschnitten. Diese vier Stralen treffen die Zeile in $wxyz$. Also (31)

$$\begin{array}{llll} \text{aus } 1'4''3'3'' & h14 & \vdash & wu'u'' \vdash h32, \\ \text{aus } 1'3''4'2'' & h13 & \vdash & xu'u'' \vdash h42, \\ \text{aus } 2'4''3'1'' & h24 & \vdash & yu'u'' \vdash h31, \\ \text{aus } 2'3''4'1'' & h23 & \vdash & zu'u'' \vdash h41. \end{array}$$

Also macht die Flächenecke mit den Ecken der Glieder in umgekehrter Folge bildhafte Stabdreiecke, und zwar auf zwiefache Art, nämlich:

$$h13 \vdash h42, \quad h14 \vdash h32.$$

Auch folgt hieraus:

$$wu'u'' \vdash zu'u'', \quad xu'u'' \vdash yu'u'.$$

Also (41) haben $u'u''$, wz , xy eine gemeinsame Mitte.

Ausserdem hat die einfache Flächung noch die Bildgleichungen der vollständigen Flächung (106), nämlich:

$$\begin{array}{l} 12h3 \text{ ++ } 124\infty, \quad 12h4 \text{ ++ } 123\infty, \\ 34h1 \text{ ++ } 342\infty, \quad 34h2 \text{ ++ } 341\infty. \end{array}$$

III.

Nimmt man auf der Zeile die Ecken $1'2'3'4'$ so, dass $1'1$, $2'2$, $3'3$, $4'4$ in u liegen, wo u beliebig ist, so ergibt sich eine grössere Anzahl Stralen, welche die Flächenecke h abschneiden.

IV.

Es seien auf dem Doppelstabe 12, 34, 56 Glieder einer vollständigen Flächung, und h die Flächenecke der Glieder 12, 34, so sind:

$$\begin{array}{l} 12, 34, 56 \\ 12, 34, h\infty \\ \text{also (108) } 12, 56, h\infty \\ \text{und } 34, 56, h\infty \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 12, 34, 56 \\ 12, 34, h\infty \\ 12, 56, h\infty \\ 34, 56, h\infty \end{array}} \right\} \text{Flächungen.}$$

Also ist h auch die Flächenecke der Glieder 12, 56 und 34, 56.

Es sei umgekehrt h die Flächenecke der Glieder 12, 34 und 12, 56, so sind:

$$\begin{array}{l} 12, 34, h\infty \\ 12, 56, h\infty \\ \text{also (108) } 34, 56, h\infty \\ \text{und } 12, 34, 56 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 12, 34, h\infty \\ 12, 56, h\infty \\ 34, 56, h\infty \\ 12, 34, 56 \end{array}} \right\} \text{Flächungen.}$$

V.

Es seien 12, 34 die Glieder einer einfachen Flächung, deren Flächenecke h ist, und es sei h die Mitte des Gliedes 12, so heisst eine solche Flächung eine *Mittelflächung*. Die Hälfte des Gliedes 12, oder $h1 = h2$ heisst die *Flächenseite*.

VI.

Es seien 12, 34 die Glieder einer einfachen Flächung, deren Flächenecke h ist, und es seien die Theile 12 in eine Ecke 2 vereinigt, so dass

$$h32 \text{ ++ } h24,$$

so heisst eine solche Flächung ein *Wechselviereck*. Das Glied $h2$ heisst die *Flächenseite*.

Nimmt man bei dem Wechselviereck (VI) die Ecken 1, 3' so, dass h die Mitte von 12 und 3'3,

$$\text{so ist } h3'1 \parallel h32,$$

$$\text{also } h3'1 \parallel h24,$$

also bilden die Glieder 12, 3'4 eine Mittelflächung.

Nimmt man bei der Mittelflächung (V) die Ecke 3' so, dass h die Mitte von 3'3 ist, so ist

$$h31 \parallel h3'2,$$

$$\text{aber } h31 \parallel h24,$$

$$\text{also } h3'2 \parallel h24,$$

also bilden die Glieder 22, 3'4 ein Wechselviereck.

Also geht durch Rücklegung das Wechselviereck in eine Mittelflächung, und die Mittelflächung in ein Wechselviereck über.

110.

Bei zwei beliebigen Dreiecken eines Doppelstabes machen die Grenzecken gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke.

Auf dem Doppelstabe A seien zwei beliebige nicht bildhafte Dreiecke 123, 567.

Man nehme auf einem beliebigen Stabe B , welcher der *Bildstab* heisst,

$$1'2'3', 5'6'7',$$

so dass 1'1, 2'2, 3'3, 5'5, 6'6, 7'7 Stralen einer beliebigen Ecke u seien. Hieraus ergeben sich (73) die *Bildungsstäbe* CD mit den Ecken

$$1'62'5, 1'73'5, 2'73'6 \text{ in } C,$$

$$5'26'1, 5'37'1, 6'37'2 \text{ in } D.$$

$$\text{Aber (56) } 1'5'2'6' \parallel 1526.$$

$$\text{Also (64) } 1'5'2'6' \parallel 5162.$$

Also (74) sind stabhafte Ecken:

$$1'15'5, 1'62'5, 1'26'5, 5'62'1, 5'26'1, 2'26'6.$$

$$\text{Aber } 1'15'5 = u, 2'26'6 = u.$$

Also ist das Band der Ecken 1'62'5, 5'26'1 ein Stral von u . Diese Ecken sind entsprechende Ecken der Stäbe C, D .

Ebenso erhellet, dass in u liegen: das Band der entsprechenden Ecken $1'73'5$, $5'37'1$ und

das Band der entsprechenden Ecken $2'73'6$, $6'37'2$.

Es sei n die Ecke der Stäbe A , B , und die Ecken $CA = T$, $CB = S'$, $DA = S$, $DB = T'$, so entsprechen die Ecken von CD den Bildgleichungen

$$C \dots 1'2'3'S' \vdash 567n \quad 1'2'3'n \vdash 567T,$$

$$D \dots 5'6'7'T' \vdash 123n \quad 5'6'7'n \vdash 123S.$$

$$\text{Aber (56)} \quad 567n \vdash 5'6'7'n, \quad 123n \vdash 1'2'3'n.$$

Also (59)

$$1'2'3'S' \vdash 123S, \quad 5'6'7'T' \vdash 567T.$$

Also (57) sind die Bänder $S'S$, $T'T$ Stralen von u .

Man nehme nun an, dass der Bildstab B die beliebige Zeile des Doppelstabes A sei, so ergiebt sich aus den Ecken des Bildungsstabes C (31)

$$1'62'5 \dots S'1'2' \vdash T65,$$

$$1'73'5 \dots S'1'3' \vdash T75,$$

$$2'73'6 \dots S'2'3' \vdash T76;$$

aus den Ecken des Bildungsstabes D (31)

$$5'26'1 \dots T'5'6' \vdash S21,$$

$$5'37'1 \dots T'5'7' \vdash S31,$$

$$6'37'2 \dots T'6'7' \vdash S32.$$

Beide Bildungsstäbe geben also an den Grenzecken S , T gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke wie in (76)

$$S12 \vdash T65, \quad S13 \vdash T75, \quad S23 \vdash T76.$$

Da die Ecke n hier in ∞ liegt, so ist aus

$$C \dots 123S \vdash 567\infty,$$

$$D \dots 123\infty \vdash 567T.$$

Die Bestimmung der Grenzecken des Doppelstabes heisst in der alten Bildlehre: „auf einem Stabe zwei Abschnitte zu bestimmen, welche sich wie gegebene Flächen verhalten.“

III.

Bei zwei bildhaften Vierecken eines Doppelstabes machen die Grenzecken gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke.

Auf dem Doppelstabe A seien die Ecken 1234 , 5678 so dass

$$1234 \vdash 5678.$$

Ziehe zu A die beliebige Zeile B als Bildstab, nimm auf derselben die Ecken $1'2'3'4'5'6'7'8'$, so dass $1'1$, $2'2$, $3'3$, $4'4$, $5'5$, $6'6$, $7'7$, $8'8$ Stralen einer beliebigen Ecke u seien.

Alsdann ist (56)

$$1'2'3'4' \vdash 1234, \quad 5'6'7'8' \vdash 5678.$$

$$\text{Also (59) } 1'2'3'4' \vdash 5678,$$

$$5'6'7'8' \vdash 1234.$$

Die Bildungsstäbe dieser Bildgleichungen seien C, D , so enthalten sie die Ecken (74)

$$C \dots 1'62'5, 1'73'5, 1'84'5, 2'73'6, 2'84'6, 3'84'7,$$

$$D \dots 5'26'1, 5'37'1, 5'48'1, 6'37'2, 6'48'2, 7'48'3.$$

Die Bänder der entsprechenden Ecken von C, D sind (110) Stralen von u . Es seien die Ecken $CA = T$, $CB = S'$, $DA = S$, $DB = T'$, so folgen aus (110) die Bildgleichungen

$$S12 \vdash T65, \quad S13 \vdash T75, \quad S14 \vdash T85,$$

$$S23 \vdash T76, \quad S24 \vdash T86, \quad S34 \vdash T87,$$

$$123S \vdash 567\infty \quad 123\infty \vdash 567T,$$

$$124S \vdash 568\infty \quad 124\infty \vdash 568T,$$

$$134S \vdash 578\infty \quad 134\infty \vdash 578T,$$

$$234S \vdash 678\infty \quad 234\infty \vdash 678T.$$

$$\text{Da } 1'2'3'S' \vdash 567\infty,$$

$$\text{so ist (64) } 2'1'S'3' \vdash 567\infty,$$

$$3'S'1'2' \vdash 567\infty,$$

$$S'3'2'1' \vdash 567\infty.$$

Die Bildungsstäbe dieser Bildgleichungen enthalten die Ecken (74)

$$2'61'5 = g, \quad 2'7S'5, \quad 1'7S'6, \quad 3',$$

$$3'6S'5, \quad 3'71'5 = f, \quad S'71'6, \quad 2',$$

$$S'63'5, \quad S'72'5, \quad 3'72'6 = d, \quad 1'.$$

Der Doppelstab A werde von $d1'$ in a , von $f'2'$ in b , von $g3'$ in c getroffen, so liegen

$$2'7S'5, \quad 1'7S'6 \text{ in } c3',$$

$$3'6S'5, \quad S'71'6 \text{ in } b2',$$

$$S'63'5, \quad S'72'5 \text{ in } a1'.$$

Hieraus folgt (31)

$$S'2'3' \vdash 57c, \quad S'1'3' \vdash 67c,$$

$$S'3'2' \vdash 56b, \quad S'1'2' \vdash 76b,$$

$$S'3'1' \vdash 65a, \quad S'2'1' \vdash 75a.$$

und hieraus weiter:

$$\begin{array}{l} S12 \text{ ++ } T65 \text{ ++ } 76b \text{ ++ } 7a5, \\ S13 \text{ ++ } T75 \text{ ++ } 6a5 \text{ ++ } 67c, \\ S23 \text{ ++ } T76 \text{ ++ } 57c \text{ ++ } 5b6. \end{array}$$

Also sind Flächenecken (109)

5 von 67, Ta , von 67, bc , von Ta , bc ,

6 von 75, Tb , von 75, ca , von Tb , ca ,

7 von 56, Tc , von 56, ab , von Tc , ab .

Also sind Flächungen

67, Ta , bc ; 75, Tb , ca ; 56, Tc , ab .

Auf dieselbe Art ergeben sich die Grenzecken der Bildgleichungen (64)

$$1234 \text{ ++ } 6587, 1234 \text{ ++ } 7856, 1234 \text{ ++ } 8765.$$

112.

Sechs Bildgleichungen der Flächung eines Doppelstabes haben Grenzglieder, deren Mitte in die des Hauptgliedes fällt.

Die Flächung sei 15, 26, 37, so ist für das Glied 15 (106) eine der beiden Bildgleichungen

$$1532 \text{ ++ } 1567.$$

Zum Doppelstabe A sei B die beliebige Zeile, als Bildstab; u eine beliebige Ecke; die aus u zu 15, 26, 37 gehenden Stralen treffen B in $1'5'$, $2'6'$, $3'7'$, dann ist (111)

$$1'5'3'2' \text{ ++ } 1567, 1'5'6'7' \text{ ++ } 1532.$$

Die Bildungsstäbe C , D dieser Bildgleichungen enthalten die Ecken

$C \dots 1'55'1, 1'63'1, 1'72'1, 5'63'5, 5'72'5, 3'72'6,$

$D \dots 1'55'1, 1'36'1, 1'27'1, 5'36'5, 5'27'5, 6'27'3.$

Die Ecke $1'55'1$ ist den Bildungsstäben CD gemeinsam. Diese Bildungsstäbe treffen den Doppelstab A (111) in den Grenzecken TS . Also wird sowohl das Hauptglied 15, als das Grenzband ST (15) von dem aus u zur Ecke $1'55'1$ gehenden Stral in m gehalten. Die Bänder der entsprechenden Ecken von C , D sind (110) Stralen von u . Man hat nun aus den Ecken von C oder D (110) die gegenfolgend bildhaften Stabdreiecke

$$S13 \text{ ++ } T61, \quad S12 \text{ ++ } T71,$$

$$S53 \text{ ++ } T65, \quad S52 \text{ ++ } T75,$$

$$S32 \text{ ++ } T76.$$

Ferner

$$1'5'2'S' \vdash 157\infty, \text{ also (64)}$$

$$\text{I. } 5'1'S'2' \vdash 157\infty,$$

$$1'5'3'S' \vdash 156\infty, \text{ also (64)}$$

$$\text{II. } 5'1'S'3' \vdash 156\infty.$$

Die Bildungsstäbe von I., II. enthalten die Ecken (74)

$$5'7S'1, 1'7S'5, 5'51'1 = u, 2',$$

$$5'6S'1, 1'6S'5, 5'51'1 = u, 3',$$

also liegen $5'7S'1, 1'7S'5$ in $2'2$,

$5'6S'1, 1'6S'5$ in $3'3$,

also geben nach (31) die Ecken:

$$5'7S'1 \dots S'5'2' \vdash 172,$$

$$1'7S'5 \dots S'1'2' \vdash 572,$$

$$5'6S'1 \dots S'5'3' \vdash 163,$$

$$1'6S'5 \dots S'1'3' \vdash 563.$$

Man hat also die bildhaften Stabdreiecke

$$S12 \vdash T71 \vdash 572,$$

$$S13 \vdash T61 \vdash 563,$$

$$S52 \vdash T75 \vdash 172,$$

$$S53 \vdash T65 \vdash 163.$$

Demnach sind Flächenecken (109)

2 von 15, $S7$,

6 von 15, $T3$,

3 von 15, $S6$,

7 von 15, $T2$.

Hier heissen $ST, 27, 1$

$ST, 27, 5$

$ST, 36, 1$

$ST, 36, 5$

Wechselfünfecke.

In ihnen werden, wenn das Hauptglied 15 gegeben ist, die Theile der übrigen Glieder $ST, 27, 36$ durch *einnamigen Schnitt*, d. h. durch einen Durchschnitt von Stäben oder Stralen bestimmt.

Hingegen wenn die Glieder $ST, 27, 36$ gegeben sind, so wird das Hauptglied 15 durch *zweinamigen Schnitt*, d. h. durch Verbindung eines Kreises oder Abkreises mit Stäben und Stralen bestimmt.

Es seien die Ecken

$$1'27'7 = c, 1'36'6 = d,$$

so schneiden in der Vierseitung $1'ucd$ auf dem Doppelstab A die Stralen $1'd, uc$ das Glied 37, die Stralen $1'c, ud$ das Glied 26, der Stral $u1'$ die Ecke 1 ab. Aber die Glieder 37, 26, 15 machen eine Flächung. Also (106) schnei-

det der Stral cd die Ecke 5 ab. Also sind stabhafte Ecken

$1'27'7, 1'36'6, 5.$

Aber $572 \parallel T'7'1', 563 \parallel T'6'1'.$

Also (32) liegt $T'5$ in $1'27'7$ und $1'36'6.$

Hieraus ergeben sich folgende stabhafte Ecken:

$1'27'7,$	$1'36'6,$	$T', 5,$
$5'27'7,$	$5'36'6,$	$T', 1,$
$2'17'7,$	$3'16'6,$	$T, 5',$
$2'57'7,$	$3'56'6,$	$T, 1',$
$1'72'2,$	$1'63'3,$	$S', 5,$
$5'72'2,$	$5'63'3,$	$S', 1,$
$7'12'2,$	$6'13'3,$	$S, 5',$
$7'52'2,$	$6'53'3,$	$S, 1'.$

Hieraus folgen ebenfalls Bestimmungen des Grenzgliedes $ST.$

Auf die angezeigte Art lassen sich zu den sechs Bildgleichungen (106)

$1532 \parallel$	$1567, \parallel$	$1536 \parallel$	$1527,$
$2613 \parallel$	$2675, \parallel$	$2617 \parallel$	$2635,$
$3712 \parallel$	$3756, \parallel$	$3725 \parallel$	3716

die Grenzglieber ST finden, die jedesmal verschieden sein werden, doch so, dass die Mitte des Grenzgliebes der ersten und zweiten in die Mitte von 15, der dritten und vierten in die Mitte von 26, der fünften und sechsten in die Mitte von 37 fallen.

113.

Bei der Flächung eines Doppelstabes ist das Stabdreieck der Gliedermitten demjenigen Stabdreieck bildhaft, welches die Grenzecke des Hauptgliedes mit den Ecken der Nebenglieder macht.

Es seien m, n, o die Mitten der Glieder 15, 26, 37. In dem Bildungsstabe ST liegt (110) die Ecke $3'72'6 = c.$ Der Stral uc treffe den zeilenhaften Bildstab B in $d,$ den Stral $S'm$ in $f.$ Die Mitte m von 15 ist (112) auch die Mitte des Grenzbandes $ST.$ Also (42) schneiden die von S' nach $STmd$ gezogenen Stralen auf dem Stabe uc die Gleichmessung uc, fd ab. Die von $2'$ nach 26, nd oder nach uc, nd gehenden Stralen und die von $3'$ nach 37, od oder nach uc, od gehenden Stralen machen eine

Gleichmessung. Also liegen die Stralen $S'm$, $2'n$, $3'o$ in der Ecke f . Also

$$\begin{aligned} mno & \parallel S'2'3', \\ \text{also } mno & \parallel S23 \parallel T67. \end{aligned}$$

114.

Bei der einfachen Flächung eines Doppelstabes sind die Abstände der Grenzecken von den Gliederecken einander und dem doppelten Mittelbände gleich.

Es sei 15, 26, $h\infty$ eine einfache Flächung eines Doppelstabes, so ist

$$\begin{aligned} 152\infty & \parallel 15h6, \\ 156\infty & \parallel 15h2, \\ 261\infty & \parallel 26h5, \\ 265\infty & \parallel 26h1. \end{aligned}$$

Die Grenzecken dieser Bildgleichungen seien S , S' , S'' , S''' . Aus der Zeile des Doppelstabes erhält man:

$$\begin{aligned} 1'5'h'6' & \parallel 152\infty, \\ 1'5'h'2' & \parallel 156\infty, \\ 2'6'h'5' & \parallel 261\infty, \\ 2'6'h'1' & \parallel 265\infty. \end{aligned}$$

Die Ecken der Bildungsstäbe sind:

$$\begin{aligned} 1'55'1, & 1'2h'1, & 5'2h'5, & 6', \\ 1'55'1, & 1'6h'1, & 5'6h'5, & 2', \\ 2'66'2, & 2'1h'2, & 6'1h'6, & 5', \\ 2'66'2, & 2'5h'2, & 6'5h'6, & 1'. \end{aligned}$$

Die zweiten Grenzecken der Bildgleichungen sind also der Reihe nach 6, 2, 5, 1, oder die Grenzglieber sind $S6$, $S'2$, $S''5$, $S'''1$.

Aus den bezeichneten Ecken der Bildungsstäbe folgen unmittelbar die bildhaften Stabdreiecke:

$$\begin{aligned} S12 & \parallel 6h1 \parallel 5h2, & S52 & \parallel 6h5 \parallel 1h2, \\ S'16 & \parallel 2h1 \parallel 5h6, & S'56 & \parallel 2h5 \parallel 1h6, \\ S''21 & \parallel 5h2 \parallel 6h1, & S''61 & \parallel 5h6 \parallel 2h1, \\ S'''25 & \parallel 1h2 \parallel 6h5, & S'''65 & \parallel 1h6 \parallel 2h5. \end{aligned}$$

Die Ecken der einfachen Flächung sind also ebenfalls Flächenecken einfacher Flächungen, und zwar

$$\begin{aligned} 2 & \text{ von } 15, S_h, \\ 6 & \text{ von } 15, S'h, \\ 1 & \text{ von } 26, S''h, \\ 5 & \text{ von } 26, S'''h. \end{aligned}$$

Es seien m, n die Mitten der Glieder 15, 26, so ist auch

m die Mitte der Glieder S_6, S'_2 ,
 n die Mitte der Glieder S'''_5, S''_1 .

Da S_6 das Doppelte von m_6 ,
 26 das Doppelte von n_6 ,
 so ist S_2 das Doppelte von mn ,
 ebenso S'_6 das Doppelte von mn ,
 S''_1 das Doppelte von mn ,
 S'''_5 das Doppelte von mn .

115.

Wenn zwei Gleichmessungen ein gemeinsames Glied haben, so bildet es Flächungen mit den wechselnamigen Theilen der andern beiden Glieder.

Die Theile des gemeinsamen Gliedes bilden Doppelflächungen mit den andern Gliedern.

In W seien $12, 56$ }
 $34, 56$ } Gleichmessungen,

so ist $(66, 68) \begin{matrix} 5612 \\ 5612 \end{matrix} \begin{matrix} ++ \\ ++ \end{matrix} \begin{matrix} 5634, \\ 5643, \end{matrix}$

also $(106) \begin{matrix} 56, 14, 23 \\ 56, 13, 24 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \end{matrix} \text{Flächungen.}$

Aus der ersten folgt

$1436 \begin{matrix} ++ \\ \end{matrix} 1452,$

aus der andern folgt

$1346 \begin{matrix} ++ \\ \end{matrix} 1352;$

aus der ersten folgt

$1435 \begin{matrix} ++ \\ \end{matrix} 1462,$

aus der andern folgt

$1345 \begin{matrix} ++ \\ \end{matrix} 1362;$

hieraus wiederum $1245 \begin{matrix} ++ \\ \end{matrix} 1253$

und $1246 \begin{matrix} ++ \\ \end{matrix} 1263,$

also sind $(106) \begin{matrix} 12, 34, 55 \\ 12, 34, 66 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \end{matrix} \text{Doppelflächungen.}$

116.

Wenn drei Gleichmessungen ein gemeinsames Glied haben, so bilden die drei andern Glieder eine Flächung.

In W seien die Gleichmessungen:

12, 34,

12, 56,

12, 78,

so folgen hieraus die Doppelflächungen

11, 34, 78,

11, 56, 78.

Also 7813 $\dagger$ 7841 $\dagger$ 8714,

7815 $\dagger$ 7861 $\dagger$ 8716.

Es sei U beliebig, und in U seien 1'3'5'7'8', so dass 1'1, 3'3, 5'5, 7'7, 8'8 in u liegen, wo u beliebig ist. Dann ist

7'8'1'2' $\dagger$ 8712,

7'8'1'3' $\dagger$ 8714,

7'8'1'5' $\dagger$ 8716.

Die Bildungsstäbe (Bildungsecken) dieser Bildgleichungen enthalten die Ecken (Stralen)

7'78'8, 7'11'8, 1'22'1,

7'78'8, 7'11'8, 7'43'8,

7'78'8, 7'11'8, 7'65'8.

Da die beiden ersten Ecken (Stralen) gemeinsam sind, so fallen die Bildungsstäbe (Bildungsecken) zusammen.

Dieser gemeinsame Bildungsstab (Bildungsecke) H enthält also die Ecken (Stralen)

7'78'8, 7'43'8, 7'65'8.

Also 7'8'3'5' $\dagger$ 8746 $\dagger$ 7864,

also 7835 $\dagger$ 7864,

also 34, 56, 78 eine Flächung.

Ausserdem folgen aus den drei angenommenen Gleichmessungen die Flächungen

11, 34, 56

11, 34, 78

11, 56, 78,

22, 34, 56

22, 34, 78

22, 56, 78,

12, 36, 45

12, 38, 47

12, 58, 67,

12, 35, 46

12, 37, 48

12, 57, 68.

Sonderfall.

Auf dem Doppelstabe seien die Gleichmessungen

12, 34,

12, 56;

die Mitten dieser Glieder 12, 34, 56 seien a, b, c ,

so ist $345\infty \parallel 34a6$. . Grenzecke S ,

$346\infty \parallel 34a5$. . „ S' ,

$563\infty \parallel 56a4$. . „ S'' ,

$564\infty \parallel 56a3$. . „ S''' ,

so ist b die Mitte von $S6$, $S'5$,

$\overset{c}{S5} = S'6 = S''3 = S'''4 =$ dem doppelten bc ,

und es sind Flächenecken:

3 von 56, $S''a$,

4 „ 56, $S'''a$,

5 „ 34, Sa ,

6 „ 34, $S'a$.

117.

Der Doppelschnitt hat ein Doppelglied, dessen beide Theile derselben Bildgleichung entsprechen. Das Doppelglied macht mit jedem der drei Paare wechselnamiger Glieder eine Flächung.

In U seien a , b , c .

In V seien u , v .

In W seien 123, 567, so dass

$a1$, $b2$, $c3$ in u ,

$a5$, $b6$, $c7$ in v .

Es seien $WU = 4$, $WV = 8$.

Dann ist (45, 56)

an u . . $abc4 \parallel 1234$,

an v . . $abc4 \parallel 5674$.

Die Bildgleichung des Doppelschnitts ist also

$1234 \parallel 5674$.

Es seien $ua2v = w$, $u5bv = x$, so liegt (73) wx in $ab25 = 4$.

Es sei also $w3 = Y$, $w4 = Z$, $VY = y$, $VZ = z$, so ist (45, 56)

an v . . $5674 \parallel abc4$,

an u . . $abc4 \parallel 1234$,

an w . . $1234 \parallel uvzy$.

Also (44, 59) $5674 \parallel uvzy$.

Aber $u5$, $v6$, $z4$ liegen in x .

Also (48, 57) liegt $y7$ in x .

Also (45, 56)

$$\begin{aligned} \text{an } w & \dots 1238 \quad \vdash \quad uv8, \\ x & \dots uv8 \quad \vdash \quad 5678, \\ \text{also } & 1238 \quad \vdash \quad 5678. \end{aligned}$$

Der Doppelschnitt hat also ein Doppelglied 48, dessen beide Theile derselben Bildgleichung entsprechen:

$$\begin{aligned} 1234 & \vdash 5674, \\ 1238 & \vdash 5678. \end{aligned}$$

Der Doppelschnitt hat drei Flächungen zwischen den wechselnamigen Gliedern, nämlich (106)

$$\begin{aligned} \text{aus } abuv & \dots 16, 25, 48 \\ \text{aus } bcuv & \dots 27, 36, 48 \\ \text{aus } acuv & \dots 17, 35, 48 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{aus } abuv \\ \text{aus } bcuv \\ \text{aus } acuv \end{aligned}} \right\} \text{Flächungen.}$$

Diesen Flächungen entsprechen die Bildgleichungen:

$$\begin{aligned} 4812 & \vdash 4856, \\ 4823 & \vdash 4867, \\ 4831 & \vdash 4875, \\ 4815 & \vdash 4826, \\ 4826 & \vdash 4837, \\ 4837 & \vdash 4815. \end{aligned}$$

118.

Der Wechselschnitt entsteht aus dem Doppelschnitt, wenn zwei Wechseltheile zusammenfallen.

In U liegen a, b, c .

In V liegen u, v .

In W liegen 123, 561, so dass

$$a1, b2, c3 \text{ in } u, \quad a5, b6, c1 \text{ in } v.$$

Die beiden Wechseltheile 17 des Doppelschnitts fallen also zusammen. Es seien

$$WU = 4, \quad WV = 8, \text{ so ist (45, 56)}$$

$$\begin{aligned} \text{an } u & \dots abc4 \quad \vdash \quad 1234, \\ \text{an } v & \dots abc4 \quad \vdash \quad 5614, \\ \text{also } & \dots 1224 \quad \vdash \quad 5614. \end{aligned}$$

Es seien $ua2v = w$, $u5bv = x$, so liegt (73) wx in $ab25 = 4$.

Es seien $w3 = Y$, $w4 = Z$, $VY = y$, $VZ = z$, so ist (45, 56)

$$\begin{aligned} \text{an } v & \dots 5614 \quad \vdash \quad abc4, \\ \text{an } u & \dots abc4 \quad \vdash \quad 1234, \end{aligned}$$

an w . . 1234 $\dagger\dagger$ $uvyz$,
also . . 5614 $\dagger\dagger$ $uvyz$.

Aber $u5$, $v6$, $z4$ in x ,
also (48, 57) $y1$ in x .

Also (45, 56)

an w . . 1238 $\dagger\dagger$ $uvy8$,
an x . . $uvy8$ $\dagger\dagger$ 5618,
also 1238 $\dagger\dagger$ 5618.

Also hat der Wechselschnitt ein Doppelglied 48, dessen beide Theile derselben Bildgleichung entsprechen:

1234 $\dagger\dagger$ 5614,
1238 $\dagger\dagger$ 5618.

Der Wechselschnitt hat drei Flächungen, darunter eine Doppelflächung, nämlich (106)

aus $abuv$. . 16, 25, 48,
aus $bcuv$. . 12, 36, 48,
aus $acuv$. . 11, 35, 48.

Diesen Flächungen entsprechen die Bildgleichungen

4812 $\dagger\dagger$ 4856,
4823 $\dagger\dagger$ 4861,
4831 $\dagger\dagger$ 4815,
4826 $\dagger\dagger$ 4815,
4826 $\dagger\dagger$ 4831.

119.

Die Doppelflächung entsteht aus der vollständigen Flächung durch Vereinigung der beiden Theile eines Gliedes.

Die Doppelflächung entsteht aus dem Doppelschnitt durch Vereinigung zweier Paare Wechseltheile.

Der Doppelflächung entspricht nur ein einziges Doppelglied.

In U seien abc .

In V seien u , v .

In W seien 123, 361,

so dass $a1$, $b2$, $c3$ in u ; $a3$, $b6$, $c1$ in v liegen. Aus dem Doppelschnitt (117) ist also der Theil 5 mit dem Wechseltheil 3, der Theil 7 mit dem Wechseltheil 1 vereinigt.

Es seien $WU = 4$, $WV = 8$, so ist (45, 58)

$abc4$ $\dagger\dagger$ 1234, $abc4$ $\dagger\dagger$ 3614.

Die Bildgleichung des Doppelschnitts ist also:

$$\begin{aligned} &1234 \dashv\vdash 3614, \\ &\text{oder } 1324 \dashv\vdash 3164, \\ &\text{oder } (43, 64) \ 1324 \dashv\vdash 1346, \\ &\text{also } (106) \ 13, 26, 44 \end{aligned}$$

eine Doppelflächung, deren Doppeltheil (Ecke oder Stral) 4 ist.

Es seien $ua2v = w$, $u3bv = x$, so liegt (73) wx in $ab23 = 4$.

Es seien also:

$$\begin{aligned} w3 &= Y, \ w4 = Z, \ VY = y, \ VZ = z, \text{ so ist } (45, 56) \\ &\text{an } v \ . \ . \ 3614 \dashv\vdash abc4, \\ &\text{an } u \ . \ . \ abc4 \dashv\vdash 1234, \\ &\text{an } w \ . \ . \ 1234 \dashv\vdash uvzy, \\ &\text{also } (44, 59) \ . \ . \ 3614 \dashv\vdash uvzy. \end{aligned}$$

Aber $u3$, $v6$, $z4$ liegen in x .

Also liegt $y1$ in x . Also (45, 56)

$$\begin{aligned} &\text{an } w \ . \ . \ 1238 \dashv\vdash uvy8, \\ &\text{an } x \ . \ . \ uvy8 \dashv\vdash 3618, \\ &\text{also } \ . \ . \ 1238 \dashv\vdash 3618, \\ &\text{oder } \ . \ . \ 1328 \dashv\vdash 3168, \\ &\text{oder } \ . \ . \ 1328 \dashv\vdash 1386, \\ &\text{also ist } (106) \ 13, 26, 88 \end{aligned}$$

eine Doppelflächung, deren Doppeltheil 8 ist.

Die Doppelflächung hat also zwei Doppeltheile 4 und 8, welche derselben Bildgleichung entsprechen und das Doppelglied 48 bilden.

$$\begin{aligned} &\text{Da } 13, 26, 44 \\ &\quad 13, 26, 88 \\ &\text{so sind } (108) \ 13, 44, 88 \\ &\quad \text{und } 26, 44, 88 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &\text{Da } 13, 26, 44 \\ &\quad 13, 26, 88 \\ &\text{so sind } (108) \ 13, 44, 88 \\ &\quad \text{und } 26, 44, 88 \end{aligned}} \right\} \text{Flächungen.}$$

$$\begin{aligned} &\text{Also } (106) \ 1348 \dashv\vdash 1384, \\ &\quad 2648 \dashv\vdash 2684. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Also } (66) \ 13, 48 \\ &\quad 26, 48 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &\text{Also } (66) \ 13, 48 \\ &\quad 26, 48 \end{aligned}} \right\} \text{Gleichmessungen.}$$

Ferner sind nach (106)

$$\begin{aligned} &\text{aus } abuv \ . \ . \ 16, 23, 48 \\ &\text{aus } bcuv \ . \ . \ 12, 36, 48 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &\text{aus } abuv \ . \ . \ 16, 23, 48 \\ &\text{aus } bcuv \ . \ . \ 12, 36, 48 \end{aligned}} \right\} \text{Flächungen.}$$

In W sei f beliebig und mnh so angenommen, dass:

$$\begin{aligned} &fm, 13 \\ &fn, 26 \\ &fh, 48 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &fm, 13 \\ &fn, 26 \\ &fh, 48 \end{aligned}} \right\} \text{Gleichmessungen.}$$

Verbindet man damit die

13, 48 } Gleichmessungen,
27, 48 }

so sind (115)

$fm, 11, 48$
 $fm, 33, 48$
 $fn, 22, 48$
 $fn, 66, 48$
 $fh, 13, 44$
 $fh, 13, 88$
 $fh, 26, 44$
 $fh, 26, 88$ } Doppelflächungen,

also (108) $fh, 13, 26$ Flächung.

In W seien noch k, l so angenommen, dass

$fk, 16, 23$
 $fl, 12, 36$ } Flächungen,

so sind (108) $fk, 16, 48$
 $fk, 23, 48$
 $fl, 12, 48$
 $fl, 36, 48$ } Flächungen.

Es seien:

13, 26, 44
13, 26, 88
zugleich auch 13, 26, 4'4'
13, 26, 8'8' } Doppelflächungen,

wo 4 und 4', ebenso 8 und 8' einerlei Lage haben sollen.

Es sei $u4'cb = d, v4'cb = f,$

$u8'cb = g, v8'cb = h.$

Also ist

an u . . 324'1 ++ cbda ++ adbc,

328'1 ++ cbga ++ agbc,

an v . . 34'61 ++ afbc,

38'61 ++ ahbc.

Aber 324'1 ++ 34'61, 328'1 ++ 38'61,

also adcb ++ afbc, agbc ++ ahbc,

also fallen d, f zusammen und g, h zusammen. Also fallen 4' und 4, ebenso 8' und 8 zusammen.

120.

Auf dem Doppelstabe wird die Doppelflächung durch ihre Grenzecken auf Wechselvierecke oder Wechsel-
fünfecke zurückgeführt.

Es sei das Grenzglied ST zu bestimmen, welches sich in der Doppelflächung 13, 26, 44 auf die Doppelecke 4 bezieht.

Die aus einer beliebigen Ecke u zu 13, 26, 44 gezogenen Stralen schneiden eine beliebige Zeile des Doppelstabes in $1'3'$, $2'6'$, $4'$. Dann ist auch $1'3'$, $2'6'$, $4'4'$ eine Doppelflächung. Die Stralen $2'2$, $6'4$ schneiden das Glied $2'6'$ ab. Die Stralen $1'4$, $3'4$ schneiden das Glied $1'3'$ ab. Das Band der Ecken $6'43'4 = 4$, und $1'12'2 = u$ ist ein Stral der Doppelecke $4'$. Also ist auch das Band der Ecken $6'41'1 = a'$, $2'23'4 = c'$ ein Stral der Doppelecke $4'$.

Die Stralen $4'1$, $3'3$ schneiden das Glied 13 ab. Die Stralen $4'2$, $6'6$ schneiden das Glied 26 ab. Das Band der Ecken $4'14'2 = 4'$ und $3'36'6 = u$ ist ein Stral der Doppelecke 4. Also ist auch das Band der Ecken $4'16'6$, $4'23'3$ ein Stral der Doppelecke 4.

Es seien die Ecken $6'44'1 = a$, $4'23'4 = c$, so sind (75) bei dem in u stralenhaften Sechseck $14'2$, $a'4c'$ die Ecken $14'a'4 = a$, $4'24c' = c$, $12a'c' = S$ stabhaft.

Also sind die Bänder der Ecken

$$\begin{aligned} 6'44'1 &= a \text{ und } 4'23'4 = c, \\ 6'41'1 &= a' \text{ und } 2'23'4 = c' \end{aligned}$$

Stralen der Grenzecke S .

Der Bildungsstab ac treffe den Stral $4'4$ in d . In der Vierseitung der Stralen ua' , $u4$, Sa' , $S4$ machen die aus S nach $ua'al$ gezogenen Stralen eine Gleichmessung. Also ist das Stabviereck ud , $4'4$ eine Gleichmessung. Also ist die Doppelecke 4 die Mitte des Grenzgliebes ST . Der Bildungsstab, welcher der Grenzecke S und den Stabdreiecken $6'4'3'$ und 142 entspricht, enthält die Ecken $6'44'1 = a$, $6'23'1 = b$, $4'23'4 = c$. Die Ecken a , c , a' , c' geben nun die Bildgleichungen:

$$\begin{aligned} S14 \text{ ++ } T46 \text{ ++ } 416, \quad S24 \text{ ++ } T43 \text{ ++ } 423, \\ S12 \text{ ++ } T36. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Ecken 1 und 3 ergibt sich noch ein zweites Grenzglied $S'T'$, dessen Mitte die Doppelecke 4 ist. Es entspricht den Dreiecken $6'4'1'$, 342 und hat die Ecken $6'44'3$, $6'21'3$, $4'21'4$, und dafür die Bildgleichungen:

$$\begin{aligned} S'34 \text{ ++ } T'46 \text{ ++ } 436, \\ S'24 \text{ ++ } T'41 \text{ ++ } 421, \quad S'32 \text{ ++ } T'16. \end{aligned}$$

Hier sind Flächenecken:

1 von S_6 , 44; 3 von T_2 , 44,
 2 von S'_1 , 44; 6 von T'_3 , 44,
 1 von T'_2 , 44; 3 von S'_6 , 44,
 2 von S_3 , 44; 6 von T_1 , 44.

Es seien m, n die Mitten der Glieder 13, 26, so folgt aus (113)

$$S_{12} \vdash T_{36} \vdash 4mn, \\ S'_{32} \vdash T'_{16} \vdash 4mn.$$

Es sei von den Bildgleichungen

1324 $\vdash$ 1346 das Grenzglied $S''T''$,
 2614 $\vdash$ 2645 das Grenzglied $S'''T'''$.

Diese Grenzglieder ergeben sich wie in (111) und geben

$$S''_{12} \vdash T'_{41} \vdash 342, \quad S''_{14} \vdash T'_{61} \vdash 364, \\ S''_{32} \vdash T'_{43} \vdash 142, \quad S'_{34} \vdash T'_{63} \vdash 164, \\ S'''_{24} \vdash T'''_{32} \vdash 634, \quad S'''_{21} \vdash T'''_{42} \vdash 641, \\ S'''_{64} \vdash T'''_{36} \vdash 234, \quad S'''_{61} \vdash T'''_{46} \vdash 241.$$

Hier sind Flächenecken:

4 von 13, S''_6 ; 13, T'_2 ; 26, S'''_3 ; 26, T''_1 ;
 1 von 26, S'''_4 ; 3 von 26, T'''_4 ;
 2 von 13, S''_4 ; 6 von 13, T'_4 .

Die Flächenecke h der Glieder 13, 26; 13, 44; 13, 88; 26, 44; 26, 88 wird abgeschnitten von dem Bildungsstab der Bildgleichungen

$$1'3'2'4' \vdash 3164 \text{ oder } 2'6'1'4' \vdash 6234.$$

Dieser Bildungsstab ist ein Stral der Ecke u und enthält die Ecken:

$$1'62'3, 1'44'3, 3'62'1, 3'44'1, 2'44'6, 6'31'2, 6'44'2.$$

Endlich ist noch

$$S''_{24} \vdash T'_{64} \vdash mn4, \\ S'''_{14} \vdash T'''_{34} \vdash nm4.$$

121.

Das Wechselfünfeck besteht aus zwei bildhaften Stabdreiecken, in denen eine Wechselecke gemeinsam ist. Die Bestimmung des Doppelgliedes eines Wechselfünfecks heisst in der alten Bildlehre die Auflösung der zweinamigen (quadratischen) Gleichung

Das Hauptglied und Doppelglied haben einerlei Mitte.

Im Stabe U seien die Ecken abc .

Im Stabe V seien die Ecken uv .

Im Doppelstabe W seien die Ecken 2356.

Es seien au , cv Zeilen zum Doppelstabe.

Es seien $b2c3 = u$, $a5b6 = v$.

Es seien $WU = 4$, $WV = 8$. Dann ist:

$$\begin{aligned} u & \dots 324\infty \vdash\vdash cb4a, \\ v & \dots a4bc \vdash\vdash 546\infty, \\ & \text{also } 324 \vdash\vdash 546. \end{aligned}$$

Es seien $ua2v = w$, $u5bv = x$, so liegt (73) wx in $ab25 = 4$. Es sei also

$w3v8 = y$, $w4v8 = z$, so ist

$$\begin{aligned} v & \dots 56\infty4 \vdash\vdash abc4, \\ u & \dots abc4 \vdash\vdash \infty234, \\ w & \dots \infty234 \vdash\vdash uvzy, \\ & \text{also } 56\infty4 \vdash\vdash uvzy. \end{aligned}$$

Aber $u5$, $v6$, $z4$ liegen in x .

Also ist xy die Zeile zum Doppelstabe. Also:

$$\begin{aligned} w & \dots 328\infty \vdash\vdash yv8u, \\ x & \dots u8vy \vdash\vdash 586\infty, \\ & \text{also } 328 \vdash\vdash 586. \end{aligned}$$

Das Wechselfünfeck hat also ein Doppelglied 48, dessen Ecken derselben Bildgleichung entsprechen:

$$324 \vdash\vdash 546, \quad 328 \vdash\vdash 586.$$

In $acuv$, $uwxv$ sind ua , vc , uw , xy Zeilen des Doppelstabes, also (15) haben das Doppelglied 48 und das Hauptglied 35 einerlei Mitte.

Ferner sind (109)

$$\left. \begin{array}{l} \text{aus } abuv \dots \infty6, 52, 48 \\ \text{aus } bcuv \dots \infty2, 36, 48 \end{array} \right\} \text{ einfache Flächungen.}$$

Oder es sind Flächenecken:

$$2 \text{ von } 36, 48; \quad 6 \text{ von } 52, 48.$$

Hier heisst 26 das Nebenglied.

Wenn in der allgemeinen Bildgleichung des Doppelschnitts (117) auf dem Stabe

$$\begin{aligned} & 1234 \vdash\vdash 5674, \\ & 1238 \vdash\vdash 5678 \end{aligned}$$

die Wechselecken 1, 7 ins Unendliche rücken, so entsteht das Wechselfünfeck.

Wenn bei dem Wechselfünfeck eine Nebenecke in eine Hauptecke fällt, z. B. 2 in 5 oder 6 in 3, so entsteht das einfache Wechselfünfeck.

Wenn die beiden Hauptecken des Wechselfünfecks, 35, zusammenfallen, so entsteht das *Wechselviereck* (109).

122.

Das Wechselviereck besteht aus zwei bildhaften Stabdreiecken, in denen eine gleichnamige und eine Wechselcke gemeinsam sind.

Die Mitte des Doppelgliedes ist die Flächenecke. Die Hälfte des Doppelgliedes heisst die Flächenseite.

Dem Wechselviereck entspricht nur ein einziges Doppelglied.

Wenn auf zwei Stäben Wechselvierecke sind, die Ecke der Stäbe die Hauptecke beider Wechselvierecke ist, die Bänder der Nebenglieder Zeilen sind, so sind auch die Bänder der Doppelglieder Zeilen derselben.

Im Stabe U seien die Ecken abc .

Im Stabe V seien die Ecken uv .

Im Doppelstabe W seien die Ecken 236.

Es seien au , cv Zeilen zum Doppelstabe.

Es seien $a3$, $b6$ Stralen von v .

Es seien die Ecken $WU = 4$, $WV = 8$.

Dann ist an

$u \dots 324\infty \vdash cb4a$, $v \dots a4bc \vdash 346\infty$,

also $\dots 324 \vdash 346$,

und (106) $\dots 2634 \vdash 264\infty$.

Es seien die Ecken $ua2v = w$, $u3bv = x$, so liegt (73) wx in $ab23 = 4$. Es sei also $w3v8 = y$, $w4v8 = z$, so ist

an $v \dots 36\infty4 \vdash abc4$,

an $u \dots abc4 \vdash \infty234$,

an $w \dots \infty234 \vdash uvzy$,

also $\dots 36\infty4 \vdash uvzy$.

Aber $u3$, $v6$, $z4$ liegen in x . Also ist xy die Zeile zum Doppelstabe. Also

an $w \dots 328\infty \vdash yv8u$,

an $x \dots u8vy \vdash 386\infty$,

also $\dots 328 \vdash 386$

und (106) $\dots 2638 \vdash 268\infty$.

Das Wechselviereck hat also ein Doppelglied 48, dessen Ecken derselben Bildgleichung entsprechen:

$324 \vdash 346$, $328 \vdash 386$.

In $acuv$, $uwxv$ sind ua , vc , uw , xy Zeilen des Doppelstabes, also (15) ist die Hauptecke 3 die Mitte des Doppelgliedes 48. Das halbe Doppelglied 34 oder 38 heisst die *Flächenseite* des Wechselvierecks (109).

Es sind $\infty 3, 26, 44$

$\infty 3, 26, 48$ einfache Flächungen,

also (108) 26, 44, 88 eine Doppelflächung,

also (106) 2648 $\dagger$ 2684.

Also (66) . . 26, 48 eine Gleichmessung.

Das Glied 26 heisst das *Nebenglied*.

Ferner ergeben sich (109)

aus $abuv$. . $\infty 6, 32, 48$

aus $bcuv$. . $\infty 2, 36, 48$

einfache Flächungen

Also sind Flächenecken:

3 von 26, 44 und von 26, 88;

2 von 36, 48; 6 von 32, 48.

I.

Auf einer beliebigen Zeile des Doppelstabes seien $2'3'4'6'$ so, dass $2'2$, $3'3$, $4'4$, $6'6$ in u liegen, wo u beliebig. Die auf die Doppelecke 4 sich beziehenden Grenzecken seien S , S' . Eine aus $2'66'2$ zum Doppelstabe gezogene Zeile treffe $4'4$ in d .

Der Bildungsstab von S entspricht (120) den Dreiecken $6'4'3'$, $\infty 42$, und enthält also die Ecken $4'23'4$, $6'$, d .

Der Bildungsstab von S' entspricht (120) den Dreiecken $2'4'3'$, $\infty 46$, und enthält also die Ecken $4'63'4$, $2'$, d .

Hieraus folgen die Bildgleichungen:

$$S24 \dagger 643 \dagger 423,$$

$$S'46 \dagger 234 \dagger 436.$$

Also (41) 4 die Mitte von $S6$, $S'2$.

Es sei S'' die Grenzecke der Bildgleichung

$$2634 \dagger 264\infty,$$

so enthält der Bildungsstab die Ecken

$$2'66'2, 2'43'2, 6'43'6,$$

$$\text{also } S''46 \dagger 463 \dagger 243,$$

also haben $S''4$, 26 einerlei Mitte 12.

II.

Es seien $324 \dagger 346$,

und $324' \dagger 34'6$,

wo 4, 4' zwischen 26 liegen sollen. Es seien ua, cv Zeilen zum Doppelstabe und $uacvb$ aus 3246 bestimmt. Es seien die Ecken $u4'cb = d, v4'cb = f$, so ist

$$\begin{aligned} \text{an } v \dots afbc & \parallel 34'6\infty, \\ & 34'6\infty \parallel 324'\infty, \\ \text{an } u \dots 324'\infty & \parallel cbda \parallel adbc, \\ \text{also } \dots afbc & \parallel adbc. \end{aligned}$$

Also fallen die Ecken d, f zusammen. Also fällt 4' in 4. Also ist zwischen 26 nur eine einzige Ecke 4, und ausserhalb 26 nur eine einzige Ecke 8 möglich, welche dem Wechselviereck entsprechen. Also hat das Wechselviereck nur ein einziges Doppelglied 48.

III.

Es seien auf zwei Doppelstäben, deren Ecke 3 ist, die Wechselvierecke 3246, 3157, so dass

$$324 \parallel 346, \quad 315 \parallel 357.$$

Es seien 12, 67 Zeilen. Man ziehe zu ihnen aus 4 die Zeile 45', so ist:

$$\begin{aligned} 324 & \parallel 315', \quad 346 \parallel 35'7, \\ \text{also } 315' & \parallel 35'7. \end{aligned}$$

Aber auch $315 \parallel 357$, also fällt 5' in 5. Also ist 45 die Zeile zu 12, 67.

123.

Das gleichmessende Stabviereck wird durch seine Mitten und Grenzecken auf Wechselvierecke zurückgeführt.

Es seien auf dem Doppelstabe die Glieder 12, 34 in Gleichmessung und a, b die Mitten von 12, 34. Es sei zum Doppelstabe eine Zeile gezogen, welche von den aus einer beliebigen Ecke u nach 1234 gezogenen Stralen in $1'2'3'4'$ getroffen wird. Dann ist

$$3'4'1'2' \parallel 4312.$$

Also liegen in $a'a$ die Ecken

$$3'11'4, \quad 3'22'4, \quad 4'11'3, \quad 4'22'3.$$

Da 12, 34 und 12, $a\infty$ Gleichmessungen sind, so ist

$$1234 \parallel 12a\infty, \quad 1243 \parallel 12a\infty,$$

$$\begin{aligned} \text{also } \infty 3, 12, a4 & \} \text{Flächungen.} \\ \text{und } \infty 4, 12, a3 & \} \end{aligned}$$

Also $314 \vdash 3a2$, $423 \vdash 4a1$,
 aber $a'1'3' \vdash a41$, $a'2'3' \vdash a42$,
 also $a13 \vdash a41 \vdash 243$,
 $a23 \vdash a42 \vdash 143$.

Ebenso

$b31 \vdash b23 \vdash 421$,
 $b41 \vdash b24 \vdash 321$.

Die Grenzecken können hier zuerst wie bei dem Wechselviereck genommen werden, da ∞a , 34, 11 und ∞a , 34, 22 Flächungen sind.

Die entsprechenden Grenzecken seien
 S, S', S'', T, T', T'' ,

so ist

1 die Mitte von $S4, S'3$,
 b „ „ „ $34, S''$,
 2 „ „ „ $T4, T'3$,
 6 „ „ „ $34, T''2$.

Alsdann hat man die Bildgleichungen

$S31 \vdash 41a \vdash 13a$, $S'14 \vdash 3a1 \vdash 1a4$,

$S'14 \vdash 14a \vdash 31a$;

$T'32 \vdash 42a \vdash 23a$, $T'24 \vdash 3a2 \vdash 2a4$,

$T''24 \vdash 24a \vdash 32a$.

Äehnliche Bildgleichungen ergeben sich für die Flächungen

∞b , 12, 33 und ∞b , 12, 44.

Aus der Gleichmessung 12, 34 folgen die Flächungen

11, 22, 34 und 33, 44, 12.

Man kann also jede Ecke als eine Ecke des Doppelgliedes einer Doppelflächung ansehen und hiernach für dieselbe (120) die Grenzecken bestimmen, wodurch sich eine neue Reihe von Bildgleichungen ergibt; z. B. es sei ST das auf 1 sich beziehende Grenzglied, so enthält der Bildungsstab von S die Ecken $2'11'4$, $2'23'4$, $1'23'1$, und 1 ist die Mitte von ST .

$S41 \vdash T12 \vdash 142$, $S21 \vdash T13 \vdash 123$,

$S42 \vdash T32 \vdash 1b2$.

124.

Der Doppelschnitt auf dem Doppelstabe wird durch seine Grenzecken auf Wechselvünfecke und Wechselvierecke zurückgeführt.

Der einfache Doppelschnitt auf dem Doppelstabe heisst in der Bildlehre des Apollonius die Sectio determinata.

Der allgemeine Doppelschnitt (117) hat die Bildgleichungen

$$1234 \mathrel{++} 5674, \quad 1238 \mathrel{++} 5678$$

und die hieraus abgeleiteten

$$4812 \mathrel{++} 4856,$$

$$4823 \mathrel{++} 4867,$$

$$4831 \mathrel{++} 4875.$$

Auf einer beliebigen Zeile des Doppelstabes seien $1'2'3'4'$ so, dass $1'1, 2'2, 3'3, 4'4$ in u , wo u beliebig. Dann sind (111)

$$1'62'5, \quad 1'73'5, \quad 2'73'6,$$

$$1'44'5, \quad 2'44'6, \quad 3'44'7,$$

$$1'88'5, \quad 2'88'6, \quad 3'88'7$$

Ecken eines Bildungsstabes C , welcher den Doppelstab in T , dessen Zeile in S' trifft. Es sei $S'S$ in u , so ist ST das Grenzglied der Bildgleichung. Das Doppelglied 48 hängt also von Wechselfünfecken (121) ab, deren Hauptglied das Grenzglied ST ist, nämlich:

$$S14 \mathrel{++} T45, \quad S24 \mathrel{++} T46, \quad S34 \mathrel{++} T47,$$

$$S18 \mathrel{++} T85, \quad S28 \mathrel{++} T85, \quad S38 \mathrel{++} T87.$$

Dieses Grenzglied ST der Bildgleichungen:

$$1234 \mathrel{++} 5674, \quad 1238 \mathrel{++} 5678$$

stimmt mit dem Grenzgliede der abgeleiteten:

$$4812 \mathrel{++} 4856,$$

$$4823 \mathrel{++} 4867,$$

$$4831 \mathrel{++} 4875$$

überein, wo (106)

$$16, 25, 48 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 16, 25, 48 \\ 27, 36, 48 \\ 17, 35, 48 \end{matrix}} \right\}$$

$$27, 36, 48 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 16, 25, 48 \\ 27, 36, 48 \\ 17, 35, 48 \end{matrix}} \right\}$$

$$17, 35, 48 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 16, 25, 48 \\ 27, 36, 48 \\ 17, 35, 48 \end{matrix}} \right\} \text{Flächungen.}$$

Es seien abc die Mitten der Glieder 16, 25, 48, so ist (113)

$$S12 \mathrel{++} T65 \mathrel{++} cab.$$

Hier sind S, T, a, b , also auch c durch einnamigen Schnitt aus 123567 gegeben.

Es sei h die Flächenecke der Glieder 16, 25, so ist (109) $\infty h, 16, 25$ eine Flächung, aber auch 48, 16, 25 eine Flächung,

also sind (108)

$$\left. \begin{array}{l} \infty h, 16, 48 \\ \infty h, 25, 48 \end{array} \right\} \text{ einfache Flächungen.}$$

Man bestimme die Ecke p so, dass

$$\infty h, 16, cp \text{ eine einfache Flächung,}$$

so sind (108)

$$\left. \begin{array}{l} \infty h, 25, cp \\ \infty h, 48, cp \end{array} \right\} \text{ einfache Flächungen.}$$

Aber c ist die Mitte von 48.

Also (123) $hp, 48$ eine Gleichmessung, und

$$ch4 \vdash c4p, \quad ch8 \vdash c8p.$$

Hierdurch ist der Doppelschnitt auf ein Wechselvier-eck (122) zurückgeführt.

$$\left. \begin{array}{l} \infty h, 16, 48 \\ \infty h, 25, 48 \end{array} \right\} \text{ Flächungen,}$$

so ist (106)

$$\begin{array}{ll} 486\infty \vdash 48h1, & 481\infty \vdash 48h6, \\ 485\infty \vdash 48h2, & 482\infty \vdash 48h5. \end{array}$$

Die Grenzecken dieser Bildgleichungen seien (114) S', S'', T', T'' . Da c als Mitte von 48 gegeben ist, und c die Mitte von $S'1, S''6, T'2, T''5$, so sind diese Grenzecken gegeben.

Man hat nun (114)

$$\begin{array}{ll} S'46 \vdash 1h4 \vdash 8h6, & S'86 \vdash 1h8 \vdash 4h6, \\ S''41 \vdash 6h4 \vdash 8h1, & S''81 \vdash 6h8 \vdash 4h1, \\ T'45 \vdash 2h4 \vdash 8h5, & T'85 \vdash 2h8 \vdash 4h5, \\ T''42 \vdash 5h4 \vdash 8h2, & T''82 \vdash 5h8 \vdash 4h2. \end{array}$$

Hierdurch ist der Doppelschnitt ebenfalls auf Wechsel-fünfecke (121) zurückgeführt.

Wenn in dem allgemeinen Doppelschnitt

$$1234 \vdash 5674$$

die Ecke 7 ins Unendliche rückt, so entsteht der *einfache Doppelschnitt*

$$1234 \vdash 56\infty 4,$$

welcher in der Bildlehre des Apollonius die *Sectio deter-minata* heisst und so ausgedrückt wurde: „auf dem Stabe 1256 eine Ecke 4 so zu bestimmen, dass ihre Flächen an den Gliedern 16, 25 ein gegebenes Verhältniss, wie 13 und 23 haben.“ Es sei hier ebenfalls h die Flächenecke der Glieder 16, 25, so sind

$$\left. \begin{array}{l} \infty h, 16, 25 \\ \infty h, 16, 48 \\ \infty h, 25, 48 \\ 16, 25, 48 \\ \infty 1, 35, 48 \\ \infty 2, 36, 48 \end{array} \right\} \text{Flächungen.}$$

Man ziehe zum Doppelstabe eine beliebige Zeile, nehme darauf $1'2'3'$, so dass $1'1, 2'2, 3'3$ in u liegen, wo u beliebig ist. Bei der Bildgleichung

$$1234 \vdash 56\infty 4$$

fällt (111) S' in $3'$, also S in 3, und T ist durch den von $1'62'5$ zu $3'$ gehenden Stral auf dem Doppelstabe gegeben.

Es seien abc die Mitten der Glieder 16, 25, 48, so ist (113)

$$312 \vdash T65 \vdash cab,$$

also (32) $3'c, 1'a, 2'b$ Stralen einer Ecke, wodurch c gegeben ist.

Da h die Flächenecke von 16, 25, so ist (109)

$$h12 \vdash h56,$$

also (32) $h'h, 1'5, 2'6$ Stralen einer Ecke, wodurch h gegeben ist.

Es sei h die Flächenecke von 16, cp , so ist (109)

$$h1c \vdash hp6,$$

also (32) $h'h, 1'p, c'6$ Stralen einer Ecke, wodurch p gegeben ist. Nun ist die Aufgabe auf ein Wechselviereck (122) zurückgeführt, so dass

$$ch4 \vdash c4p, \quad ch8 \vdash c8p.$$

Also müssen sein:

$$c'c, h'4, 4'p \text{ Stralen einer Ecke,}$$

$$c'c, h'8, 8'p \text{ Stralen einer Ecke.}$$

125.

Wenn die beiden Glieder einer Gleichmessung mit zwei andern Gliedern von gemeinschaftlichem Theil in Gleichmessung sind, so bildet das aus den beiden andern Theilen zusammengesetzte Glied mit jenen beiden Gliedern eine Flächung.

$$\left. \begin{array}{l} \text{In } W \text{ seien } 12, 34 \\ 12, 56 \\ 34, 57 \end{array} \right\} \text{Gleichmessungen,}$$

also (115) $\left. \begin{array}{l} 34, 25, 17 \\ 34, 11, 56 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$
 also $2514 \vdash 2537,$
 $6514 \vdash 6531.$

In 5 sei U beliebig, in U seien $1'2'3'6'$ so, dass $1'1,$
 $2'2, 3'3, 6'6$ in u liegen, wo u beliebig ist. Also ist an
 $1' \dots 2514 \vdash 22'ua, 6514 \vdash 66'uc,$
 also $2537 \vdash 22'ua, 6531 \vdash 66'uc;$
 aber $2'5u3 = 6'5u3 = 3',$
 also liegen $a7, c1$ in $3'.$

Also an $3' \dots 4371 \vdash 4bac,$
 $u \dots 4bac \vdash 4326,$
 also $\dots 4371 \vdash 4326,$

also 12, 34, 67 eine Flächung.

Es sei ferner

12, 34, 58 eine Flächung.

Nun sind (115)

$\left. \begin{array}{l} 34, 17, 25 \\ 34, 15, 27 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$

also $3415 \vdash 3482, 3425 \vdash 3481,$

und $3415 \vdash 3427, 3425 \vdash 3417,$

also $3482 \vdash 3427, 3481 \vdash 3417,$

also $34, 78, 11$

und $34, 78, 22 \left\} \text{Flächungen,}$

also $78, 11, 22$

also 12, 78 eine Gleichmessung.

Ebenso, da $12, 34, 58$

und (115) $\left. \begin{array}{l} 12, 35, 46 \\ 12, 36, 45 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$

so folgt $1235 \vdash 1284, 1245 \vdash 1283,$

$1235 \vdash 1246, 1245 \vdash 1236,$

also $1284 \vdash 1246, 1283 \vdash 1236,$

also $12, 68, 33$

$12, 68, 44 \left\} \text{Flächungen.}$

also $68, 33, 44$

Also 34, 68 eine Gleichmessung.

Umgekehrt sei 12, 78 eine Gleichmessung, so sind

78, 11, 22 }
34, 11, 22 } Flächungen,
also 78, 34, 11 }

also 3417 ++ 3481;

aber 12, 34, 67 eine Flächung,

also 3417 ++ 3462,

also 3462 ++ 3481,

also 3412 ++ 3486;

aber 12, 34 eine Gleichmessung,

also 34, 68 eine Gleichmessung.

126.

Wenn bei dem Fünfeck eines Doppelstabes vier Ecken in drei Gliederpaare vereinigt werden, und in Bezug auf die fünfte Ecke zu jedem Gliede die Spitze, zu jedem Gliederpaare die Flächenecke genommen wird, so sind immer zwei Spitzen und zwei Flächenecken in Gleichmessung.

Ein Gliederpaar und die beiden Flächenecken der andern beiden Gliederpaare machen eine Flächung.

Ein Glied eines Gliederpaares, das Flächenglied dieses Gliederpaares und die beiden Flächenecken der andern beiden Gliederpaare machen eine Flächung.

Das Fünfeck und die drei Flächenecken machen ein doppelbildhaftes Achteck.

Wenn bei der Fünfstrahlung einer Doppellecke vier Stralen in drei Gliederpaare vereinigt werden, und in Bezug auf den fünften Stral zu jedem Gliede der Wendestral, zu jedem Gliederpaar der Flächenstral genommen wird, so sind immer zwei Wendestralen und zwei Flächenstralen in Gleichmessung.

Ein Gliederpaar und die beiden Flächenstralen der andern beiden Gliederpaare machen eine Flächung.

Ein Glied eines Gliederpaares, das Flächenglied dieses Gliederpaares und die beiden Flächenstralen der andern beiden Gliederpaare machen eine Flächung.

Die Fünfstrahlung und die drei Flächenstralen machen eine doppelbildhafte Achtstrahlung.

In W seien 1, 2, 3, 4, 5.

In 5 sei U beliebig.

In U seien u' , u'' beliebig.

$u'1$, $u'2$, $u'3$, $u'4$ seien durch $1'2'3'4'$,

$u''1$, $u''2$, $u''3$, $u''4$ seien durch $1''2''3''4''$

bezeichnet, so ist:

$$1'1'' = 1, 2'2'' = 2, 3'3'' = 3, 4'4'' = 4.$$

Aber 1, 2, 3, 4 in W . Also

$$1'2'3'4' \vdash 1''2''3''4'',$$

$$1'2'3'4' \vdash 2''1''4''3'',$$

$$1'2'3'4' \vdash 3''4''1''2'',$$

$$1'2'3'4' \vdash 4''3''2''1''.$$

Die Bildungsecken (Bildungsstäbe) dieser vier Gleichungen sind:

$$v \dots 1'2''2'1'', 1'3''3'1'', 1'4''4'1'', 2'3''3'2'', 2'4''4'2'', \\ 3'4''4'3'';$$

$$h \dots 1'1''2'2'', 1'4''3'2'', 1'3''4'2'', 2'4''3'1'', 2'3''4'1'', \\ 3'3''4'4'';$$

$$k \dots 1'4''2'3'', 1'1''3'3'', 1'2''4'3'', 2'1''3'4'', 2'2''4'4'', \\ 3'2''4'1'';$$

$$l \dots 1'3''2'4'', 1'2''3'4'', 1'1''4'4'', 2'2''3'3'', 2'1''4'3'', \\ 3'1''4'2''.$$

Hieraus folgt, dass $u'u''$, $v5$ eine Gleichmessung, und wenn

$$\left. \begin{array}{l} 12, a5, \text{ sowie } 34, b5 \\ 13, c5, \quad \quad \quad 24, d5 \\ 14, f5, \quad \quad \quad 23, g5 \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen,}$$

$$\text{so sind } 1'2''2'1'' = va, \quad 3'4''4'3'' = vb,$$

$$1'3''3'1'' = vc, \quad 2'4''4'2'' = vd,$$

$$1'4''4'1'' = vf, \quad 2'3''3'2'' = vg.$$

In der Vierseitung (dem Viereck) $1', 4'', 3', 2''$ sind entsprechend

$$1' \text{ mit } 1, \quad 2'' \text{ mit } 2,$$

$$3' \text{ mit } 3, \quad 4'' \text{ mit } 4,$$

$$1'3'2''4'' \text{ mit } 5, \text{ und } 1'4''3'2'' \text{ mit } h,$$

$$\text{also sind } 12, 34, h5$$

$$\text{ebenso } 13, 24, k5$$

$$14, 23, l5$$

Flächungen.

In der Flächenecke (Flächenstral) entsprechen also vier Stralen (Ecken), nämlich:

$h \dots 1'4''3'2'', 1'3''4'2'', 2'4''3'1'', 2'3''4'1'';$

$k \dots 1'4''2'3'', 1'2''4'3'', 2'1''3'4'', 3'2''4'1'';$

$l \dots 1'3''2'4'', 1'2''3'4'', 2'1''4'3'', 3'1''4'2''.$

Da $1'2''2'1''$ in a , $3'4''4'3''$ in b ,

$1'2''4'3''$ und $2'1''3'4''$ in k ,

$1'2''3'4''$ und $2'1''4'3''$ in l

liegen, so sind ab, kl

ebenso cd, lh

und fg, hk

} Gleichmessungen.

In der Vierseitung (Viereck) $1', 2', 3'', 4''$ sind entsprechend

$1'$ mit 1 , $2'$ mit 2 ,

$3''$ mit 3 , $4''$ mit 4 ,

$1'4''2'3''$ mit k , $1'3''2'4''$ mit l .

Also sind $12, 34, kl$

ebenso $13, 24, lh$

$14, 23, hk$

} Flächungen.

Da auch $12, 34, h5$

$13, 24, k5$

$14, 23, h5$

} Flächungen,

so sind (108) $12, kl, h5$

$34, kl, h5$

$13, lh, k5$

$24, lh, k5$

$14, hk, l5$

$23, hk, l5$

} Flächungen,

und (108) $12, 34, kl, h5$

$13, 24, lh, k5$

$14, 23, hk, l5$

} in Doppelbildung.

127.

Wenn bei dem Fünfeck eines Doppelstabes vier Ecken in drei Gliederpaare vereinigt werden, in Bezug auf die fünfte Ecke zu jedem Gliederpaare die Fläche genommen wird, und zu den beiden Gliedern eines Gliederpaares

Wenn bei der Fünfstrahlung einer Doppellecke vier Stralen in drei Gliederpaare vereinigt werden, in Bezug auf den fünften Stral zu jedem Gliederpaare der Flächenstral genommen wird, und zu den beiden Gliedern eines Gliederpaares

in Bezug auf eine Neben- res in Bezug auf einen Ne-
 flächenecke die Spitzen ge- benflächenstral die Wende-
 nommen werden, so sind stralen genommen werden,
 sie in Gleichmessung mit so sind sie in Gleichmes-
 der Flächenecke und der sung mit dem Flächenstral
 fünften Ecke. und dem fünften Stral.

In W seien 1, 2, 3, 4, 5. In 5 sei U beliebig, in
 U seien u' , u'' beliebig,

$u'1, u'2, u'3, u'4$ seien durch $1'2'3'4'$,

$u''1, u''2, u''3, u''4$ seien durch $1''2''3''4''$

bezeichnet. Es seien

$$\left. \begin{array}{l} 12, 34, h5 \\ 13, 24, k5 \\ 14, 23, l5 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$$

also h die Flächenecke, k und l die Nebenflächenecken des
 Gliederpaares 12, 34. Es sei $2'3'4'1'' = H$, $2'1''4'3'' =$
 L , so liegt h in H , l in L .

Es seien

$HU = x$, $LU = y$, $HL = z$, $2'1'' = v$, $4'3'' = w$, $vx =$
 V , $wx = X$, $VW = o$, $XW = p$, $2'3'' = r$, $4'1'' = t$,
 so sind

$$\left. \begin{array}{l} u'u'', xy \\ vw, yz \end{array} \right\} \text{Gleichmessungen,}$$

 also auch $\left. \begin{array}{l} 12, lo \\ 34, lp \\ op, h5 \end{array} \right\} \text{Gleichmessungen,}$

an $v \dots 5u''xu' \quad \vdash \quad 5102,$
 $w \dots 5u''xu' \quad \vdash \quad 53p4,$
 $r \dots 5u''xu' \quad \vdash \quad 53h2,$
 $t \dots 5u''xu' \quad \vdash \quad 51h4,$

also $5102 \quad \vdash \quad 53p4 \quad \vdash \quad 53h2 \quad \vdash \quad 51h4,$

also $\left. \begin{array}{l} 51, h2, o4 \\ 52, h1, o3 \\ 53, h4, p2 \\ 54, h3, p1 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$

an $v \dots 5u''yu' \quad \vdash \quad 51l2,$
 $w \dots 5u''yu' \quad \vdash \quad 53l4,$
 $v \dots 5u''yx \quad \vdash \quad 51lo,$
 $w \dots 5u''yx \quad \vdash \quad 53lp,$
 $v \dots 5u'yx \quad \vdash \quad 52lo,$
 $w \dots 5u'yx \quad \vdash \quad 54lp.$

Also $51l2 \parallel 53l4$,
 $51l0 \parallel 53lp$,
 $52l0 \parallel 54lp$.

Also $14, 23, l5$ }
 $o3, p1, l5$ } Flächungen.
 $o4, p2, l5$ }

Auf gleiche Weise erhellet:

Wenn $12, 34, h5$ }
 $13, 24, k5$ } Flächungen
 und $12, ko'$ }
 $34, kp'$ } Gleichmessungen,

so ist . . $o'p', h5$ eine Gleichmessung

und $51, h2, o'3$ }
 $52, h1, o'4$ }
 $54, h3, p'2$ } Flächungen.
 $53, h4, p'1$ }
 $o'4, p'1, k5$ }
 $o'3, p'2, k5$ }

128.

Wenn bei dem Fünfeck *Wenn bei der Fünfstra-*
eines Doppelstabes zu der *lung einer Doppelecke zu*
fünften Ecke und einem dem fünften Stral und ei-
Gliederpaar die Flächen- *nem Gliederpaar der Flä-*
ecke, zu der fünften Ecke *chenstral, zu dem fünften*
und jedem Gliede die Spitze, *Stral und jedem Gliede der*
zu jeder Spitze und dem an- *Wendestral, zu jedem Wen-*
dern Gliede wieder die *destral und dem andern*
Spitze genommen werden, so *Glieder wieder der Wende-*
sind diese beiden letzten *stral genommen werden, so*
Spitzen mit der Flächen- *sind diese beiden letzten*
ecke und fünften Ecke in *Wendestralen mit dem Flä-*
Gleichmessung. *chenstral und fünften Stral*
in Gleichmessung.

In W seien 1, 2, 3, 4, 5.

Es sei $12, 34, h5$ eine Flächung, und es seien

$12, a5$ }
 $34, b5$ } Gleichmessungen.
 $12, b6$ }
 $34, a7$ }

Man nehme 8, 9 so, dass

12, h5, 88 }
34, h5, 99 } Flächungen.

Da . . 12, h5, 88 }
und 12, h5, 34 }
so ist (108) 34, h5, 88 } Flächungen,
aber auch 34, h5, 99 }
also h5, 88, 99 }

also h5, 89 eine Gleichmessung.

Da h5, 88, 99 }
und h5, 88, 12 } Flächungen,
so ist 12, 88, 99 }

also 12, 89 eine Gleichmessung.

Da . . h5, 88, 99 }
und h5, 34, 99 } Flächungen,
so ist 34, 88, 99 }

also 34, 89 eine Gleichmessung.

Da 12, a5 }
12, 89 } Gleichmessungen,

so sind (115) 11, a5, 89 }
und 22, a5, 89 } Flächungen.

Da . . 12, a5 }
und . . 12, b6 } Gleichmessungen,

so sind (115) 11, a5, b6 }
22, a5, b6 } Flächungen.
also (108) a5, b6, 89 }

Da 34, a7 }
34, 89 } Gleichmessungen,

so sind 33, a7, 89 }
44, a7, 89 } Flächungen.

Da 34, b5 }
34, a7 } Gleichmessungen,

so sind (115) 33, b5, a7 }
44, b5, a7 } Flächungen.
also (108) b5, a7, 89 }

Da $a5, b6, 89$ }
und $b5, a7, 89$ } Flächungen,

so ist $89ab \div 8965,$

$89ab \div 8957,$

also $8965 \div 8957,$

also $89, 67, 55$

aber auch $89, hh, 55$ } Flächungen,

also $67, hh, 55$ }

also $h5, 67$ eine Gleichmessung.

Zweiter Beweis.

Es sei in 5 U beliebig, in U seien u', u'' beliebig.
Es seien $u'2, u'b, u'4$ mit $2', b', 4'$ und $u''1, u''a, u''3$
mit $1'', a'', 3''$ bezeichnet. Es sei

$$2'1'' = p, 2'a'' = q, b'3'' = r, 4'3'' = t, b'1'' = y, \\ 4'a'' = z.$$

Da $12, a5$ und $34, b5$
so sind $p2, qu'$ und $t3, ru''$ } Gleichmessungen.
aber $12, b6$ und $34, a7$ }

Also liegen

yq in 6, zr in 7.

Aber $yq = b'1''2'a'', rz = b'3''4'a'',$ und $b'1''2'a'',$
 $b'3''4'a'', 2'3''4'1''$ machen (73) eine Dreistralung (Stab-
dreieck) und liegen in x .

Aber $12, 34, h5$ eine Flächung. Also $2'3''4'1'' = xh$.

Aber aus (82) folgt:

da in $2' \dots p2, qu'$ }
in $3'' \dots t3, ru''$ } Gleichmessungen,
und $WU = 5,$

so sind $xq, xr, xh, x5$ in Gleichmessung.

Also $h5, 67$ eine Gleichmessung.

129.

*Wenn drei Doppelflächungen ein gemeinsames Flächen-
glied und je zwei Nebenglieder einen gemeinsamen Theil
haben, so entstehen drei neue Flächungen mit demsel-
ben Flächengliede. In jeder besteht das eine Glied
aus den Doppeltheilen zweier Doppelflächungen, das
andere enthält einen Doppeltheil der dritten Doppel-*

flächung und den gemeinsamen Nebentheil der beiden ersten Doppelflächungen.

In *W* seien $\left. \begin{array}{l} 11, 64, 78 \\ 22, 45, 78 \\ 33, 56, 78 \end{array} \right\} \text{Doppelflächungen.}$

Das Flächenglied 78 ist gemeinsam. Die drei Doppeltheile sind 1, 2, 3, die drei Nebentheile sind 4, 5, 6.

Man nehme nun an die

12, *a*4, 78 Flächung.

Aus 12, *a*4, 78 folgt 7814 ++ 78*a*2,

aus 11, 64, 78 folgt 7814 ++ 7861,

also 78*a*2 ++ 7861.

Aus 12, *a*4, 78 folgt 7824 ++ 78*a*1,

aus 22, 45, 78 folgt 7824 ++ 7852,

also 78*a*1 ++ 7852.

Aus 78*a*2 ++ 7861 folgt 7812 ++ 786*a*,

aus 78*a*1 ++ 7852 folgt 7812 ++ 78*a*5,

also 786*a* ++ 78*a*5.

Also *aa*, 56, 78 eine Doppelflächung.

Aber auch 33, 56, 78 eine Doppelflächung,

also (119) fallen *a* und 3 zusammen.

Nun folgt

aus 12, *a*4, 78 12, 34, 78,

aus 78*a*1 ++ 7852 23, 15, 78,

aus 78*a*2 ++ 7861 31, 26, 78.

Also aus den Doppelflä-
chungen:

folgen die Doppelflä-
chungen:

11, 64, 78,

12, 34, 78,

22, 45, 78,

23, 15, 78,

33, 56, 78

31, 26, 78.

Es seien umgekehrt gültig die

12, 34, 78

23, 15, 78

31, 26, 78

} Doppelflächungen.

Aus 12, 34, 78 folgt 7823 ++ 7841,

aus 31, 26, 78 folgt 7823 ++ 7816,

aus 12, 34, 78 folgt 7831 ++ 7824,

aus 23, 15, 78 folgt 7831 ++ 7852,

aus 23, 15, 78 folgt 7812 ++ 7835,

aus 31, 26, 78 folgt 7812 ++ 7863.

Also

7841 ++ 7816, 7824 ++ 7852, 7835 ++ 7863.

Also 11, 64, 78

22, 45, 78

33, 56, 78

} Doppelflächungen.

130.

Wenn bei dem Fünfeck eines Doppelstabes vier Ecken in drei Gliederpaare vereinigt werden, und zu jedem Gliede die Spitze in Bezug auf die fünfte Ecke genommen wird, so haben die drei Spitzenpaare in Bezug auf die fünfte Ecke eine gemeinsame Mittspitze.

Wenn bei der Fünfstrahlung einer Doppelecke vier Stralen in drei Gliederpaare vereinigt werden, und zu jedem Gliede der Wendestral in Bezug auf den fünften Stral genommen wird, so haben die drei Wendestralenpaare in Bezug auf den fünften Stral einen gemeinsamen Mittwendestral.

Je zwei Spitzenpaare bilden sowohl mit der fünften Ecke als mit der Mittspitze eine Doppelflächung.

Je zwei Wendestralenpaare bilden sowohl mit dem fünften Stral als mit dem Mittwendestral eine Doppelflächung.

Die drei Spitzenpaare bilden eine Flächung.

Die drei Wendestralenpaare bilden eine Flächung.

Zwei Paare wechselnamiger Spitzen bilden mit der fünften Ecke und der Mittspitze eine Flächung.

Zwei Paare wechselnamiger Wendestralen bilden mit dem fünften Stral und dem Mittwendestral eine Flächung.

Ein Paar wechselnamige Spitzen, die fünfte Ecke, die Mittspitze, die Spitze eines Gliedes und die Flächenecke des Gliederpaares bilden eine Flächung.

Ein Paar wechselnamige Wendestralen, der fünfte Stral, der Mittwendestral, der Wendestral eines Gliedes und der Flächenstral des Gliederpaares bilden eine Flächung.

In W seien 1, 2, 3, 4, 5.

In 5 seien U , V beliebig.

In 5 sei R so angenommen, dass UW , VR eine Gleichmessung.

In V sei u beliebig. In U seien $1'2'3'4'$ genommen, so dass $1'1$, $2'2$, $3'3$, $4'4$ in u liegen.

In R seien $a'b'c'd'f'g'$ so genommen, dass a' in $1'2$ oder $2'1$, c' in $1'3$ oder $3'1$, f' in $1'4$ oder $4'1$, b' in $3'4$ oder $4'3$, d' in $2'4$ oder $4'2$, g' in $2'3$ oder $3'2$ liegen.

In W seien $abcdfg$ so genommen, dass $a'a$, $b'b$, $c'c$, $d'd$, $f'f$, $g'g$ in u liegen.

Alsdann sind

$$\left. \begin{array}{l} 12, a5 \text{ und } 34, b5 \\ 13, c5 \text{ und } 24, d5 \\ 14, f5 \text{ und } 23, g5 \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Auch seien } 12, 34, h5 \\ 13, 24, k5 \\ 14, 23, l5 \end{array} \right\} \text{ Flächungen.}$$

Alsdann sind in R entsprechend:

$$\left. \begin{array}{l} a' \text{ mit } 1'2, b' \text{ mit } 4'3, \\ c' \text{ mit } 1'3, d' \text{ mit } 4'2, \\ 5 \text{ mit } 1'24'2, 1'34'3, \\ 5 \text{ mit } 1'21'3, 4'34'2, \\ \text{also } a'b', c'd', 55 \\ \text{also } ab, cd, 55 \end{array} \right\} \text{ Flächungen.}$$

Ferner sind in R entsprechend:

$$\left. \begin{array}{l} c' \text{ mit } 3'1, d' \text{ mit } 4'2, \\ f' \text{ mit } 4'1, g' \text{ mit } 3'2, \\ 5 \text{ mit } 3'14'1, 4'23'2, \\ 5 \text{ mit } 3'13'2, 4'14'2, \\ \text{also } c'd', f'g', 55 \\ \text{also } cd, fg, 55 \end{array} \right\} \text{ Flächungen.}$$

Ferner sind in R entsprechend:

$$\left. \begin{array}{l} f' \text{ mit } 1'4, g' \text{ mit } 3'2, \\ a' \text{ mit } 1'2, b' \text{ mit } 3'4, \\ 5 \text{ mit } 1'23'2, 1'43'4, \\ 5 \text{ mit } 1'21'4, 3'23'4, \\ \text{also } f'g', a'b', 55 \\ fg, ab, 55 \end{array} \right\} \text{ Flächungen.}$$

Hieraus folgt $abc5 \parallel bad5$,
aber $bad5 \parallel b'a'd'5$,
also $abc5 \parallel b'a'd'5$.

Hier ist 5 gemeinsam. Also liegen in einer Ecke (Stral)

$a'b, b'a, d'c.$

Ferner ist $abd5 \parallel bac5,$

$bac5 \parallel b'a'c'5,$

also $abd5 \parallel b'a'c'5.$

Also liegen in einer Ecke (Stral)

$a'b, b'a, c'd.$

Ferner $abf5 \parallel bag5,$

also $abf5 \parallel b'a'g'5,$

also liegen in einer Ecke (Stral)

$a'b, b'a, g'f,$

ferner $abg5 \parallel baf5,$

also $abg5 \parallel b'a'f'5.$

Also liegen in einer Ecke (Stral)

$a'b, b'a, f'g.$

Also liegen in einer Ecke (Stral) m'

$a'b, b'a, c'd, d'c, f'g, g'f.$

Entsprechend mit u und m' sei m in W , so sind

$\left. \begin{array}{l} ab, m5 \\ cd, m5 \\ fg, m5 \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$

Also m die gemeinsame Mittspitze (Mittwendestral) von ab, cd, fg in Bezug auf 5.

Hieraus folgen die

$\left. \begin{array}{l} ab, cd, 55 \\ ab, cd, mm \\ cd, fg, 55 \\ cd, fg, mm \\ fg, ab, 55 \\ fg, ab, mm \end{array} \right\} \text{ Flächungen.}$

Hieraus ferner

$\left. \begin{array}{l} ab, cd, fg \\ ac, bd, m5 \\ ad, bc, m5 \\ af, bg, m5 \\ ag, bf, m5 \\ cf, dg, m5 \\ cg, df, m5 \end{array} \right\} \text{ Flächungen.}$

Es sind in R entsprechend:

c' mit $1'3$, g' mit $3'2$,

f' mit $1'4$, d' mit $4'2$,

h' mit $1'43'2$, $1'34'2$,

a' mit $1'31'4 = 1'$, $3'24'2 = 2$,

also $c'g'$, $f'd'$, $a'h'$ } Flächungen.
 cg , df , ah

Es sind in R entsprechend:

c' mit $1'3$, f' mit $1'4$,

d' mit $4'2$, g' mit $3'2$,

h' mit $1'34'2$, $1'43'2$,

b' mit $1'33'2$, $1'44'2$, also mit $3'44'3$.

Also $c'f'$, $d'g'$, $b'h'$ } Flächung.
 cf , dg , bh

Hieraus folgt:

Da cg , df , ah }
 cf , dg , bl } Flächungen,
 cg , df , $m5$ }
 cf , dg , $m5$ }

so sind auch cg , ah , $m5$ }
 df , ah , $m5$ } Flächungen.
 cf , bh , $m5$ }
 dg , bh , $m5$ }

Ebenso ergeben sich für k :

ag , bf , ck }
 af , bg , dk }
 ag , bf , $m5$ } Flächungen.
 af , bg , $m5$ }
 ag , ck , $m5$ }
 bf , ck , $m5$ }
 af , dk , $m5$ }
 bg , dk , $m5$ }

Ebenso ergeben sich für l :

ad , bc , fl }
 ac , bd , gl }
 ad , bc , $m5$ } Flächungen.
 ac , bd , $m5$ }
 ad , fl , $m5$ }
 bc , fl , $m5$ }
 ac , gl , $m5$ }
 bd , gl , $m5$ }

Sonderfall.

Auf dem Doppelstabe sei das Stabviereck 1234, es
seien die einfachen Flächungen

$\infty h, 12, 34; \infty k, 13, 24; \infty l, 14, 23$
und die Mitten

a von 12, b von 34,
 c von 13, d von 24,
 f von 14, g von 23,
 m von $ab, cd, fg,$

so sind

$ac, bd, g2, g3$ die Hälfte von 23,
 $ad, bc, f1, f4$ „ „ „ 14,
 $cf, dg, b3, b4$ „ „ „ 34,
 $cg, df, a1, a2$ „ „ „ 12,
 $af, bg, d2, d4$ „ „ „ 24,
 $ag, bf, c1, c3$ „ „ „ 13.

Ein Viertel der Anlage oder des Unterschiedes
von 13, 24 oder 14, 23 sind $am, bm,$
von 14, 23 oder 12, 34 sind $cm, dm,$
von 12, 34 oder 13, 24 sind $fm, gm.$

Dann sind vollständige Flächungen

ab, cd, fg
 cg, df, ah
 cf, dg, bh
 ag, bf, ck
 af, bg, dk
 ad, bc, fl
 ac, bd, gl } Flächungen.

Die Mittmitte m macht einfache Flächungen oder ist
die Flächenecke folgender Gliederpaare:

$cg, df,$	$cf, dg,$	$cg, ah,$
$df, ah,$	$cf, bh,$	$dg, bh,$
$ag, bf,$	$af, bg,$	$ag, ck,$
$bf, ck,$	$af, dk,$	$bg, dk,$
$ad, bc,$	$ac, bd,$	$ad, fl,$
$bc, fl,$	$ac, gl,$	$bd, gl.$

und die Mitten
 von 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192, 204, 216, 228, 240, 252, 264, 276, 288, 300, 312, 324, 336, 348, 360, 372, 384, 396, 408, 420, 432, 444, 456, 468, 480, 492, 504, 516, 528, 540, 552, 564, 576, 588, 600, 612, 624, 636, 648, 660, 672, 684, 696, 708, 720, 732, 744, 756, 768, 780, 792, 804, 816, 828, 840, 852, 864, 876, 888, 900, 912, 924, 936, 948, 960, 972, 984, 996, 1008, 1020, 1032, 1044, 1056, 1068, 1080, 1092, 1104, 1116, 1128, 1140, 1152, 1164, 1176, 1188, 1200, 1212, 1224, 1236, 1248, 1260, 1272, 1284, 1296, 1308, 1320, 1332, 1344, 1356, 1368, 1380, 1392, 1404, 1416, 1428, 1440, 1452, 1464, 1476, 1488, 1500, 1512, 1524, 1536, 1548, 1560, 1572, 1584, 1596, 1608, 1620, 1632, 1644, 1656, 1668, 1680, 1692, 1704, 1716, 1728, 1740, 1752, 1764, 1776, 1788, 1800, 1812, 1824, 1836, 1848, 1860, 1872, 1884, 1896, 1908, 1920, 1932, 1944, 1956, 1968, 1980, 1992, 2004, 2016, 2028, 2040, 2052, 2064, 2076, 2088, 2100, 2112, 2124, 2136, 2148, 2160, 2172, 2184, 2196, 2208, 2220, 2232, 2244, 2256, 2268, 2280, 2292, 2304, 2316, 2328, 2340, 2352, 2364, 2376, 2388, 2400, 2412, 2424, 2436, 2448, 2460, 2472, 2484, 2496, 2508, 2520, 2532, 2544, 2556, 2568, 2580, 2592, 2604, 2616, 2628, 2640, 2652, 2664, 2676, 2688, 2700, 2712, 2724, 2736, 2748, 2760, 2772, 2784, 2796, 2808, 2820, 2832, 2844, 2856, 2868, 2880, 2892, 2904, 2916, 2928, 2940, 2952, 2964, 2976, 2988, 3000, 3012, 3024, 3036, 3048, 3060, 3072, 3084, 3096, 3108, 3120, 3132, 3144, 3156, 3168, 3180, 3192, 3204, 3216, 3228, 3240, 3252, 3264, 3276, 3288, 3300, 3312, 3324, 3336, 3348, 3360, 3372, 3384, 3396, 3408, 3420, 3432, 3444, 3456, 3468, 3480, 3492, 3504, 3516, 3528, 3540, 3552, 3564, 3576, 3588, 3600, 3612, 3624, 3636, 3648, 3660, 3672, 3684, 3696, 3708, 3720, 3732, 3744, 3756, 3768, 3780, 3792, 3804, 3816, 3828, 3840, 3852, 3864, 3876, 3888, 3900, 3912, 3924, 3936, 3948, 3960, 3972, 3984, 3996, 4008, 4020, 4032, 4044, 4056, 4068, 4080, 4092, 4104, 4116, 4128, 4140, 4152, 4164, 4176, 4188, 4200, 4212, 4224, 4236, 4248, 4260, 4272, 4284, 4296, 4308, 4320, 4332, 4344, 4356, 4368, 4380, 4392, 4404, 4416, 4428, 4440, 4452, 4464, 4476, 4488, 4500, 4512, 4524, 4536, 4548, 4560, 4572, 4584, 4596, 4608, 4620, 4632, 4644, 4656, 4668, 4680, 4692, 4704, 4716, 4728, 4740, 4752, 4764, 4776, 4788, 4800, 4812, 4824, 4836, 4848, 4860, 4872, 4884, 4896, 4908, 4920, 4932, 4944, 4956, 4968, 4980, 4992, 5004, 5016, 5028, 5040, 5052, 5064, 5076, 5088, 5100, 5112, 5124, 5136, 5148, 5160, 5172, 5184, 5196, 5208, 5220, 5232, 5244, 5256, 5268, 5280, 5292, 5304, 5316, 5328, 5340, 5352, 5364, 5376, 5388, 5400, 5412, 5424, 5436, 5448, 5460, 5472, 5484, 5496, 5508, 5520, 5532, 5544, 5556, 5568, 5580, 5592, 5604, 5616, 5628, 5640, 5652, 5664, 5676, 5688, 5700, 5712, 5724, 5736, 5748, 5760, 5772, 5784, 5796, 5808, 5820, 5832, 5844, 5856, 5868, 5880, 5892, 5904, 5916, 5928, 5940, 5952, 5964, 5976, 5988, 6000, 6012, 6024, 6036, 6048, 6060, 6072, 6084, 6096, 6108, 6120, 6132, 6144, 6156, 6168, 6180, 6192, 6204, 6216, 6228, 6240, 6252, 6264, 6276, 6288, 6300, 6312, 6324, 6336, 6348, 6360, 6372, 6384, 6396, 6408, 6420, 6432, 6444, 6456, 6468, 6480, 6492, 6504, 6516, 6528, 6540, 6552, 6564, 6576, 6588, 6600, 6612, 6624, 6636, 6648, 6660, 6672, 6684, 6696, 6708, 6720, 6732, 6744, 6756, 6768, 6780, 6792, 6804, 6816, 6828, 6840, 6852, 6864, 6876, 6888, 6900, 6912, 6924, 6936, 6948, 6960, 6972, 6984, 6996, 7008, 7020, 7032, 7044, 7056, 7068, 7080, 7092, 7104, 7116, 7128, 7140, 7152, 7164, 7176, 7188, 7200, 7212, 7224, 7236, 7248, 7260, 7272, 7284, 7296, 7308, 7320, 7332, 7344, 7356, 7368, 7380, 7392, 7404, 7416, 7428, 7440, 7452, 7464, 7476, 7488, 7500, 7512, 7524, 7536, 7548, 7560, 7572, 7584, 7596, 7608, 7620, 7632, 7644, 7656, 7668, 7680, 7692, 7704, 7716, 7728, 7740, 7752, 7764, 7776, 7788, 7800, 7812, 7824, 7836, 7848, 7860, 7872, 7884, 7896, 7908, 7920, 7932, 7944, 7956, 7968, 7980, 7992, 8004, 8016, 8028, 8040, 8052, 8064, 8076, 8088, 8100, 8112, 8124, 8136, 8148, 8160, 8172, 8184, 8196, 8208, 8220, 8232, 8244, 8256, 8268, 8280, 8292, 8304, 8316, 8328, 8340, 8352, 8364, 8376, 8388, 8400, 8412, 8424, 8436, 8448, 8460, 8472, 8484, 8496, 8508, 8520, 8532, 8544, 8556, 8568, 8580, 8592, 8604, 8616, 8628, 8640, 8652, 8664, 8676, 8688, 8700, 8712, 8724, 8736, 8748, 8760, 8772, 8784, 8796, 8808, 8820, 8832, 8844, 8856, 8868, 8880, 8892, 8904, 8916, 8928, 8940, 8952, 8964, 8976, 8988, 9000, 9012, 9024, 9036, 9048, 9060, 9072, 9084, 9096, 9108, 9120, 9132, 9144, 9156, 9168, 9180, 9192, 9204, 9216, 9228, 9240, 9252, 9264, 9276, 9288, 9300, 9312, 9324, 9336, 9348, 9360, 9372, 9384, 9396, 9408, 9420, 9432, 9444, 9456, 9468, 9480, 9492, 9504, 9516, 9528, 9540, 9552, 9564, 9576, 9588, 9600, 9612, 9624, 9636, 9648, 9660, 9672, 9684, 9696, 9708, 9720, 9732, 9744, 9756, 9768, 9780, 9792, 9804, 9816, 9828, 9840, 9852, 9864, 9876, 9888, 9900, 9912, 9924, 9936, 9948, 9960, 9972, 9984, 9996, 10008, 10020, 10032, 10044, 10056, 10068, 10080, 10092, 10104, 10116, 10128, 10140, 10152, 10164, 10176, 10188, 10200, 10212, 10224, 10236, 10248, 10260, 10272, 10284, 10296, 10308, 10320, 10332, 10344, 10356, 10368, 10380, 10392, 10404, 10416, 10428, 10440, 10452, 10464, 10476, 10488, 10500, 10512, 10524, 10536, 10548, 10560, 10572, 10584, 10596, 10608, 10620, 10632, 10644, 10656, 10668, 10680, 10692, 10704, 10716, 10728, 10740, 10752, 10764, 10776, 10788, 10800, 10812, 10824, 10836, 10848, 10860, 10872, 10884, 10896, 10908, 10920, 10932, 10944, 10956, 10968, 10980, 10992, 11004, 11016, 11028, 11040, 11052, 11064, 11076, 11088, 11100, 11112, 11124, 11136, 11148, 11160, 11172, 11184, 11196, 11208, 11220, 11232, 11244, 11256, 11268, 11280, 11292, 11304, 11316, 11328, 11340, 11352, 11364, 11376, 11388, 11400, 11412, 11424, 11436, 11448, 11460, 11472, 11484, 11496, 11508, 11520, 11532, 11544, 11556, 11568, 11580, 11592, 11604, 11616, 11628, 11640, 11652, 11664, 11676, 11688, 11700, 11712, 11724, 11736, 11748, 11760, 11772, 11784, 11796, 11808, 11820, 11832, 11844, 11856, 11868, 11880, 11892, 11904, 11916, 11928, 11940, 11952, 11964, 11976, 11988, 12000, 12012, 12024, 12036, 12048, 12060, 12072, 12084, 12096, 12108, 12120, 12132, 12144, 12156, 12168, 12180, 12192, 12204, 12216, 12228, 12240, 12252, 12264, 12276, 12288, 12300, 12312, 12324, 12336, 12348, 12360, 12372, 12384, 12396, 12408, 12420, 12432, 12444, 12456, 12468, 12480, 12492, 12504, 12516, 12528, 12540, 12552, 12564, 12576, 12588, 12600, 12612, 12624, 12636, 12648, 12660, 12672, 12684, 12696, 12708, 12720, 12732, 12744, 12756, 12768, 12780, 12792, 12804, 12816, 12828, 12840, 12852, 12864, 12876, 12888, 12900, 12912, 12924, 12936, 12948, 12960, 12972, 12984, 12996, 13008, 13020, 13032, 13044, 13056, 13068, 13080, 13092, 13104, 13116, 13128, 13140, 13152, 13164, 13176, 13188, 13200, 13212, 13224, 13236, 13248, 13260, 13272, 13284, 13296, 13308, 13320, 13332, 13344, 13356, 13368, 13380, 13392, 13404, 13416, 13428, 13440, 13452, 13464, 13476, 13488, 13500, 13512, 13524, 13536, 13548, 13560, 13572, 13584, 13596, 13608, 13620, 13632, 13644, 13656, 13668, 13680, 13692, 13704, 13716, 13728, 13740, 13752, 13764, 13776, 13788, 13800, 13812, 13824, 13836, 13848, 13860, 13872, 13884, 13896, 13908, 13920, 13932, 13944, 13956, 13968, 13980, 13992, 14004, 14016, 14028, 14040, 14052, 14064, 14076, 14088, 14100, 14112, 14124, 14136, 14148, 14160, 14172, 14184, 14196, 14208, 14220, 14232, 14244, 14256, 14268, 14280, 14292, 14304, 14316, 14328, 14340, 14352, 14364, 14376, 14388, 14400, 14412, 14424, 14436, 14448, 14460, 14472, 14484, 14496, 14508, 14520, 14532, 14544, 14556, 14568, 14580, 14592, 14604, 14616, 14628, 14640, 14652, 14664, 14676, 14688, 14700, 14712, 14724, 14736, 14748, 14760, 14772, 14784, 14796, 14808, 14820, 14832, 14844, 14856, 14868, 14880, 14892, 14904, 14916, 14928, 14940, 14952, 14964, 14976, 14988, 15000, 15012, 15024, 15036, 15048, 15060, 15072, 15084, 15096, 15108, 15120, 15132, 15144, 15156, 15168, 15180, 15192, 15204, 15216, 15228, 15240, 15252, 15264, 15276, 15288, 15300, 15312, 15324, 15336, 15348, 15360, 15372, 15384, 15396, 15408, 15420, 15432, 15444, 15456, 15468, 15480, 15492, 15504, 15516, 15528, 15540, 15552, 15564, 15576, 15588, 15600, 15612, 15624, 15636, 15648, 15660, 15672, 15684, 15696, 15708, 15720, 15732, 15744, 15756, 15768, 15780, 15792, 15804, 15816, 15828, 15840, 15852, 15864, 15876, 15888, 15900, 15912, 15924, 15936, 15948, 15960, 15972, 15984, 15996, 16008, 16020, 16032, 16044, 16056, 16068, 16080, 16092, 16104, 16116, 16128, 16140, 16152, 16164, 16176, 16188, 16200, 16212, 16224, 16236, 16248, 16260, 16272, 16284, 16296, 16308, 16320, 16332, 16344, 16356, 16368, 16380, 16392, 16404, 16416, 16428, 16440, 16452, 16464, 16476, 16488, 16500, 16512, 16524, 16536, 16548, 16560, 16572, 16584, 16596, 16608, 16620, 16632, 16644, 16656, 16668, 16680, 16692, 16704, 16716, 16728, 16740, 16752, 16764, 16776, 16788, 16800, 16812, 16824, 16836, 16848, 16860, 16872, 16884, 16896, 16908, 16920, 16932, 16944, 16956, 16968, 16980, 16992, 17004, 17016, 17028, 17040, 17052, 17064, 17076, 17088, 17100, 17112, 17124, 17136, 17148, 17160, 17172, 17184, 17196, 17208, 17220, 17232, 17244, 17256, 17268, 17280, 17292, 17304, 17316, 17328, 17340, 17352, 17364, 17376, 17388, 17400, 17412, 17424, 17436, 17448, 17460, 17472, 17484, 17496, 17508, 17520, 17532, 17544, 17556, 17568, 17580, 17592, 17604, 17616, 17628, 17640, 17652, 17664, 17676, 17688, 17700, 17712, 17724, 17736, 17748, 17760, 17772, 17784, 17796, 17808, 17820, 17832, 17844, 17856, 17868, 17880, 17892, 17904, 17916, 17928, 17940, 17952, 17964, 17976, 17988, 18000, 18012, 18024, 18036, 18048, 18060, 18072, 18084, 18096, 18108, 18120, 18132, 18144, 18156, 18168, 18180, 18192, 18204, 18216, 18228, 18240, 18252, 18264, 18276, 18288, 18300, 18312, 18324, 18336, 18348, 18360, 18372, 18384, 18396, 18408, 18420, 18432, 18444, 18456, 18468, 18480, 18492, 18504, 18516, 18528, 18540, 18552, 18564, 18576, 18588, 18600, 18612, 18624, 18636, 18648, 18660, 18672, 18684, 18696, 18708, 18720, 18732, 18744, 18756, 18768, 18780, 18792, 18804, 18816, 18828, 18840, 18852, 18864, 18876, 18888, 18900, 18912, 18924, 18936, 18948, 18960, 18972, 18984, 18996, 19008, 19020, 19032, 19044, 19056, 19068, 19080, 19092, 19104, 19116, 19128, 19140, 19152, 19164, 19176, 19188, 19200, 19212, 19224, 19236, 19248, 19260, 19272, 19284, 19296, 19308, 19320, 19332, 19344, 19356, 19368, 19380, 19392, 19404, 19416, 19428, 19440, 19452, 19464, 19476, 19488, 19500, 19512, 19524, 19536, 19548, 19560, 19572, 19584, 19596, 19608, 19620, 19632, 19644, 19656, 19668, 19680, 19692, 19704, 19716, 19728, 19740, 19752, 19764, 19776, 19788, 19800, 19812, 19824, 19836, 19848, 19860, 19872, 19884, 19896, 19908, 19920, 19932, 19944, 19956, 19968, 19980, 19992, 20004, 20016, 20028, 20040, 20052, 20064, 20076, 20088, 20100, 20112, 20124, 20136, 20148, 20160, 20172, 20184, 20196, 20208, 20220, 20232, 20244, 20256, 20268, 20280, 20292, 20304, 20316, 20328, 20340, 20352, 20364, 20376, 20388, 20400, 20412, 20424, 20436, 20448, 20460, 20472, 20484, 20496, 20508, 20520, 20532, 20544, 20556, 20568, 20580, 20592, 20604, 20616, 20628, 20640, 20652, 20664, 20676, 20688, 20700, 20712, 20724, 20736, 20748, 20760, 20772, 20784, 20796, 20808, 20820, 20832, 20844, 20856, 20868, 20880, 20892, 20904, 20916, 20928, 20940, 20952, 20964, 20976, 20988, 21000, 21012, 21024, 21036, 21048, 21060, 21072, 21084, 21096, 21108, 21120, 21132, 21144, 21156, 21168, 21180, 21192, 21204, 21216, 21228, 21240, 21252, 21264, 21276, 21288, 21300, 21312, 21324, 21336, 21348, 21360, 21372, 21384, 21396, 21408, 21420, 21432, 21444, 21456, 21468, 21480, 21492, 21504, 21516, 21528, 21540, 21552, 21564, 21576, 21588, 21600, 21612, 21624, 21636, 21648, 21660, 21672, 21684, 21696, 21708, 21720, 21732, 21744, 21756, 21768, 21780, 21792, 21804, 21816, 21828, 21840, 21852, 21864, 21876, 21888, 21900, 21912, 21924, 21936, 21948, 21960, 21972, 21984, 21996, 22008, 22020, 22032, 22044, 22056, 22068, 22080, 22092, 22104, 22116, 22128, 22140, 22152, 22164, 22176, 22188, 22200, 22212, 22224, 22236, 22248, 22260, 22272, 22284, 22296, 22308, 22320, 22332, 22344, 22356, 22368, 22380, 22392, 22404, 22416, 22428, 22440, 22452, 22464, 22476, 22488, 22500, 22512, 22524, 22536, 22548, 22560, 22572, 22584, 22596, 22608, 22620, 22632, 22644, 22656, 22668, 22680,

Dritter Abschnitt.

131

Ein Strahl, welcher einen Kreis AB trifft, theilt sich die beiden Kreissecken in eine Vereinigung, heisst eine Berührungsecke oder Kreissecke.

Die Kreissecke **Kreis und Abkreis.** heisst auf dem Strahl der Kreismitte lothrecht.

Der Kreis liegt ganz auf einer Seite der Kreissecke.

Der Strahl B schneidet den Kreis in g , h . Sie sind in f gehalten, so sind die Dreiecke $mf'g$, $mf'h$ deckend, also (89) auf lothrecht zu B .

Jede Zeile von B ist also lothrecht zu mf . Diese Zeile treffe mf in f' , den Kreis in $g'h$, so sind die Dreiecke $mf'g$, $mf'h$ deckend, also $g'h$ in f' gehalten.

Wenn also die beiden Kreissecken $g'h$ sich vereinigen, so liegt diese Vereinigungsecke mf in mf oder mf und heisst die Berührungsecke. Die Zeile A heisst die Berührungsecke oder Kreissecke.

Sie ist also lothrecht zu mf oder mf in g .

Die Kreissecke und Kreissecke werden auf gleiche Art bezeichnet, so dass also K , B , A sowohl die Kreissecke als Kreissecke bedeuten kann.

132

Alle auf einer Kreissecke ruhenden Umfangsneigungen sind einander mit der Neigung der Kreissecke gegen die Kreissecke gleich.

Dritter Abschnitt.

Kreis und Apokreis.

131.

Ein Stab, welcher einen Kreis so trifft, dass sich die beiden Kreisecken in eine vereinigen, heisst eine Berührende oder Kreisseite.

Die Kreisseite ist in der Berührungsecke auf dem Stral der Kreismitte lothhaft.

Der Kreis liegt ganz auf einer Seite der Kreisseite.

Der Stab B schneide den Kreis in gh . Es sei gh in f gehalten, so sind die Dreiecke mfg , mfh deckend, also (89) mf lothhaft zu B .

Jede Zeile von B ist also lothhaft zu mf . Diese Zeile treffe mf in f' , den Kreis in $g'h'$, so sind die Dreiecke $kmf'g'$, $m'f'h'$ deckend, also $g'h'$ in f' gehalten.

Wenn also die beiden Kreisecken $g'h'$ sich vereinigen, so liegt diese Vereinigungsecke a in mf oder ma und heisst die *Berührungsecke*. Die Zeile A heisst die *Berührende oder Kreisseite*.

Sie ist also lothhaft zu mf oder ma in a .

Die Kreisecke und Kreisseite werden auf gleiche Art bezeichnet, so dass also z. B. a sowohl die Kreisecke als Kreisseite bedeuten kann.

132.

Alle auf einer Kreisseite ruhenden Umfangsneigungen sind einander und der Neigung der Kreissehne gegen die Kreisseite gleich.

Ein Stab A berühre den Kreis in a , es sei m die Kreismitte, so ist (131) ma lothhaft zu A . Der Halbmesser ma treffe den Kreis in b , es seien c, d beliebige Kreisecken, so sind (89) acb, adb Lothungen, also die Neigung der Kreissehne ac gegen die Kreisseite A gleich der Neigung abc , also auch (90) gleich der Umfangsneigung adc .

Also sind alle in ac ruhenden Umfangsneigungen einander gleich, und gleich der Neigung der Sehne ac gegen die Kreisseite A .

133.

Bei zwei Kreisseiten wird in der Kreismitte die Neigung der Stralen der Berührungsecken von dem Stral der Ecke der Kreisseiten gehalbt. Bei drei Kreisseiten ist in der Kreismitte die Neigung der nach einer Berührungsecke und Seitenecke gezogenen Stralen der Neigung der Stralen der beiden andern Seitenecken gleich.

I.

Die Kreisseiten seien af, ag , so sind wegen der Lothungen in f, g (131) die Dreiecke mfa, mga deckend, also die Neigungen $amf = amg = \frac{1}{2} fmg$.

II.

Wenn bc, ca, ab den Kreis in dfg berühren, so ist die Anlage der Neigungen dmf, dmg, fmg gleich vier Lothungen, oder die Anlage der Neigungen

dmf, dmg gleich der Neigung fmg .

Also ist durch Halbung die Anlage der Neigungen cmd, bmd, amf gleich zwei Lothungen, oder die Anlage der Neigungen

cmd, bmd gleich der Neigung amf .

Also sind in beiden Fällen die Neigungen:

$$\begin{aligned} amf &= amg = bmc, \\ bmg &= bmd = cma, \\ cmd &= cmf = amb. \end{aligned}$$

134.

Jede Ecke ist die Flächenecke des Kreises in Beziehung auf zwei beliebige Stralen derselben.

Es sei a eine beliebige Ecke, zwei beliebige Stralen derselben treffen den Kreis in 12, 34.

Mache auf 34 . . $a1' = a1$, $a2' = a2$,
 mache auf 12 . . $a3' = a3$, $a4' = a4$,
 so sind 1'1, 2'2, 3'3, 4'4 Zeilen.

Also sind die Neigungen
 $a3'1' = a31$, aber (131) $a31 = a24$, also $a3'1' = a24$,
 also 1'3', 24 Zeilen.

Ebenso erhellet, dass 2'4', 13, ferner 1'4', 23, ferner 2'3', 14 Zeilen sind.

Also sind (28) bildhafte Stabdreiecke:

$$\begin{array}{cc} a1'4 \parallel a3'2, & a2'3 \parallel a4'1, \\ a1'3 \parallel a4'2, & a13' \parallel a42'. \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$a14' \parallel a3'2, \quad a13' \parallel a4'2.$$

Also ist (109) a die Flächenecke der Glieder 12, 3'4' oder 12, 34.

Der Kreis werde von 1'1, 2'2, 3'3, 4'4 in $ghkl$ getroffen, so sind 1'g, 2'h, 3'k, 4'l Zeilen, also die Neigungen $11'3 = 1'13' = gh2$, also sind gh , 34 Zeilen. Ebenso erhellet, dass kl , 12 Zeilen sind.

135.

Wenn ein Stral einen Kreis durchschneidet, und aus einer äussern Ecke des Strals eine Seite an den Kreis gezogen wird, so schneidet ein mit dieser beschriebener Kreis Halbmesser auf dem Stral ein Wechselviereck ab. Die Kreis-Mittelflüchung ab. Das Loth seit ist die Flächenseite ist die Flächenseite der des Wechselvierecks. Mittelflüchung.

Die beiden Kreise heissen in beiden Fällen Lothkreise, ihr Durchschnitt ein lothhafter Schnitt.

I. Für die äussere Ecke.

Auf einem Stral schneide ein beliebiger Kreis m das Glied 34 ab. Auf dem Stral sei a eine äussere Ecke, aus a seien an den Kreis m Kreisseiten an , an' gezogen, mit denselben als Halbmesser aus a ein Kreis beschrieben, welcher auf dem Stral das Glied 12 abschneidet. Auf der Kreisseite an seien o , p so genommen, dass $ao = a3$, $ap = a4$, so sind $n1$, $o3$, $p4$ Zeilen, also die Neigungen:

$np1 = n41$,
 (132) $n41 = on3$,
 also $np1 = on3$,
 also $n3$, $p1$ Zeilen. Also (28)

$a31 \parallel anp$,
 aber $anp \parallel a14$,
 also $a31 \parallel a14$;
 ebenso $a32 \parallel a24$,
 also (109, 122, 123)

a die Flächenecke der Glieder 11, 34 und 22, 34;
 $a314$, $a324$ Wechselvierecke,
 12, 34 eine Gleichmessung,
 $a1$, $a2$, an , an' die Flächenseite.

Die Gleichmessung lässt sich auch auf folgende Art beweisen:

Der Kreis m werde von den Stralen $n1$, $n2$ in g , f getroffen.

Da 12 ein Durchmesser des Kreises a , so ist fng eine Lothung, also fg ein Durchmesser des Kreises m . Aber auch anm eine Lothung. Also die Neigungen

$a2n = an2 = mng = mgn$.

Also abg eine Lothung,
 also $g3 = g4$.

Also die Neigungen
 $3ng = 4ng$.

Also wird eine zu $n2$ gezogene Zeile von den aus n nach 314 gehenden Stralen gleichmessend getheilt. Also machen die Glieder

12, 34 eine Gleichmessung.

Da b die Mitte von 34, so ist (123)

b die Flächenecke von 12, 33 und 12, 44,
 also $b132$, $b142$ Wechselvierecke, so dass

$b13 \parallel b32$, $b14 \parallel b42$.

Da an, an' Seiten des Kreises m sind, so heisst nn' der *Wendestral* der Spitze a .

Da $\left. \begin{array}{l} 12, 34 \\ 12, a\infty \\ 34, b\infty \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen,}$

so ist (125) $12, 34, ab$ eine Flächung.

Es sei die Ecke $abnn' = c$, so sind die Neigungen:

$$an3 = n43 = 3n'c,$$

$$cn3 = 34n' = 3na.$$

Also die aus n nach $34ac$,

aus n' nach $34ca$

gehenden Vierstralungen gleichneigig, also diese Vierstralungen bildhaft. Also

$$34ac \parallel 34ca,$$

also $34, ac$ eine Gleichmessung,

also (125) $12, bc$ eine Gleichmessung und $12, 34, c\infty$ eine Flächung.

Also $12, 34, ab$ eine Flächung, deren Flächenecke c ist. Auch sind $ac1b, ac2b, bc3a, bc4a$ Wechselvierecke.

In dem *Sonderfall*, wo m in b fällt, sind die Neigungen

$$an3 = cn3 = bn4,$$

$$an2 = cn1 = bn1,$$

$$\text{also } 2n3 = 1n3 = 1n4,$$

also die Lothungen $1n2, 3n4$ durch die Stralen $n3, n1$ gehalten.

II. Für die innere Ecke.

Auf einem Stral schneide ein beliebiger Kreis m das Glied 34 ab. Auf dem Stral sei a eine innere Ecke, in a sei zu am das Loth nn' an den Kreis m gezogen, mit $an = an'$ als Halbmesser ein Kreis beschrieben, welcher auf dem Stral das Glied 12 abschneidet.

Auf nn' seien o, p so genommen, dass $ao = a3, ap = a4$, so sind $n1, o3$ Zeilen, also die Neigungen

$$np1 = n41,$$

$$(132) \quad n41 = on'3,$$

$$\text{also } np1 = on'3,$$

also $n'3, p1$ Zeilen. Also (28)

$$a31 \parallel an'p.$$

Aber $an'p \perp a24$,
 also $a31 \perp a24$, $a32 \perp a14$,
 also (109) a die Flächenecke der Glieder 12, 34 und
 12, 34, $a\infty$ eine Mittelflächung, deren Flächenseite das
 Loth an oder an' ist.

136.

Wenn bei einem gleichmessenden Stabviereck die Mitten der Glieder genommen werden, so ist der Abstand der Mitten die Gegenseite eines Lothdreiecks, dessen Nebenseiten die halben Glieder oder Flächenseiten sind.

Es sei 12, 34 eine Gleichmessung, a , b die Mitten der Glieder 12, 34, also (123)

a die Flächenecke der Glieder 11, 34 und 22, 34,

b die Flächenecke der Glieder 33, 12 und 44, 12.

Man beschreibe aus a mit der Flächenseite $a1 = a2$ einen Kreis, ziehe an denselben die Kreisseite bn , so ist (135) bn die Flächenseite des Gliedes 12. Also geht dieser Kreis durch 34 und beide Kreise sind lothhaft. Also sind in dem Lothdreieck anb die Nebenseiten der Lothung

$$an = a1 = a2,$$

$$bn = b3 = b4.$$

Die Gegenseite der Lothung ist ab , der Abstand der Mitten.

137.

Wenn bei einem Stabdreieck die drei Flächenseiten genommen werden, so machen je zwei derselben mit dem entsprechenden Gliede des Stabdreiecks ein Lothdreieck, und theilen den Stab bildhaft.

Das Stabdreieck sei abc , das äussere Glied ab , die innern Glieder ac , bc . Es sei an die Flächenseite von a zu bc , aus a mit an ein Kreis beschrieben, welcher den Stab in 12 trifft, so bilden die Glieder bc , 12 eine Gleichmessung.

Man ziehe aus b an den Kreis a die Kreisseite bn , beschreibe aus b mit bn einen Kreis, welcher den Stab in 3, 4 trifft, so sind beide Kreise lothhaft in n , n' , und es sind

$$\left. \begin{array}{l} 12, 34 \\ 12, a\infty \\ 34, b\infty \\ 12, bc \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen,}$$

also (125)

34, ac eine Gleichmessung,

12, 34, ab eine Flächung,

deren Flächenecke c ist. Also (135) ist nn' ein Stral von c .

Also das Loth cn die Flächenseite dieser Flächung. Also machen die Flächenseiten

von a zu bc , von b zu ac mit ab ;

von a zu bc , von c zu ab mit ac ;

von b zu ac , von c zu ab mit bc

Lothdreiecke, welche bildhaft sind. Nimmt man also co , cp , ar , bs der Flächenseite cn gleich, so sind op , ab ; op , 12; op , 34 Mittelflächungen, und die Flächenseiten theilen den Stab bildhaft, so dass

$$\begin{array}{l} cap \parallel cob, \quad cao \parallel cpb, \\ col \parallel c2p, \quad co2 \parallel clp, \\ co3 \parallel c4p, \quad co4 \parallel c3p, \\ ac1 \parallel alb \parallel bs3, \\ bc3 \parallel b3a \parallel ar1. \end{array}$$

Bei dem Wechselviereck $b132$, $b142$, wo a die Mitte des äussern Gliedes 12, machen der Abstand der Flächenecke von der Mitte des äussern Gliedes, das halbe äussere Glied $a1$ oder $a2$, und die Flächenseite $b3$ oder $b4$ ein Lothdreieck.

Bei dem Wechselviereck $a314$, wo b die Mitte des äussern Gliedes 34, machen der Abstand der Flächenecke von der Mitte des äussern Gliedes ab , das halbe äussere Glied $b3$ oder $b4$, und die Flächenseite $a1$ oder $a2$ ein Lothdreieck.

Bei der Mittelflächung $op12$, wo a die Mitte des äussern Gliedes 12 ist, machen der Abstand der Flächenecke c von der Mitte des äussern Gliedes ca , das halbe äussere Glied $a1$ oder $a2$, und die Flächenseite ca oder cp ein Lothdreieck.

Bei der Mittelflächung $op34$, wo b die Mitte des äussern Gliedes 34 ist, machen der Abstand der Flächenecke

c von der Mitte des äussern Gliedes cb , das halbe äussere Glied $b3$ oder $b4$, und die Flächenseite co oder cp ein Lothdreieck.

138.

Bei zwei gegenfolgend bildhaften Dreiecken eines Doppelstabes sind die Flächenseiten einer Ecke gegen die drei übrigen Glieder die Seiten eines Lothdreiecks.

Es seien 142 $\dagger$ 324 gegenfolgend bildhafte Dreiecke eines Doppelstabes, so dass das äussere Glied 13 und das innere 24 eine gemeinsame Mitte haben.

Man beschreibe über 13 einen Kreis, welcher von dem in 4 auf den Stab gezogenen Loth in a getroffen wird.

Hier ist (137)

$b1 = a1$ die Flächenseite der Ecke 1 zum Gliede 43; $c1 = a3$ die Flächenseite der Ecke 3 zum Gliede 14, oder der Ecke 1 zum Gliede 23; 31 die Flächenseite der Ecke 1 zum Gliede 33.

Also sind die Flächenseiten der Ecke 1 zu den Gliedern 43, 23, 33 die Seiten eines Lothdreiecks $a13$.

Man beschreibe über 12 einen Kreis, welcher von dem in 4 auf den Stab gezogenen Loth in d getroffen wird.

Hier ist (137)

$f4 = d4$ die Flächenseite der Ecke 4 zum Gliede 12; $g4 = d2$ die Flächenseite der Ecke 2 zum Gliede 14 oder der Ecke 4 zum Gliede 32; 42 die Flächenseite der Ecke 4 zum Gliede 22.

Also sind die Flächenseiten der Ecke 4 zu den Gliedern 12, 32, 22 die Seiten eines Lothdreiecks $d24$.

139.

Bei zwei gegenfolgend bildhaften Dreiecken eines Doppelstabes sind die in Bezug auf eine beliebige fünfte Ecke desselben Stabes genommenen Flächenseiten die Seiten eines Lothdreiecks.

Es seien 142 $\dagger$ 324 gegenfolgend bildhafte Dreiecke des Doppelstabes, so dass die Glieder 13, 24 eine gemeinsame Mitte haben. Es seien $d1$, $f1$ die Flächenseiten der Ecke 1 gegen die Glieder

32, 34, so sind (138) 31, $d1$, $f1$ die Seiten eines Lothdreiecks $g13$, wo $g3 = d1$, $g1 = f1$ ist.

Es sei 5 eine beliebige Ecke des Doppelstabes, und $a1$, $b1$, $c1$ die Flächenseiten der Ecke 1 gegen die Glieder 53, 52, 54. Alsdann sind

$$\left. \begin{array}{l} aa, 35, 1\infty \\ bb, 52, 1\infty \\ dd, 23, 1\infty \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$$

$$\left. \begin{array}{l} aa, 35, 1\infty \\ cc, 54, 1\infty \\ ff, 43, 1\infty \end{array} \right\} \text{Flächungen.}$$

Hieraus folgt (129), dass

$$\left. \begin{array}{l} ad, b3, 1\infty \\ af, c3, 1\infty \end{array} \right\} \text{Flächungen.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Also } 1a3 \text{ } \dagger \text{ } 1bd, \\ \quad \quad 1a3 \text{ } \dagger \text{ } 1cf. \end{array}$$

Man ziehe aus a zu $g3$, $g1$ die Zeilen ah , ak , so sind h , k Lothungen, und

$$\begin{array}{l} 1a3 \text{ } \dagger \text{ } 1hg, \\ 1a3 \text{ } \dagger \text{ } gk3, \\ \text{also } 1bd \text{ } \dagger \text{ } gk3, \\ 1cf \text{ } \dagger \text{ } 1hg; \\ \text{aber } g3 = d1, \quad g1 = f1, \\ \text{also } gk = b1, \quad h1 = c1. \end{array}$$

Also sind die Flächenseiten $a1$, $b1$, $c1$ die Seiten des Lothdreiecks $h1a$.

Wenn 13 das äussere, 24 das innere Glied ist, so ist $a1$ die Gegenseite der Lothung.

Wenn 13 das innere, 24 das äussere Glied ist, so ist $a1$ die Nebenseite der Lothung.

140.

Wenn zwei Kreise einander durchschneiden, so bilden die Bänder der Mitten und Durchschnittsecken eine Lothung. Ihre Ecke ist die Flächenecke der beiden Glieder, welche die Kreise auf dem Mittelbände abschneiden. Das Band der Durchschnittsecken heisst daher die Flächenricht der Kreise. Jede Ecke dieser Flächenricht, welche ausserhalb der Kreise liegt, ist die Mitte eines lothhaften Kreises oder die Ecke gleicher Kreisseiten.

Die Kreise seien a, b , das Mittelband schneide auf denselben die Glieder 12, 34 ab. Das Band der Durchschnittsecken 56 sei F , die Ecke $ab56 = h$. Da $a5 = a6$, $b5 = b6$, so sind die Dreiecke $ah5$, $ah6$, ferner $bh5$, $bh6$ deckend, also h eine Lothung und $h5 = h6$.

Der aus h mit diesem Halbmesser beschriebene Kreis treffe das Mittelband in $5'6'$, so ist (133) h die Flächenecke der Glieder 12, $5'6'$ und der Glieder 34, $5'6'$, also ist (108) h die Flächenecke der Glieder 12, 34.

Es sei m eine beliebige Ecke der Flächenricht $56 = F$. Aus m seien Seiten mc , md an die Kreise a, b gezogen, und auf der Flächenricht $56 = F$ seien $m7 = mc$, $m7' = md$ genommen, so sind (135) $m576$, $m57'6$ Wechselvierecke, in welchen drei Ecken übereinstimmen, nämlich:

$$m57 \text{ ++ } m76, \quad m57' \text{ ++ } m7'6,$$

also (122) $m7 = m7'$.

Also ist m die Mitte eines lothhaften Kreises, d. h. eines Kreises, welcher die Kreise a, b lothhaft schneidet.

141.

Wenn aus verschiedenen Ecken eines einen festen Kreis nicht durchschneidenden Stabes lothhafte Kreise beschrieben werden, so schneiden alle diese Kreise einander in zwei festen Ecken, deren Band von dem Stabe gleichmessend getheilt wird. Dieser Stab heisst die Flächenricht der festen Ecke gegen den festen Kreis.

Der feste Stab sei F , der feste Kreis m . Es sei mh lothhaft auf F . Aus h sei ein an m lothhafter Kreis beschrieben.

Auf den Kreisen h, m schneidet der Stab mh die Glieder 56, 78 ab, so sind (135) 56, 78 in Gleichmessung, und $h758$, $h768$ Wechselvierecke, also

$$h75 \text{ ++ } h58, \quad h76 \text{ ++ } h68.$$

Es sei auf $ha = F$ eine zweite Ecke a genommen, aus a ein an m lothhafter Kreis beschrieben, welcher von mh in $5''6''$ getroffen wird, so sind (135) $5''6''$, 78 in Gleichmessung und $h75''8$, $h76''8$ Wechselvierecke, also (122)

$$h75'' \text{ ++ } h5''8, \quad h76'' \text{ ++ } h6''8.$$

Also fallen die Ecken $5''$ in 5 , $6''$ in 6 .

Dasselbe gilt für alle übrigen an m lothhaften Kreise, deren Mitten a' , a'' in F liegen.

Der Stab $ah = F$ heisst die *Flächenricht* der festen Ecke 5 oder 6 gegen den festen Kreis m .

142.

Ein auf dem Mittelstabe zweier festen Kreise in der Flächenecke errichtetes Loth heisst die *Flächenricht*. In derselben liegen die Mitten aller an die festen Kreise lothhaft beschriebenen Kreise.

Diese lothhaften Kreise haben auf dem Mittelstabe zwei gemeinsame Ecken, welche das Glied des Flächenkreises bilden, dessen Mitte die Flächenecke ist. Das Glied des Flächenkreises ist mit jedem der beiden Glieder der festen Kreise in Gleichmessung und bildet mit ihm eine Doppelflächung.

Wenn die beiden festen Kreise durch einen beliebigen Stab geschnitten werden, so liegt die Flächenecke der Glieder desselben in der *Flächenricht*.

Wenn die beiden festen Kreise durch einen beliebigen Kreis geschnitten werden, so liegt die Ecke der Durchschnittsbänder in der *Flächenricht*.

Die Mitten der festen Kreise seien a , b , ihre Glieder auf dem Mittelstabe seien 12 , 34 , die Flächenecke dieser Glieder (109) sei h , so ist h die Mitte des Flächenkreises. Aus h sei an den Kreis a die Seite hc gezogen, und auf dem Mittelstabe $h5 = h6 = hc$ genommen, so ist (140) h die Flächenecke der Glieder 12 , 55 , aber auch der Glieder 12 , 34 , also auch (109) der Glieder 34 , 55 , also ist die aus h an den Kreis b gezogene Seite gleich $h5 = h6 = hc$. Diese Seite ist der Halbmesser des Flächenkreises, welcher an den Kreisen a , b lothhaft ist. Hier sind (122)

∞h , 12 , 55	} Wechselvierecke,
∞h , 12 , 66	
∞h , 34 , 55	
∞h , 34 , 66	

(108) 12 , 34 , 55	} Doppelflächungen,
12 , 34 , 66	
12 , 55 , 66	

also 12, 56 } Gleichmessungen,
34, 56 }

also (115) 14, 23, 56 } Flächungen.
13, 24, 56 }

In h sei auf den Mittelstab das Loth F errichtet, welches die *Flächenricht* heisst. Es sei m eine beliebige Ecke desselben. Aus m sei an den Kreis a die Seite md gezogen und mit derselben ein Kreis beschrieben, welcher den Mittelstab in $5'$, $6'$ trifft. Da die Kreise a , m lothhaft sind, so ist (135) 12, $5'6'$ eine Gleichmessung und $h125'$, $h126'$ sind Wechselvierecke, so dass

$h15' \vdash h5'2$, $h16' \vdash h6'2$,
aber auch $h15 \vdash h52$, $h16 \vdash h62$,
also fällt $5'$ in 5 , $6'$ in 6 .

Also sind auch die Kreise m , b lothhaft.

Dasselbe gilt für alle Kreise, deren Mitten m , m' ... in F liegen.

Also sind die Ecken des Flächengliedes 56 die gemeinsamen Ecken dieser Kreise, deren jeder an beiden festen Kreisen a , b lothhaft ist.

Es sei durch m' ein beliebiger Stab gelegt, welcher an den festen Kreisen a , b die Glieder $1'2'$, $3'4'$ abschneidet.

Es sei die Ecke m' so bestimmt, dass die aus m' an die Kreise a , b gezogenen Seiten einander gleich und gleich $m'd'$ seien, so ist (135) $m'd'$ die Flächenseite der Ecke m' gegen die Glieder $1'2'$ und $3'4'$. Also ist m' die Flächenecke der Glieder $1'2'$, $3'4'$.

Also kann die Ecke m' durch einnamigen Schnitt (109) bestimmt werden.

Es sei nämlich uv eine beliebige Zeile zu dem Stabe $1'2'3'4'$. Man bilde die Ecken

$$u1'v4' = w, \quad u3'v2' = x.$$

Das Band wx schneide auf dem Stabe $1'2'3'4'$ die Ecke m' ab, so ist das Loth $m'h$, welches aus m' auf das Mittelband ab gezogen wird, die Flächenricht der Kreise ab .

Es sei die Ecke m so bestimmt, dass die aus m an die Kreise a , b gezogenen Seiten md , mf einander gleich seien.

Zwei beliebige Stralen der Ecke m schneiden auf den Kreisen a , b die Glieder nn' , oo' ab.

Nun ist (135) md die Flächenseite der Ecke m ge-

gen das Glied nn' ; und mf die Flächenseite der Ecke m gegen das Glied oo' . Aber $md = mf$. Also hat die Ecke m gegen die Glieder nn' , oo' eine gleiche Flächenseite.

Also (134) liegen die Glieder nn' , oo' im Umfange eines Kreises.

Man beschreibe also einen beliebigen Kreis, welcher die Kreise a , b in nn' , oo' schneidet. Es sei m die Ecke der Bänder nn' , oo' , so ist das aus m auf das Mittelband ab gezogene Loth mh die Flächenricht der Kreise a , b .

II.

Man ziehe an den Kreis a aus der Ecke 3 die Seiten $3k$, $3k'$, aus der Ecke 4 die Seiten $4l$, $4l'$. Es seien die Ecken dieser Seiten:

$$3k4l = r, 3k'4l' = r', 3k'4l = t, 3k4l' = t'.$$

Diese vier Kreisseiten bilden ein Kreisviereck $klk'l'$ und eine Kreisvierseitung $rr'tt'$. Hier sind:

ab , kl' , $k'l$, rr' Stralen der Ecke 5,

ab , kl , $k'l'$, tt' Stralen der Ecke 6,

so dass

12, 56 und 34, 56 Gleichmessungen,

12, 34, 55 und 12, 34, 66 Doppelflächungen.

Die Mitte des Gliedes 56 ist die Flächenecke h der Glieder 12, 34, 56.

Die Auflösung beruht auf einem später zu beweisenden allgemeinen Satz (154). Sie ist auch eine Auflösung der Doppelflächung (184).

143.

Das Abbild eines Kreises heisst ein Abkreis.

Der Kreis, welcher den Abkreis bestimmt, heisst der Urkreis.

Der Urkreis und Abkreis entsprechen einander:

1) entweder mittelst eines festen Stabdreiecks und eines festen Stabes;

2) oder mittelst einer festen Ecke und zweier festen Zeilen;

3) oder mittelst zweier festen Ecken und eines festen Stabes.

Der Umkreis und Abkreis sind durch die Bedingung an einander geknüpft, dass das Band entsprechender

Ecken ein Stral der Lichtecke, und die Ecke entsprechender Stäbe eine Ecke des Lichtstabes sein muss.

Diese Sätze sind unmittelbare Folgen des Satzes (84).

I.

Es sei u die Lichtecke, Q der Lichtstab. In einem Stral von u seien v die Sehecke des Urkreises, v' die Sehecke des Abkreises. Es seien 1, 2, 3 beliebige Ecken des Urkreises. Die aus v nach 123 gezogenen Stralen treffen den Lichtstab Q in $1''$, $2''$, $3''$. Dann sind die Ecken $u1v'1'' = 1'$, $u2v'2'' = 2'$, $u3v'3'' = 3'$ die entsprechenden Ecken des Abkreises.

II.

Oder es sei ein dem Lichtstabe Q zeilenhafter Grenzstab S' gegeben. Aus den Ecken des Urkreises 123 seien beliebige Stralen gezogen, welche den Lichtstab Q in $1''2''3''$, den Grenzstab S in $1'''2'''3'''$ treffen. Es seien $u1'''$, $1'1''$ Zeilen, $u2'''$, $2'2''$ Zeilen, $u3'''$, $3'3''$ Zeilen u. s. w. und $11'$, $22'$, $33'$ Stralen von u , so sind $1'2'3'$ die entsprechenden Ecken des Abkreises.

III.

Oder es seien aus einer festen Ecke w Stralen $w1$, $w2$, $w3$ gezogen, welche den Lichtstab Q in $1''$, $2''$, $3''$ treffen. Es seien $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$ Zeilen zu uw , und $11'$, $22'$, $33'$ Stralen von u , so sind $1'2'3'$ die entsprechenden Ecken des Abkreises. Wenn die Berührenden des Urkreises den Lichtstab in $1'''$, $2'''$ treffen, so sind $1'1'''$, $2'2'''$ Berührende des Abkreises.

In allen diesen drei Fällen erhellet aus (84), dass die Ecken entsprechender Stäbe im Urkreis und Abkreis in dem Lichtstabe Q liegen. Ebenso erhellet aus (84), dass Zeilen des Urkreises Stralen des Abkreises entsprechen, deren Ecke in einem zu Q zeilenhaften Grenzstabe R liegt. Ebenso dass Zeilen des Abkreises Stralen des Urkreises entsprechen, deren Ecke in einem zu Q zeilenhaften Grenzstab S liegt. Die Mitte von RS stimmt mit der Mitte von Qu .

144.

Jeder Ecke, Sehne und Seite des Urkreises entspricht eine Ecke, Sehne und Seite des Abkreises.

Das Band der Ecken zweier Seiten des Urkreises und entsprechender Seiten des Abkreises ist ein Stral der Lichtecke.

Zeilen des Lichtstabes im Urkreise oder Abkreise entsprechen Zeilen des Lichtstabes im Abkreise oder Urkreise.

Gleichmessungen des Urkreises oder Abkreises entsprechen Gleichmessungen des Abkreises oder Urkreises.

Bildgleichungen des Urkreises oder Abkreises entsprechen Bildgleichungen des Abkreises oder Urkreises.

Es seien 12 Ecken des Urkreises, $1'2'$ ihre Bilder, so sind sie Ecken des Abkreises. Da 12 eine Sehne des Urkreises A , so ist $1'2'$ eine Sehne des Abkreises.

Es sei der Stab 31 eine Seite des Urkreises und $3'1'$ sein Bild. Da der Zug des Urkreises auf einerlei Seite von 1 liegt, so muss auch der Zug des Abkreises auf einerlei Seite von $1'$ liegen, also $3'1'$ eine Seite des Abkreises sein. Es seien 31, 32 Seiten des Urkreises, so sind ihre Bilder $3'1'$, $3'2'$ Seiten des Abkreises. Die Ecken 3, $3'$ sind entsprechend, also ihr Band ein Stral der Lichtecke u .

Es seien 12 eine Zeile des Lichtstabes Q im Urkreise, $1'2'$ ihr Bild. Da 12, $1'2'$ ihre gemeinsame Ecke in Q haben, so muss in diesem Falle auch $1'2'$ die Zeile von Q sein.

Es seien 1234, 5678 Stabvierecke oder Vierstralungen des Urkreises und $1'2'3'4'$, $5'6'7'8'$ ihre Bilder. Es seien

$$1'1 = a, 2'2 = b, 3'3 = c, 4'4 = d,$$

$$5'5 = f, 6'6 = g, 7'7 = h, 8'8 = k,$$

so sind, je nachdem die Zeichen Ecken oder Stralen bedeuten, $abcd$, $fghk$ Stralen von u oder Ecken von Q . Also in beiden Fällen (47, 56)

$$1'2'3'4' \vdash 1234,$$

$$5'6'7'8' \vdash 5678.$$

$$\text{Wenn also } 1234 \vdash 5678,$$

$$\text{so ist auch } 1'2'3'4' \vdash 5'6'7'8',$$

und umgekehrt.

Wenn 12, 34 eine Gleichmessung ist, so ist auch (68) *ab*, *cd* eine Gleichmessung, also (68) 1'2', 3'4' eine Gleichmessung.

145.

Wenn der Grenzstab des Abkreises den Urkreis weder berührt noch schneidet, so ist der Abkreis eine geschlossene Krümmung oder ein Schlusszug.

In diesem Falle können von zwei beliebigen Ecken *ww'* des Grenzstabes *S* Seiten an den Urkreis gezogen werden, welche an demselben eine umschriebene Vierseitung 5678 und ein eingeschriebenes Viereck der Berührungsecken 1234 bilden. Zieht man aus den Ecken, in welchen der Lichtstab *Q* von *w*1, *w*2 getroffen wird, Zeilen zu *uw*, und aus den Ecken, in welchen *Q* von *w'*3, *w'*4 getroffen wird, Zeilen zu *uw'*, so bilden sie eine Zeilung 5'6'7'8', innerhalb deren der Abkreis in geschlossenem Zuge so enthalten ist, dass er die Zeilen in 1'2'3'4' berührt. Der Abkreis heisst daher alsdann ein *Schlusszug*.

Das Band der Berührungsecken der zeilenhaften Abkreisseiten, nämlich 1'2' oder 3'4' heisst ein *Durchmesser*. Eine durch die Mitte des Durchmessers zu den Seiten gezogene Zeile heisst der *verbundene Durchmesser*.

Zwei verbundene Durchmesser, welche eine Lothung bilden, heissen die *Richten* des Schlusszuges.

Wenn der Lichtstab *Q* ein Stral der Mitte des Urkreises ist, und wenn die Lichtecke in einem Stral, der zum Lichtstabe lothhaft ist, im Unendlichen liegt, so fällt die Mitte des Abkreises in die Mitte des Urkreises, die beiden *Richten* des Abkreises fallen in jene lothhaften Durchmesser des Urkreises, die Bänder entsprechender Ecken des Urkreises und Abkreises sind lothhaft zu dem Lichtstabe und enthalten bildhafte Stabdreiecke:

$$mcc' \parallel n11' \parallel o22' \parallel p33' \dots$$

Die Ecken entsprechender Seiten des Urkreises und Abkreises liegen im Lichtstabe.

Die beiden Grenzstäbe liegen im Unendlichen, d. h. Zeilen des Urkreises entsprechen Zeilen des Abkreises.

146.

Der Schlusszug wird ein Kreis, wenn der von der Lichtecke zur Mitte des Urkreises gezogene Stral ein

Loth des Lichtstabes ist, und wenn zugleich der Grenzstab des Abkreises die Flächenricht der Lichtecke zum Urkreise ist.

Es sei m die Mitte des Urkreises, u die Lichtecke, Q der Lichtstab, RS die zeilenhaften Grenzstäbe des Urkreises und Abkreises.

Es sei um das Loth zu QRS . Wenn nun S die Flächenricht der Lichtecke zum Urkreise ist, b eine beliebige Ecke von S , bl die an den Urkreis gezogene Seite, so ist (141) $bl = bu$ für jede Lage von b . Es sei a die Ecke von bl auf Q , so ist (143) al' die Zeile zu ub .

Es sei c die Ecke von al' auf R , so ist für jede Lage von c , $cl' = cu$, also ist die von irgend einer Ecke des Grenzstabes R an den Schlusszug gezogene Seite dem Abstände dieser Ecke von der Lichtecke u gleich. Also (141) ist der Schlusszug in diesem Falle ein Kreis. Zieht man also von der Lichtecke u eine Seite $u2$ an den Urkreis, welche den Grenzstab R in d trifft, so berührt sie den abgebildeten Kreis in $2'$, so dass $d2' = du$. Hierdurch ist auch die Lage der Kreismitte m' gegeben.

147.

Wenn der Grenzstab des Abkreises den Urkreis durchschneidet, so besteht die Krümmung des Abkreises aus zwei Flügeln. Diese Flügel breiten sich nach entgegengesetzten Seiten in der Richtung zweier festen Stralen ins Unendliche aus. Der Abkreis heisst alsdann ein Stralenzug. Jene festen Stralen heissen die Grenzseiten.

Der Grenzstab S schneide den Urkreis in ab , es seien ca , cb Seiten des Urkreises, so heisst die Ecke c die Spitze des Grenzstabes S , und dieser Grenzstab S heisst der *Wendestral* der Spitze c .

Die Seiten ca , cb treffen den Lichtstab Q in d , f . Aus diesen Ecken seien Zeilen zu ua , ub gezogen, deren Ecke c' sei. Diese Zeilen $c'd$, $c'f$ heissen die *Grenzseiten*. Da (20) cc' ein Stral von u ist, so ist c' das Abbild von c , die Grenzseiten $c'd$, $c'f$ sind die Abbilder der Urkreisseiten ca , cb . Die Abbilder der Berührungsecken a , b liegen auf den Grenzseiten im Unendlichen. Die Flü-

gel des Stralenzuges nähern sich also mit einer sich ins Unendliche erstreckenden Ausbreitung der Grenzseiten.

Der Grenzstab S theilt den Urkreis in zwei Abschnitte. Die beiden Flügel des Stralenzuges sind die Abbilder dieser beiden Abschnitte. Aus einer beliebigen Ecke w des Grenzstabes S , welche ausserhalb des Urkreises liegt, lassen sich zwei Seiten $w1, w2$ an den Urkreis ziehen, welche den Lichtstab Q in $1''2''$ treffen. Zieht man aus $1''2''$ Zeilen zu uw , welche die Stralen $u1, u2$ in $1'2'$ treffen, so sind $1'2'$ die den Ecken 12 des Urkreises entsprechenden Ecken des Stralenzuges. Die Zeilen $1'1'', 2'2''$ berühren den Abkreis in $1'2'$. Das Band $1'2'$ heisst ein *Durchmesser* des Stralenzuges.

Es sei m die Mitte des Urkreises, kK ein Durchmesser desselben. In kK sei die Lichtecke u beliebig angenommen. In gleichem Abstände auf der entgegengesetzten Seite von m sei der Lichtstab Q lothhaft zu kK gezogen und treffe kK in n , so dass $mn = mu$ sei. Der zu Q zeilenhafte Grenzstab S sei ein Stral der Kreismitte m .

Aus einer beliebigen Ecke l des Urkreises sei an denselben die Seite gezogen. Sie treffe die Stäbe Q, S in $1'', w$. Die aus $1''$ zu uw gezogene Zeile treffe den Stab S in t und den Stral $u1$ in $1'$. Dann ist $1'$ eine Ecke des Stralenzuges, $1'1''$ dessen Abkreisseite in $1'$, und $tuw1''$ eine Zeilung. Wenn also der Stral $u1$ den Stab Q in v trifft, so machen (67) die aus $1''$ zu uv, tw oder zu $uv, 11'$ gehenden Stralen eine Gleichmessung, also machen die Glieder $uv, 11'$ eine Gleichmessung. Wenn also der Stralenzug den Durchmesser kK des Urkreises in hH trifft, so sind

$$\left. \begin{array}{l} un, hk \\ un, HK \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Also sind $mknh, mKnh$ Wechselvierecke, so dass
 $mkn \leftrightarrow mnk, mku \leftrightarrow muk.$

Der Grenzstab S treffe den Urkreis in a, b . Man ziehe aus m zu ua, ub die Zeilen md, mf , so sind sie die *Grenzseiten* des Stralenzuges. Sie treffen den Lichtstab Q in d, f .

Das Glied hH ist die *Richt* des Stralenzuges. Eine in h zu Q gezogene Zeile treffe die Grenzseite md in l .

Die aus l zu hH gezogene Zeile treffe den Grenzstab S in g .

Dann ist

$$mnh \parallel mdl \parallel mag,$$

$$mnh \parallel mkn,$$

$$\text{also } mkn \parallel mag,$$

$$\text{also } mg = mn = mu$$

die verbundene Richt des Stralenzuges.

148.

Wenn der Grenzstab des Abkreises den Urkreis berührt, so ist der Abkreis eine Krümmung, deren eine Hälfte nach einer Seite sich ins Unendliche öffnet, deren andere Hälfte aber ganz im Unendlichen liegt.

Der Abkreis heisst in diesem Fall ein Halbzug.

Der Grenzstab S berühre den Urkreis in a . Es sei w eine beliebige Ecke von S , wl berühre den Urkreis in l und schneide den Lichtstab in l'' , aus l'' sei die Zeile zu uw gezogen, welche den Stral ul in l' trifft, so ist l' die entsprechende Ecke des Abkreises und $l''l'$ ihre Seite. Da das Abbild der zweiten Seite wa im Unendlichen liegt, so entspricht jeder Richtung des Strals uw nur eine einzige zeilenhafte Seite, die andere und ihre Ecke liegt im Unendlichen. Also ist auch nur eine Hälfte des Abkreises vorhanden, die andere Hälfte fällt ins Unendliche. Daher heisst dieser Fall des Abkreises *der Halbzug*. Derselbe lässt sich auch beschreiben, wenn aus der festen Ecke a des Urkreises Stralen zu den Ecken $123 \dots$ des Urkreises gezogen werden, welche den Lichtstab in $1''2''3'' \dots$ treffen. Aus diesen Ecken werden Zeilen zu dem festen Stral ua gezogen, welche die Stralen $u1, u2, u3 \dots$ in den entsprechenden Ecken des Halbzeuges $1'2'3' \dots$ treffen. Zieht man an $123 \dots$ Seiten an den Urkreis, welche den Lichtstab in $1'''2'''3'''$ treffen, so sind $1'1'''$, $2'2'''$, $3'3''' \dots$ Seiten des Halbzeuges.

Man ziehe zwei zeilenhafte Seiten an den Urkreis, Q als Lichtstab berühre ihn in b , S als Grenzstab berühre ihn in a . Die Lichtecke u sei beliebig in dem Durchmesser ab angenommen.

Es sei l eine beliebige Ecke des Urkreises. Die Urkreisseite in l treffe Q , S in l''' w . Der Stral al treffe

Q in l'' . Die aus l'' zu ua , aus l''' zu uw gezogenen Zeilen treffen mit dem Stral ul in der Halbzugecke l' zusammen, und $l'''l'$ ist die Halbzugseite in der Ecke l' .

149.

Ein Abkreisviereck ist sich selbst bildhaft, d. h. ist sich selbst bildhaft, d. h. die Stralungen, welche in die Stabvierecke, welche jeder Ecke die Seite mit auf jeder Berührenden den nach den drei übrigen oder Seite die Berührungsecken gehenden Stralen ecke mit den drei übrigen macht, sind bildhaft. Ecken macht, sind bildhaft.

Die Ecken des Abkreisvierecks sind Ecken des Abkreises, und werden durch 1234 bezeichnet.

Die Seiten der Abkreisvierseitung sind Seiten des Abkreises, und werden durch 1234 bezeichnet.

Bei der Neigung zweier Stralen wird immer diejenige der beiden Nebenneigungen verstanden, welche kleiner als eine Lothung ist. Der Satz wird zuerst vom Kreise bewiesen, und sodann auf den Abkreis übergetragen. Bei dem Kreisviereck 1234 seien in der Ecke 1 die Seite a , die nach 234 gehenden Stralen bcd . In der Ecke 2 sei die Seite f , die nach 134 gehenden Stralen bgh . Alsdann folgt aus (132) die Gleichheit der Neigungen

$$ab = bf, ac = bg, ad = bh, \\ \text{also } abcd \parallel b f g h.$$

Also sind beim Kreisviereck die aus den Ecken 1, 2 nach denselben Ecken gehenden Vierstralungen bildhaft.

Dasselbe erhellet für jedes andere Eckpaar. Der aus einer Ecke zu sich selbst gehende Stral ist nämlich die Seite in dieser Ecke. Wenn Vierstralungen des Kreises bildhaft sind, so sind (144) auch die entsprechenden Vierstralungen des Abkreises bildhaft.

Also ist das Abkreisviereck 1234 sich selbst in allen vier Ecken bildhaft.

Bei der Kreisvierseitung 1234 sei auf der Seite 1 die Berührungsecke a , die Ecken

$$12 = b, 13 = c, 14 = d.$$

Auf der Seite 2 sei die Berührungsecke f , die Ecken

$$21 = b, 23 = g, 24 = h.$$

Die aus der Kreismitte m nach diesen Ecken gehenden Stralen seien $a'b'c'd'f'g'h'$. Die Neigung, welche die aus der Kreismitte nach zwei Berührungsecken gehenden Stralen bilden, wird von dem nach der Ecke dieser Berührenden gehenden Stral gehalbt. Bei drei Seiten, welche ein Dreieck bilden, ist (133) die Neigung des Strals der Berührungsecke gegen den Stral einer Ecke des Dreiecks gleich der Neigung der Stralen der beiden andern Ecken des Dreiecks.

Also $a'b' = b'f'$, $a'c' = b'g'$, $a'd' = b'h'$.

Also $a'b'c'd' \parallel b'f'g'h'$.

Also (53) $abcd \parallel b'fgh$.

Also sind bei der Kreisvierseitung die auf den Seiten 1, 2 von denselben Seiten gebildeten Stabvierecke bildhaft. Die Ecke zweier zusammenfallenden Seiten ist nämlich die Berührungsecke.

Wenn Stabvierecke des Kreises bildhaft sind, so sind (144) auch die entsprechenden Stabvierecke des Abkreises bildhaft. Also ist die Abkreisvierseitung 1234 sich selbst an allen vier Seiten bildhaft.

150.

Die von beliebigen Abkreisecken nach einem Abkreisviereck gehenden Vierstralungen sind bildhaft. Sie sind derjenigen Vierstralung bildhaft, welche das Viereck an jeder Ecke mit sich selbst bildet.

Die auf beliebigen Abkreisseiten von einer Abkreisvierseitung abgeschnittenen Stabvierecke sind bildhaft. Sie sind demjenigen Stabviereck bildhaft, welches auf jeder Seite der Vierseitung durch die Vierseitung selbst gebildet wird.

Die Ecken des Abkreisvierecks oder die Seiten der Abkreisvierseitung seien 1234.

Beliebige Ecken des Abkreises oder beliebige Seiten des Abkreises seien u' , u'' .

Die in der Ecke 1 nach 1234 gehenden Stralen seien $abcd$.

Die in der Ecke 2 nach 1234 gehenden Stralen seien $b'fgh$.

Ein von der Ecke zu sich selbst gehender Stral ist nämlich die Seite.

Die in der Ecke u' nach 1234 gehenden Stralen seien $1'2'3'4'$.

Die in der Ecke u'' nach 1234 gehenden Stralen seien $1''2''3''4''$.

Alsdann sind (132) an den Ecken des Kreises die Neigungen

$$\begin{aligned} 1'2' &= 1''2'' = ab = bf, \\ 1'3' &= 1''3'' = ac = bg, \\ 1'4' &= 1''4'' = ad = bh. \end{aligned}$$

Wegen der Gleichheit der Neigungen sind also am Kreise die Vierstralungen bildhaft:

$$1'2'3'4' \vdash 1''2''3''4'' \vdash abcd \vdash bfgh \text{ u. s. w.}$$

Also (144) sind auch am Abkreise die entsprechenden Vierstralungen bildhaft:

$$1'2'3'4' \vdash 1''2''3''4'' \vdash abcd \vdash bfgh \text{ u. s. w.}$$

Bei der Abkreisvierseitung schneiden die Seiten 1234 auf der Seite u' das Stabviereck $1'2'3'4'$, auf der Seite u'' das Stabviereck $1''2''3''4''$ ab.

Auf der Seite 1 schneiden die Seiten 1234 das Stabviereck $abcd$ ab.

Auf der Seite 2 schneiden die Seiten 1234 das Stabviereck $bfgh$ ab.

Der Durchschnitt Seiner eite mit sich selbst ist nämlich die Berührungsecke.

Je drei Seiten des Kreises oder Abkreises bilden eine Dreiseitung. Bei dem Kreise sei m die Mitte, und es seien aus m Stralen nach allen Berührungsecken und Durchschnittsecken der Seiten gezogen. Bezeichnet man die Stralen mit denselben Zeichen wie die Ecken, wohin sie gezogen, so ergeben sich nach (133) die Gleichheiten der Neigungen an der Kreismitte:

$$\begin{aligned} 1'2' &= 1''2'' = ab = bf, \\ 1'3' &= 1''3'' = ac = bg, \\ 1'4' &= 1''4'' = ad = bh. \end{aligned}$$

Hieraus folgen die bildhaften Vierstralungen an der Kreismitte

$$1'2'3'4' \vdash 1''2''3''4'' \vdash abcd \vdash bfgh \text{ u. s. w.}$$

Hieraus (53) die bildhaften Stabvierecke auf den Seiten der Kreisvierseitung

$$1'2'3'4' \vdash 1''2''3''4'' \vdash abcd \vdash bfgh \text{ u. s. w.}$$

Hieraus (144) die bildhaften Stabvierecke auf den Seiten der Abkreisvierseitung:

$1'2'3'4' \parallel 1''2''3''4'' \parallel abcd \parallel bfg h$ u. s. w.

151.

Wenn zwei beliebige Stralen einer Ecke durch einen Stab so geschnitten werden, dass das Glied zwischen Stab und Ecke mit dem Gliede des Abkreises in Gleichmessung ist, so ist auch auf jedem andern Stral dieser Ecke das Glied zwischen Stab und Ecke mit dem Gliede des Abkreises in Gleichmessung.

Die Ecke heisst alsdann die Spitze und der Stab heisst ihr Wendestral.

Der Wendestral ist ein innerer oder äusserer, je nachdem er den Abkreis schneidet oder nicht durchschneidet.

Dem innern Wendestral entspricht eine äussere Spitze, aus welcher sich nach den beiden Durchschnittsecken Abkreisseiten ziehen lassen.

Dem äussern Wendestral entspricht eine innere Spitze, aus welcher sich keine Abkreisseiten ziehen lassen.

Die Ecke sei h , drei beliebige Stralen derselben schneiden auf dem Abkreise die Glieder 12, 34, 56 ab. Es seien f, g, m die Ecken der Abkreisseiten in 1, 2, in 3, 4, in 5, 6, oder die Spitzen der Wendestralen 12, 34, 56. Es seien die Ecken $1324 = k$, $1423 = l$. Als dann ist (149) in der Abkreisecke 1 die nach 1234 oder 2143 oder nach $hflk$ gehende Vierstrahlung der in der Abkreisecke 2 nach 1234 oder nach $hflk$ gehenden Vierstrahlung bildhaft.

Also (46) sind die Ecken flk stabhaft.

In der Abkreisecke 3 ist die nach 1234 oder nach 2143 oder nach $lkhg$ gehende Vierstrahlung der in der Abkreisecke 4 nach 1234 oder nach $lkhg$ gehenden Vierstrahlung bildhaft.

Also (46) sind die Ecken glk stabhaft.

Also sind $fgkl$ Ecken eines Stabes H . Dieser Stab treffe die Stralen 12, 34, 56 in 7, 8, 9, so sind (69) in dem Viereck 1234 die Glieder 12, $h7$ und 34, $h8$ in Gleichmessung. Also schneidet der Stab fg die Gleichmessung 1?, $h7$ ab.

Ebenso schneidet der Stab fm die Gleichmessung 12, $h7'$ ab. Es ist aber (67) nur eine Gleichmessung möglich.

Also fallen die Ecken 7, $7'$ zusammen. Also liegt die Spitze m in dem Stabe H . Also schneidet der Stab H auch auf jedem beliebigen dritten Stral 56 die Gleichmessung 56, $h9$ ab. Also ist nach der Erklärung H der *Wendestral* der Spitze h .

152.

Die Wendestralen aller Ecken eines Stabes liegen in der Spitze dieses Stabes.

Die Spitzen aller Stralen einer Ecke liegen in dem Wendestral dieser Ecke.

Der Stab sei H . Die Ecke h liege so, dass, wenn zwei ihrer Stralen den Abkreis in 12, 34, den Stab in 7, 8 treffen, die Gleichmessungen 12, $h7$ und 34, $h8$ stattfinden, so ist (151) H der Wendestral der Spitze h , und von jedem beliebigen Stral 56 dieser Ecke h liegt die Spitze m in H , und der Wendestral H schneidet die Gleichmessung 56, $h9$ ab. Also muss auch umgekehrt, wenn m eine beliebige Ecke von H ist, der Wendestral von m , nämlich 56, ein Stral von h sein.

153.

Zu einer Ecke den Wendestral zu bestimmen.

Zu einem Stabe die Spitze zu bestimmen.

Wenn zu einer gegebenen Ecke h als Spitze der Wendestral zu bestimmen ist, so ziehe man aus h zwei beliebige Stralen, welche vom Abkreise die Glieder 12, 34 abschneiden.

Man bilde die Ecken $1324 = k$, $1423 = l$, so ist (151) der Stab $kl = H$ der Wendestral von h , welcher die Stralen 12, 34 in 7, 8 so trifft, dass 12, $h7$ und 34, $h8$ Gleichmessungen sind.

Wenn alsdann h eine äussere Spitze, also H ein innerer Wendestral ist, welcher den Abkreis in zwei Ecken schneidet, so sind die von h nach diesen Ecken gehenden Stralen Abkreisseiten oder Berührende.

Wenn zu einem gegebenen Stabe H als Wendestral

die Spitze zu bestimmen ist, so nehme man auf H zwei beliebige Ecken f, g an und bestimme zu denselben als Spitzen die Wendestralen 12, 34. Die Durchschnittsecke h dieser Wendestralen ist (152) die Spitze des Wendestrals H .

154.

Die Spitzen zweier Hauptseiten eines Abkreisvierecks bilden in der dritten Hauptseite eine Gleichmessung. *Die Wendestralen zweier Hauptecken einer Abkreisvierseitung bilden in der dritten Hauptecke eine Gleichmessung.*

Es seien 1234 vier beliebige Abkreisecken und entsprechende Abkreisseiten. Es seien von den

Wendestralen 13, 24, 23, 14, 12, 34,
die Spitzen a, b, c, d, f, g .

Es seien die Ecken $1234 = h, 1324 = k, 1423 = l$,
so sind (151) stabhafte Ecken

$abhl, cdhk, fgkl$.

Dasselbe lässt sich auch auf folgende Art beweisen. Jede Abkreisvierseitung ist sich selbst bildhaft (149), also gelten an der Abkreisvierseitung 1234 die Bildgleichungen

$1fad \parallel f2cb \parallel ac3g \parallel dbg4,$
also (64) $f1da \parallel f2cb \parallel g3ca \parallel g4db$.

Also sind stralenhaft (58)

12, $ab, cd,$
34, $ab, cd,$
 $fg, 13, cd,$
 $fg, 24, cd,$
 $fg, 23, ab,$
 $fg, 14, ab.$

Also sind stabhaft je vier Ecken:

$abhl, cdhk, fgkl$.

Die aus k nach 23, hl gehenden Stralen bilden (69) eine Gleichmessung, also auch (68) die aus c nach 23, hl gehenden Stralen, welche mit den aus c nach fg, kl gehenden Stralen übereinstimmen.

Also sind

fg, kl
ebenso ab, hl } Gleichmessungen
und cd, hk }

Es sei also 1234 ein beliebiges Abkreisviereck, es seien 12, 34 zwei Hauptseiten des Vierecks, so ist aus den Ecken $1324 = k$, $1423 = l$ das Band $kl = H$ die dritte Hauptseite des Vierecks. Die Spitzen f , g der beiden ersten Hauptseiten liegen in der dritten Hauptseite H und bilden in derselben die Gleichmessung fg , kl .

Wenn der Abkreis von einer beliebigen Vierseitung $abcd$ in 1234 berührt wird, die Abkreisseiten durch 1234 bezeichnet werden, die Ecken $12 = f$, $34 = g$ als Hauptecken der Vierseitung angenommen werden, so ist aus den Bändern $1324 = ab$, $1423 = cd$ die Ecke $abcd = h$ die dritte Hauptecke der Vierseitung. Die Wendestralen 12, 34 der beiden ersten Hauptecken f , g liegen in der dritten Hauptecke h , und in h bilden die Wendestralen 12, 34 das eine Glied, die Stralen $1324 = ab$, $1423 = cd$ das andere Glied einer Gleichmessung.

Auch treten hier die übrigen in (103) angezeigten Stabungen und Stralungen ein.

155.

Aus vier Abkreisseiten und der Abkreisecke in der einen sind die Abkreisecken in den drei übrigen Seiten durch einnamigen Schnitt gegeben. *Aus vier Abkreisecken und der Abkreisseite in der einen sind die Abkreisseiten in den drei übrigen Ecken durch einnamigen Schnitt gegeben.*

Es seien die vier Abkreisseiten 1234 gegeben. Hieraus ergeben sich von den

Wendestralen 13, 24, 23, 14, 12, 34

die Spitzen a , b , c , d , f , g .

Hieraus die Ecken

$abcd = h$, $fgcd = k$, $fgab = l$.

Es sei nun auf der Abkreisseite 1 die Abkreisecke 1 gegeben, so giebt der Stral $h1$ auf der Abkreisseite 2 die Abkreisecke 2. Hieraus ergeben sich die beiden andern Abkreisecken durch $k1l2 = 3$, $k2l1 = 4$, und es müssen die Abkreisecken 3, 4 in den Abkreisseiten 3, 4 liegen.

Es seien zweitens die vier Abkreisecken 1234 gegeben.

Hieraus ergeben sich die Ecken

$1234 = h$, $1324 = k$, $1423 = l$.

Es sei nun in der Abkreisecke 1 die Abkreisseite 1 gegeben. Sie treffe die Bänder hl , hk , kl in a , d , f .

Alsdann giebt das Band $a3$ die Abkreisseite 3, das Band $d4$ die Abkreisseite 4, das Band $f2$ die Abkreisseite 2.

156.

Zu fünf gegebenen Abkreisecken sind die in denselben liegenden Abkreisseiten durch einnamigen Schnitt gegeben. *Zu fünf gegebenen Abkreisseiten sind die in denselben liegenden Abkreisecken durch einnamigen Schnitt gegeben.*

Die fünf gegebenen Abkreisseiten oder Abkreisecken seien 12345.

Man nehme zuerst 1234.

Es sei $1423 = g$, $1324 = h$, $gh = k$.

Es seien a , b die Spitzen oder Wendestralen 12, 34, so liegen (154) a , b in k .

Man nehme 1245.

Es sei $1542 = l$, $1452 = m$, $lm = n$.

Es seien a , c die Spitzen oder Wendestralen 12, 45, so liegen (154) a , c in n .

Also ist $a = kn$.

Man nehme 1235.

Es sei $1523 = o$, $1235 = p$, $op = q$.

Es seien d , f die Spitzen oder Wendestralen 13, 25, so liegen (154) d , f in q .

Durch a sind die Abkreisseiten oder Abkreisecken 1, 2 gegeben.

Durch q und 1, 2 sind d , f gegeben. Durch d , f und die Ecken oder Seiten 3, 5 sind die Seiten oder Ecken 3, 5 gegeben. Dann ist $k3 = b$, $n5 = c$ und $bc = 4$.

Die Folge der gewählten Ecken oder Seiten kann beliebig abgeändert werden, beruht aber immer auf Anwendung des Satzes (154).

Jede Spitze liegt in drei Bändern oder jeder Wendestral in drei Ecken.

Z. B. die Spitze a von 12 oder der Wendestral $12 = a$ kann aus 1234, 1235, 1245 bestimmt werden. Es sei das Band der Ecken oder die Ecke der Bänder

1342, 1432 = k ,
 1352, 1532 = r ,
 1452, 1542 = n ,
 so liegt a in $k r n$.

157.

Wenn von zwei Ecken die erste in dem Wendestral der zweiten liegt, so liegt auch die zweite in dem Wendestral der ersten.

Hierbei entsteht eine Abkreisgleichmessung.

Jede Vierseitung und jedes Viereck ist an drei verschiedenen Abkreisen gleichmessend.

Das Abkreisviereck sei 1234.

Es seien f, g die Spitzen der Wendestralen 12, 34.

Es seien die Ecken

1234 = h , 1324 = k , 1423 = l .

Jedes Abkreisviereck ist sich selbst bildhaft (149), also ist die von der Abkreisecke 1 nach 3412 oder 34 f h gehende Vierstrahlung der von der Abkreisecke 2 nach 3412 oder 34 h f gehenden Vierstrahlung bildhaft.

Wenn also die erste Ecke f in dem Wendestral 34 der zweiten Ecke g liegt, so ist

$$34fh \parallel 34hf,$$

also (66) 34, fh eine Gleichmessung.

Also ist in der Abkreisecke 1 die nach 34, fh oder 34, 12 gehende Vierstrahlung eine Gleichmessung. Also (149) sind auch in den Abkreisecken 3, 4 die nach 34, 12 oder 12, 34 gehenden Vierstrahlungen Gleichmessungen.

Aber (66) eine Gleichmessung ist sich selbst bei wechselter Folge der Theile eines Gliedes bildhaft.

Also ist die in der Kreisecke 3 nach 1234 gehende Vierstrahlung der in der Abkreisecke 3 nach 1234 oder nach 1243 gehenden Vierstrahlung bildhaft.

Also ist die in der Abkreisecke 3 nach 12 g h gehende Vierstrahlung der in der Abkreisecke 4 nach 12 g h gehenden Vierstrahlung bildhaft. Also (46) sind die Ecken 12 g stabhaft.

Wenn also die erste Ecke f in dem Wendestral 34

der zweiten Ecke g liegt, so liegt die zweite Ecke g in dem Wendestral 12 der ersten Ecke f .

Zugleich sind dann:

$$\left. \begin{array}{l} 12, gh \\ 34, fh \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Es seien

von den Wendestralen 13, 24, 23, 14
die Spitzen a, b, c, d ,

so sind also auch (69)

$$\left. \begin{array}{l} f1, ad \\ f2, bc \\ g3, ac \\ g4, bd \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Daher heisst in diesem Falle das Abkreisviereck 1234 und die Abkreisvierseitung 1234 eine *Abkreisgleichmessung*.

Die Abkreisgleichmessung entspricht einer Gleichmessung an der Ecke und am Stabe.

Zieht man aus einer beliebigen Abkreisecke u zu der Abkreisgleichmessung 1234 die Stralen $1'2'3'4'$ oder wird eine beliebige Abkreisseite u von der Abkreisgleichmessung 1234 in $1'2'3'4'$ getroffen, so ist in beiden Fällen (150)

$1'2', 3'4'$ eine Gleichmessung.

Ausserdem findet hierbei auch der allgemeine Satz (154) statt, dass die Ecken

$abhl, cdhk, fgkl$

je vier stabhaft und dass

$$\left. \begin{array}{l} fg, kl \\ ab, hl \\ cd, hk \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Auch treten hier die übrigen in (103) angezeigten Stabungen und Stralungen ein.

Wenn in der Abkreisgleichmessung die Ecke h der Wendestralen 12, 34 innerhalb beider Glieder 12, 34 fällt, so ist der Abkreis ein *Schlusszug*. Wenn diese Ecke h ausserhalb beider Glieder 12, 34 liegt, so ist der Abkreis ein *Stralenzug*.

II.

Es werde eine Vierseitung von den Stralen 5678 gebildet. Es seien die Ecken

$$57 = a, 68 = b, 67 = c, 58 = d, 56 = f, 78 = g.$$

Man nehme fg als die beiden ersten Hauptecken an. Die dritte Hauptecke ist $abcd = h$.

Es werde gh von 56 in 12, und fh von 78 in 34 getroffen, so sind

$$\left. \begin{array}{l} gh, 12; \quad g3, ac; \quad g4, bd \\ fh, 34; \quad f1, ad; \quad f2, bc \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Also liegen die Ecken $cl a2, b1 d2$ in fh ; $b3 c4, d3 a4$ in gh . Also (154) lässt sich ein Abkreis beschreiben, welcher die Seiten 5678 in 1234 berührt, und bei welchem die Spitze f von 12 in 34, die Spitze g von 34 in 12 liegt. Also sind an diesem Abkreise die Vierseitung 5678 und das Viereck 1234 gleichmessend.

Man nehme ab als die beiden ersten Hauptecken an. Die dritte Hauptecke ist $cd fg = k$.

Es werde bk von 57 in $1'3'$, und ak von 68 in $2'4'$ getroffen. Also sind

$$\left. \begin{array}{l} bk, 1'3'; \quad b2', cf; \quad b4', dg \\ ak, 2'4'; \quad a1', df; \quad a3', cg \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Also liegen die Ecken $cl' f3', g1' d3'$ in ak ; $d2' f4', g2' c4'$ in bk . Also lässt sich ein Abkreis beschreiben, welcher 5678 in $1'2'3'4'$ berührt, und bei welchem die Spitze a von $1'3'$ in $2'4'$ und die Spitze b von $2'4'$ in $1'3'$ liegt. Also sind an diesem Abkreise die Vierseitung 5768 und das Viereck $1'3'2'4'$ gleichmessend. Man nehme cd als die beiden ersten, $ab fg = l$ als dritte Hauptecke an. Es werde cl von 58 in $1''4''$, dl von 67 in $2''3''$ getroffen. Also sind

$$\left. \begin{array}{l} cl, 1''4''; \quad c2'', bf; \quad c3'', ag \\ dl, 2''3''; \quad d1'', af; \quad d4'', bg \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Also liegen die Ecken $b1'' f4'', g1'' a4''$ in dl ; $a2'' f3'', g2'' b3''$ in cl . Also lässt sich ein Abkreis beschreiben, welcher 5678 in $1''2''3''4''$ berührt, und bei welchem die Spitze c von $2''3''$ in $1''4''$, und die Spitze d von $1''4''$ in $2''3''$ liegt. Also sind an diesem Abkreise die Vierseitung 6758 und das Viereck $2''3''1''4''$ gleichmessend.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass einem Viereck

5678 drei Abkreise mit gleichmessenden Vierseitungen entsprechen.

158.

In einem Stabe liegt in Bezug auf seine Spitze eine Schaar Wendeglieder, deren jedes aus zwei gesellten Spitzen besteht.

In einer Ecke liegt in Bezug auf ihren Wendestral eine Schaar Wendeglieder, deren jedes aus zwei gesellten Wendestralen besteht.

Auf jeder Hauptseite einer Abkreisvierseitung schneiden die beiden andern Hauptseiten ein Wendeglied ab.

In jeder Hauptecke eines Abkreisvierecks machen die nach den beiden andern Hauptecken gehenden Stralen ein Wendeglied.

Auf dem innern Wendestral schneidet der Abkreis ein Hauptwendeglied ab, welches mit jedem andern Wendegliede ein Wechselviereck macht.

Auf dem äussern Wendestral schneidet das zeilenhafte Abkreisviereck ein Hauptwendeglied ab, welches mit jedem andern Wendegliede eine Mittelflächung macht.

Wenn in der äussern Spitze das Hauptwendeglied eine Lothung ist, so halben die beiden gesellten Hauptwendestralen die Neigung jedes Wendegliedes.

Wenn in der innern Spitze zwei Wendeglieder Lothungen sind, so sind alle Wendeglieder Lothungen.

Drei Wendeglieder machen eine Flächung, vier Wendeglieder machen eine Doppelbildung.

(Siehe die Fügung 154.)

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten die Wendestralen ihrer Gegenecken sind, so ist auch (157) die dritte Seite der Wendestral ihrer Gegenecke. Ein solches Dreieck heisst ein *Wendedreieck*, zwei Ecken desselben heissen *gesellte Spitzen*, zwei Seiten desselben heissen *gesellte Wendestralen*, zwei gesellte Spitzen oder gesellte Wendestralen machen ein *Wendeglied*.

In einem Abkreisviereck 1234 seien 12, 34 die beiden Hauptseiten, ihre Ecke $1234 = h$ die dritte Hauptecke.

Es seien $1324 = k$, $1423 = l$ die beiden andern Hauptecken, so ist (151) die dritte Hauptseite $kl = H$ der Wendestral der Spitze h . Wenn 13, 24 von hl in r , s getroffen werden, so sind (69) 13, kr und 24, ks Gleichmessungen, also (151) hl der Wendestral der Spitze k . Aus gleichem Grunde ist hk der Wendestral der Spitze l . Also ist hkl ein Wendedreieck.

Auf dem Stabe H ist kl ein Wendeglied der Spitze h , und k , l sind *gesellte Spitzen*.

Ebenso sind in der Ecke h die nach k , l gehenden Stralen *gesellte Wendestralen* in Bezug auf den Wendestral H und bilden das Wendeglied khl .

Wenn durch die feste Ecke h eine feste Abkreissehne 12 gezogen wird, so geben auf dem festen Wendestral H die aus einer veränderlichen Abkreisecke 3 gehenden Stralen 31, 32 die gesellten Spitzen k , l , also auch die gesellten Wendestralen hk , hl und das Wendeglied khl an.

In einer Abkreisvierseitung seien 1, 2, 3, 4 Abkreisseiten, $12 = f$, $34 = g$ die beiden Hauptecken, ihr Band $fg = H$ die dritte Hauptseite.

Es seien

$13 = a$, $24 = b$, $23 = c$, $14 = d$,
so sind ab , cd die beiden ersten Hauptseiten und $abcd = h$ die dritte Hauptecke.

Es seien die Ecken $cdfg = k$, $abfg = l$, so folgt aus (154), dass h in den Wendestralen der Spitzen f , g ; dass k in den Wendestralen der Spitzen a , b ; dass l in den Wendestralen der Spitzen c , d liegt. Also ist hkl ein Wendedreieck.

Wenn also die feste Ecke h in dem festen Wendestral der Spitze f liegt, und die aus f gezogenen festen Abkreisseiten von einer veränderlichen Abkreisseite 3 in a , c getroffen werden, so sind hc , ha gesellte Wendestralen der Ecke h in Bezug auf ihren Wendestral H .

Wenn ferner die Abkreisseiten 1, 2 von den gesellten Wendestralen hc , ha in d , b getroffen werden, so ist bd eine Abkreisseite.

Erster Fall.

Es sei h eine äussere Ecke, also ihr Wendestral H ein innerer, auf welchem der Abkreis das Hauptwende-

glied tu , dessen Mitte m ist, abschneidet, so ist tu , kl eine Gleichmessung, $mktl$, $mkul$ sind Wechselvierecke (123), so dass

$$mkt \leftrightarrow mtl, \quad mku \leftrightarrow mul.$$

Zieht man die Abkreisseiten ht , hu , so wird jede zu ht gezogene Zeile von hk , hu , hl , jede zu hu gezogene Zeile von hk , ht , hl gehalten. Wenn also als Sonderfall das Hauptwendeglied thu eine Lothung ist, so haben beide gesellte Hauptwendestrallen ht , hu die Neigung jedes beliebigen Wendegliedes khl .

Bei vier Wendegliedern kl , $k'l'$, $k''l''$, $k'''l'''$ sind

$$\left. \begin{array}{l} tu, kl \\ tu, k'l' \\ tu, k''l'' \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen,}$$

$$\text{also (115) } \left. \begin{array}{l} tu, kk', ll' \\ tu, kl', k'l \end{array} \right\} \text{ Flächungen,}$$

$$\left. \begin{array}{l} tt, kl, k'l' \\ uu, kl, k'l' \end{array} \right\} \text{ Doppelflächungen,}$$

$$\text{und (116) } \left. \begin{array}{l} kl, k'l', k''l'' \\ kl, k'l', k'''l''' \end{array} \right\} \text{ Flächungen,}$$

$$\text{und } kk'k''k''' \leftrightarrow ll'l'l''''.$$

Zweiter Fall.

Es sei h eine innere Ecke, also ihr Wendestral H ein äusserer. Man ziehe in h zu H die Zeile, welche den Abkreis in $1'2'$ trifft, und zu H die zeilenhaften Abkreisseiten $3'$, $4'$, so ist (157) $1'2'3'4'$ ein gleichmessendes Abkreisviereck, also h die Mitte von $1'2'$. Es werde H von $3'4'$ in m , von $1'3'$ oder $2'4'$ in t , von $2'3'$ oder $1'4'$ in u getroffen, so ist m die Spitze des Wendestrals $1'2'$ und die Mitte des Hauptwendegliedes tu . Es sei k eine beliebige Ecke von H , der Stral kl' treffe den Abkreis in 3 , der Stral $32'$ treffe H in l , so ist kl ein Wendeglied. Das Abkreisviereck $1'2'3'3$ ist (149) sich selbst bildhaft und giebt also aus den Ecken $1'$ und $2'$ die Bildgleichung

$$\begin{array}{l} m\infty tk \leftrightarrow \infty mul \\ \text{oder } mkt \leftrightarrow mul, \end{array}$$

also ist m die Flächenecke der Glieder tu , kl . Aber m

ist die Mitte von tu . Also (109) machen die Glieder tu , kl eine *Mittelflächung*.

Bei vier Wendegliedern kl , $k'l'$, $k''l''$, $k'''l'''$ ist m die Flächenecke der Glieder

tu , kl ,

tu , $k'l'$

tu , $k''l''$,

tu , $k'''l'''$,

also (108) kl , $k'l'$, $k''l''$ } Flächungen
 kl , $k'l'$, $k'''l'''$ }

und $kk'k''k''' \div ll'l''l'''$.

II.

Wenn, als Sonderfall, khl , $k'hl'$ Lothungen sind, so ziehe man zu hl eine beliebige Zeile, welche von hk , hk' , hk'' , hl' , hl'' in K , K' , K'' , L' , L'' getroffen wird. Da kl , $k'l'$, $k''l''$ die Glieder einer Flächung sind, so ist K die Flächenecke der Glieder $K'L'$, $K''L''$. Da khl eine Lothung ist, so ist (137) hk die Flächenseite des Gliedes $K'L'$, also auch die Flächenseite des Gliedes $K''L''$, also ist $k'hl'$ eine Lothung.

159.

Jede Bildungsecke zweier Dreistralungen ist die Spitze des Eckbandes der Stralungen an einem Abkreise. *Jeder Bildungsstab zweier Stabdreiecke ist der Wendestral der Stabecke an einem Abkreise.*

In u seien 123.

In v seien 567.

Es seien

$1625 = k$, $1735 = l$, $2736 = m$,

so sind (73) klm Stralen einer Bildungsecke B oder Ecken eines Bildungsstabes B .

Es seien $15 = a$, $26 = b$, $37 = c$, so sind (156) $uvabc$ Ecken oder Seiten eines Abkreises, und B ist die Spitze des Eckbandes uv oder der Wendestral der Stabecke uv an diesem Abkreise.

Das eingeschriebene und umschriebene Abkreisdreieck sind stralenhaft.

Auf jeder Abkreisseite schneiden zwei Abkreisseiten das eine Glied, ihr Wendestral und die erste Abkreisecke das andere Glied einer Gleichmessung ab.

Aus zwei Abkreisseiten und Abkreisecken kann zu jeder dritten Abkreisecke die entsprechende Abkreisseite und zu jeder dritten Abkreisseite die entsprechende Abkreisecke bestimmt und dadurch die Stralung der beiden Abkreisdreiecke bewirkt werden.

Es seien 5, 6, 7 Seiten und Ecken eines Abkreises und 1, 2, 3 die Spitzen der Wendestralen 67, 75, 56.

Es seien die Ecken

$$2367 = k, 3175 = l, 1256 = m.$$

Hier liegen k, l, m in den Wendestralen von 1, 2, 3.

Also (157) liegen 1, 2, 3 in den Wendestralen von k, l, m .

Es liegen aber auch 5, 6, 7 in den Wendestralen von k, l, m .

Also sind 15, 26, 37 die Wendestralen von k, l, m .

Es seien also die Ecken

$$1567 = n, 2675 = o, 3756 = p,$$

so sind (157)

$$\left. \begin{array}{l} 67, kn \\ 75, lo \\ 56, mp \end{array} \right\} \text{Gleichmessungen.}$$

Also liegt (72) $n1$ oder 15 in der Ecke 2637. Also sind 15, 26, 37 Stralen einer Ecke 4. Diese Ecke 4 ist also die Lichtecke der verbundenen Dreiecke 123, 567.

Also (75) liegen die Ecken klm in einem Stabe. Dieser Stab ist der Lichtstab der verbundenen Dreiecke 123, 567 und der Wendestral der Lichtecke 4.

Der Abkreis treffe die Stralen 15, 26, 37 in a, b, c , so sind (157) ka, lb, mc Abkreisseiten. Also sind (157)

$$\left. \begin{array}{l} a5, n1 \\ b6, o2 \\ c7, p3 \end{array} \right\} \text{Gleichmessungen.}$$

Wenn also der Lichtstab klm von 15, 26, 37 in t, u, v getroffen wird, so sind die Ecken:

$$v6u7 = a, t7v5 = b, u5t6 = c.$$

Es seien die Abkreisseiten 56 und Abkreisecken 56 gegeben.

Wenn nun die Abkreisecke 7 gegeben ist, so giebt der Wendestral 67 auf der Abkreisseite 5 die Ecke k , der Wendestral 57 auf der Abkreisseite 6 die Ecke l .

Hierdurch ist die Ecke $56kl = m$ und hierdurch die Abkreisseite $m7$ gegeben.

Wenn aber die Abkreisseite 7 gegeben ist, so sind auch die Ecken 1, 2 gegeben, also die Ecke $1526 = 4$ gegeben. Also ist die Abkreisecke $1234 = 7$ gegeben.

161.

Bei einem Abkreis-Sechseck liegen je drei Band-ecken in einem Bildungsstabe. Bei einer Abkreissechseckung liegen je drei Ecken in einer Bildungsecke.

Die sechs Ecken oder Seiten des Abkreises seien 123567.

Zwei Ecken sind zu den vier andern Ecken oder zwei Seiten zu den vier andern Seiten bildhaft (150).

Man wähle z. B. 1 und 3 zu 2567.

$$\text{Es sei } 3627 = k, 1625 = m,$$

$$3527 = o, 1725 = n,$$

$$\text{so ist 1 zu 2657 wie zu } 2m5n,$$

$$3 \text{ zu } 2657 \text{ wie zu } 2ko7,$$

also (150)

$$2m5n \div 2ko7,$$

also (46, 58) liegen k, m in $n7o5 = 1735$. Also sind

$$1625 = m, 1735 = l, 2736 = k$$

Ecken eines Bildungsstabes oder Stralen einer Bildungsecke.

Dieser Satz heisst das *mystische Hexagramm des Pascal*.

Vergleicht man ihn mit den Sätzen (73, 75), so ergeben sich für sechs Ecken oder Stäbe 123567 zwei Hauptfälle, nämlich:

- 1) Wenn 1256, 1357, 2367 stabhaft oder stralenhaft sind, so sind (75) 15, 26, 37 Stralen einer Ecke oder Ecken eines Stabes, und (84) 123, 567 sind Abbild und Urbild.

2) Wenn 1256, 1357, 2736 stabhaft oder strahlenhaft sind, so sind im Allgemeinen 123567 Ecken oder Seiten eines Abkreises. In dem Sonderfall aber (73), wo 167 stabhaft oder strahlenhaft ist, ist auch 523 stabhaft oder strahlenhaft.

Beim Abkreise hat ebenso wie bei Stabungen oder Stralungen (73) die Abtheilung 123, 567 sechs Bildungsstäbe oder Bildungsecken, nämlich:

1526,	1736,	2735,
1527,	1637,	2635,
1625,	1735,	2736,
1627,	1537,	2536,
1725,	1635,	2637,
1726,	1536,	2537.

Wenn zwei Abkreisecken zusammenfallen, so machen sie eine Doppelecke, und ihr Band wird eine Abkreisseite, welche daher durch das Doppelzeichen der Abkreisecke ausgedrückt wird.

Wenn zwei Abkreisseiten zusammenfallen, so machen sie eine Doppelseite, ihre Ecke ist also eine Abkreisecke, welche daher durch das Doppelzeichen der Abkreisseite ausgedrückt wird.

Z. B. das Fünfeck oder die Fünfseitung 12357 lässt sich abtheilen: 123, 537. Also sind stabhaft oder strahlenhaft:

1523,	1733,	2735,
1325,	1735,	2733,
1327,	1537,	2533,
1723,	1533,	2537.

Das Sechseck oder die Sechssseitung 123567 hat 10 Abtheilungen, nämlich:

123, 567	—	125, 367	—	126, 357	—	127, 356	—
135, 267	—	136, 257	—	137, 256	—		
156, 237	—	157, 236	—	167, 235.			

Jede dieser 10 Abtheilungen hat 6, alle zusammen haben also 60 Bildungsstäbe oder Bildungsecken, in welche die 45 Bandecken oder Eckbänder so vertheilt sind, dass je 4 Bildungsstäbe eine gemeinsame Bandecke, oder je 4 Bildungsecken ein gemeinsames Eckband haben, z. B.

1526,	1736,	2735,		1625,	1735,	2736,
1526,	1376,	2375,		1625,	1375,	2376,
1562,	1732,	3567,		1652,	1732,	3657,
1562,	1372,	3657;		1652,	1372,	3567

u. s. w.

162.

Ein Abkreisviereck hat in Bezug auf zwei Abkreisecken vier Bildungsecken. Eine derselben ist die Spitze des Bandes der beiden Vergleichungsecken. Die drei andern sind die drei Hauptecken des Abkreisvierecks. *Eine Abkreisvierseitung hat in Bezug auf zwei Abkreisseiten vier Bildungsstäbe. Einer derselben ist der Wendestral der Ecke der Vergleichungsseiten. Die drei andern sind die drei Hauptseiten der Abkreisvierseitung.*

Am Abkreise sei das Viereck oder die Vierseitung 1234, die beiden Vergleichungsecken oder Vergleichungsseiten seien u' , u'' .

Die Stralen von u' nach 1234 oder die Ecken auf u' durch 1234 seien $1'2'3'4'$.

Die Stralen von u'' nach 1234 oder die Ecken auf u'' durch 1234 seien $1''2''3''4''$. Dann ist (150) und (43, 64)

$$1'2'3'4' \vdash 1''2''3''4'' \vdash 2''1''4''3'' \vdash 3''4''1''2'' \vdash 4''3''2''1''.$$

Die Bildungsecken oder Bildungsstäbe dieser Bildgleichungen sind (74)

$$\begin{aligned} v & \dots 1'2''2'1'', 1'3''3'1'', 1'4''4'1'', 2'3''3'2'', 2'4''4'2'', \\ & \quad 3'4''4'3''; \\ h & \dots 1'1''2'2'', 1'4''3'2'', 1'3''4'2'', 2'4''3'1'', 2'3''4'1'', \\ & \quad 3'3''4'4''; \\ k & \dots 1'4''2'3'', 1'1''3'3'', 1'2''4'3'', 2'1''3'4'', 2'2''4'4'', \\ & \quad 3'2''4'1''; \\ l & \dots 1'3''2'4'', 1'2''3'4'', 1'1''4'4'', 2'2''3'3'', 2'1''4'3'', \\ & \quad 3'1''4'2''. \end{aligned}$$

Aus (154) folgt, dass in den sechs Vierecken oder Vierseitungen, welche u' , u'' mit 12, 13, 14, 23, 24, 34 bilden, v die Spitze des Bandes $u'u''$ oder der Wende-

stral der Ecke $u'u''$ ist. Also ist v für verschiedene Lagen von $u'u''$ veränderlich.

Da $1'1'' = 1$, $2'2'' = 2$, $3'3'' = 3$, $4'4'' = 4$, so ist $h = 1234$, $k = 1324$, $l = 1423$.

Also sind hkl die drei Hauptecken des Vierecks 1234 oder die drei Hauptseiten der Vierseitung 1234. Wenn also 1234 fest bleibt, so bleiben hkl für verschiedene Lagen von $u'u''$ fest.

Also liegen in h , k , l die Bänder oder Ecken

$h \dots 1'4''3'2'', 1'3''4'2'', 2'4''3'1'', 2'3''4'1''$;

$k \dots 1'4''2'3'', 1'2''4'3'', 2'1''3'4'', 3'2''4'1''$;

$l \dots 1'3''2'4'', 1'2''3'4'', 2'1''4'3'', 3'1''4'2''$.

Vergleicht man den vorstehenden Satz mit (126), so erkennt man in diesem einen Sonderfall des vorstehenden allgemeinen Satzes vom Abkreise. Mithin gelten die aus (126) gezogenen Folgerungen mit gehöriger Verallgemeinerung auch beim Abkreise.

163.

Bei einem Abkreissechseck bilden je sechs Bänder eine Abkreissechsseitung. Bei einer Abkreissechsseitung bilden je sechs Ecken ein Abkreissechseck.

Es seien 123567 die Ecken eines Abkreissechsecks oder die Seiten einer Abkreissechsseitung. Es seien

$$1267 = a, \quad 1367 = b,$$

$$2356 = c, \quad 2357 = d,$$

$$67 = u', \quad 23 = u'',$$

$$12 = 1', \quad 13 = 2', \quad 56 = 3', \quad 57 = 4',$$

$$\text{so ist } 1 \text{ zu } 2367 \text{ wie zu } ab67,$$

$$5 \text{ zu } 2367 \text{ wie zu } 23cd,$$

also (150)

$$ab67 \vdash 23cd.$$

Aber $u'1' = a$, $u'2' = b$, $u'3' = c$, $u'4' = d$, $u''1' = 2$, $u''2' = 3$, $u''3' = c$, $u''4' = d$.

Also sind $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ an u' , u'' bildhaft.

Also (150) machen

u' , u'' , $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ eine Abkreissechsseitung oder ein Abkreissechseck.

Es lassen sich 123567 in 10 verschiedene Paare abtheilen (161). Also entsprechen jedem Abkreissechseck

10 Abkreissechseitungen und jeder Abkreissechseitung
10 Abkreissechsecke.

164.

Zwei bildhafte Stabvier- Zwei bildhafte Vierstra-
ecke an gemeinsamer Ecke lungen an gemeinsamem Stral
entsprechen einem Abkreise. entsprechen einem Abkreis.

Aus fünf Abkreisecken Aus fünf Abkreisseiten
ist die sechste durch ein- ist die sechste durch ein-
namigen Schnitt gegeben. namigen Schnitt gegeben.

Es seien 12357 fünf Abkreisecken oder Abkreisseiten.

Es seien $25 = u$, $27 = v$ gegebene Stäbe oder Ecken,
 $1735 = l$, $1725 = n$, $2735 = o$ gegebene Ecken oder
Stäbe.

Man nehme k in v , m in u beliebig so an, dass km
in l liege, so gilt die Bildgleichung (45, 56)

$$2m5n \vdash 2ko7.$$

Es sei die Ecke oder Seite $1m3k = 6$, so sind

$$1625 = m, 1735 = l, 2736 = k$$

stabhaft oder stralenhaft, also (161) ist 6 die sechste Ab-
kreisecke oder Abkreisseite zu den fünf gegebenen 12357.

Man kann der Reihe nach andere $k'm'$ annehmen, so
dass immer $k'm'$ in l liege, und erhält dadurch andere ent-
sprechende Ecken oder Seiten des Abkreises durch den
einnamigen Schnitt

$$1m'3k' = 6'.$$

Nach (156) bestimmt man ebenfalls durch einnamigen
Schnitt zu jeder Abkreisecke die Abkreisseite, oder zu je-
der Abkreisseite die Abkreisecke.

Also ist der Abkreis durch fünf Ecken oder Seiten
vollständig bestimmt.

Eine andere Auflösung siehe (174).

165.

Wenn bei zwei festen Ecken und zwei festen Stäben
eine bewegliche Ecke einen Abkreis beschreibt, so be-
rührt der bewegliche Stab einen Abkreis.

Wenn der bewegliche Stab einen Abkreis berührt, so
beschreibt die bewegliche Ecke einen Abkreis.

Es seien zwei feste Ecken 1, 5, und zwei feste Stäbe

u' , u'' . Eine bewegliche Ecke h beschreibe einen Abkreis A , dessen Ecken 1, 5 seien und welcher von den Stäben u' , u'' in 6, 7, 2, 3 getroffen wird. Alsdann sind (163) die Bänder des Sechsecks 123567 Seiten eines andern Abkreises B .

Der Stab u' werde von 13, $1h$ in b , f ; der Stab u'' werde von 57, $5h$ in d , g getroffen, so folgt aus (150):

Die Ecken 1, 5 geben an dem Abkreisviereck:

$$267h \dots a67f \vdash 2cdg,$$

$$263h \dots a63f \vdash 2c3g.$$

Aber $a2$, $c6$, $d7$, $b3$, 23 , 67 sind Seiten des Abkreises B . Also (150) ist der bewegliche Stab $fg = v$ die Seite desselben Abkreises B . Ebenso erhellt umgekehrt:

Wenn der bewegliche Stab $fg = v$ den Abkreis B berührt, so beschreibt die bewegliche Ecke h den Abkreis A .

166.

Zwei Abkreisvierecke heissen bildhaft, wenn sie an einer beliebigen Abkreisecke bildhaften Vierstrahlungen entsprechen. *Zwei Abkreisvierseitungen heissen bildhaft, wenn sie an einer beliebigen Abkreisseite bildhaften Stabvierecken entsprechen.*

Wenn zwei Abkreisvierecke stabhaften Vierstrahlungen an zwei Bildern entsprechen, so sind sie bildhaft. *Wenn zwei Abkreisvierseitungen an der Ecke zweier Bilder eine gemeinsame Vierstrahlung haben, so sind sie bildhaft.*

Wenn zwei Abkreisvierecke bildhaft sind, so haben sie an zwei Bildern eine stabhafte Vierstrahlung. *Wenn zwei Abkreisvierseitungen bildhaft sind, so haben sie an der Ecke zweier Bilder eine gemeinsame Vierstrahlung.*

Die beiden Abkreisvierecke oder Abkreisvierseitungen seien 1234, 5678.

Die Ecken oder Seiten 1 und 5, 2 und 6, 3 und 7, 4 und 8 heissen *Bilder*. In dem Stabe oder der Ecke B seien $15 = a$, $1625 = b$, $1735 = c$, $1845 = d$.

Bei den Abkreisvierecken sind also (45) die von 1 und 5 nach $abcd$ gehenden Vierstrahlungen bildhaft. Aber

die von 1 nach *abcd* und 5678 gehenden Vierstralungen sind übereinstimmend. Also sind die von 1 nach 5678, von 5 nach 1234 gehenden Vierstralungen bildhaft. Also (150) sind die von einer beliebigen Abkreisecke *u* nach 1234, 5678 gehenden Vierstralungen bildhaft. Also die Abkreisvierecke

1234 ++ 5678.

Bei den Abkreisvierseitungen schneidet (56) die gemeinsame Vierstralung *abcd* auf den Abkreisseiten 1, 5 bildhafte Stabvierecke ab. Das von *abcd* auf 1 abgeschnittene Stabviereck stimmt mit dem auf 1 von 5678 abgeschnittenen Stabvierecke überein. Das von *abcd* auf 5 abgeschnittene Stabviereck stimmt mit dem auf 5 von 1234 abgeschnittenen Stabvierecke überein. Also sind die auf 1 von 5678, auf 5 von 1234 abgeschnittenen Stabvierecke bildhaft. Also (150) sind die auf einer beliebigen Abkreisseite *u* von den Abkreisseiten 1234 und 5678 abgeschnittenen Stabvierecke bildhaft. Also sind die Abkreisvierseitungen

1234 ++ 5678.

Ebenso erhellet umgekehrt: Wenn die Abkreisvierecke oder Abkreisvierseitungen 1234, 5678 bildhaft sind, so müssen sie an zwei Bildern, z. B. an 1 und 5, bildhaft sein, also müssen die Ecken oder Stralen

1625 = *b*, 1735 = *c*, 1845 = *d*
Ecken eines Bildungsstabes oder Stralen einer Bildungsecke *B* sein.

Aber (43, 64) Vierstralungen oder Stabvierecke sind auf vierfache Art bildhaft. Also haben bildhafte Abkreisvierecke ebenso wie bildhafte Stabvierecke vier Bildungsstäbe; desgleichen haben bildhafte Abkreisvierseitungen ebenso wie bildhafte Vierstralungen vier Bildungsecken.

Nämlich (74)

- I. 1625, 1735, 1845, 2736, 2846, 3847.
- II. 1526, 1836, 1746, 2835, 2745, 3748.
- III. 1827, 1537, 1647, 2538, 2648, 3645.
- IV. 1728, 1638, 1548, 2637, 2547, 3546.

II.

Wenn bei zwei Abkreisvierecken oder Abkreisvierseitungen 1234, 5678 die Ecken oder Bänder

$1625 = b$, $2736 = f$, $3847 = h$
in B liegen, so sind sie bildhaft. Denn (161)

$1625 = b$, $1735 = c$, $2736 = f$
liegen in einem Stabe oder in einer Ecke. Also liegt c
in B . Also liegen b , c , f , h in B . Aber auch (161)

$3847 = h$, $3517 = c$, $1845 = d$
liegen in einem Stabe oder in einer Ecke. Also liegt
 d in B .

Also liegen in B :

$1625 = b$, $1735 = c$, $1845 = d$.

Also sind die Abkreisvierecke oder Abkreisvierseitun-
gen bildhaft, d. i.

$1234 \div 5678$.

167.

In den Abkreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Dreiseitigung zu beschreiben, Seiten in drei gegebenen deren Ecken in drei gegebenen Strahlen einer Ecke liegen.

Es sei z. B. 163 so zu bestimmen, dass 16 in b , 63 in f , 31 in h liege, wo $b f h$ gegeben sind und in B liegen. Man nehme die Ecken oder Seiten 2, 5 beliebig so an, dass 25 in b liege. Aus 2 und f ergibt sich 7, so dass 27 in f liegt; aus 7 und h ergibt sich 4, so dass 47 in h liegt; aus 4 und 5 ergibt sich d , so dass d in B liegt.

Wenn nun im ersten Falle, wo d eine Ecke des Sta-
bes B ist, d ausserhalb des Abkreises liegt, so lassen sich
aus d zwei Abkreisseiten 1, 1' ziehen, wodurch 8 in 1,
8' in 1' fällt.

Dann ergeben sich aus 1 und b , aus 1' und b die
Ecken 6, 6', so dass 16, 1'6' in b liegen; aus 6, 6' die
Ecken 3, 3', so dass 36, 3'6' in f liegen. Dann müssen
31, 3'1' in h liegen, weil 8 in 1, 8' in 1' fällt.

Im zweiten Falle ist d der Stral, welcher von der
Ecke B zur Ecke der Abkreisseiten 45 gezogen wird.
Wenn dieser Stral den Abkreis schneidet, so fallen in der
Durchschnittsecke 1 die Seiten 1, 8, in der Durchschnit-
tecke 1' die Seiten 1', 8' zusammen. Dann ergeben sich
aus der Seite 1 und dem Stral b , aus der Seite 1' und

dem Stral b die Seiten $6, 6'$, so dass $16, 1'6'$ in b liegen. Aus den Seiten $6, 6'$ ergeben sich die Seiten $3, 3'$, so dass $63, 6'3'$ in dem Stral f liegen; dann müssen die Ecken $31, 3'1'$ in dem Stral h liegen.

168.

Den Berührungskreis zu bestimmen zu drei Kreisen, zu zwei Kreisen und einem Stabe, zu einem Kreise und zwei Stäben, zu einem Kreise, Stab und Ecke, zu einem Kreise und zwei Ecken.

Allgemeiner Fall.

Die Kreise a, b, c seien von dem Kreise m in d, f, g berührt. Diese Ecken liegen also in den Mittelbändern ma, mb, mc .

Es treffe df den Kreis a in h , so sind mf, ah , also bf, ah Zeilen.

Es treffe fg den Kreis c in n , so sind mf, cn , also bf, cn Zeilen.

Es seien die Ecken:

$$bcfn = A, canh = B, abhf = C.$$

Da ah, bf, cn Zeilen sind, so sind (23) die Ecken ABC stabhaft.

Es treffe dg die Kreise a, c in k, o , so sind ak, mg und co, md Zeilen. Also sind ak, cg und ad, co Zeilen.

Da ak, cg und ah, cn Zeilen, und die Dreiecke ahk, cng gleichschenkelig sind, so sind hk, gn Zeilen.

Da ak, cg Zeilen, ah, cn Zeilen, hk, gn Zeilen, so sind (20) hn, kg, ac Stralen einer Ecke B .

Es treffe hk den Stab ABC in D . Nun sind hk, gn Zeilen, also Dh, Af Zeilen.

Aber ah, bf sind Zeilen.

Also (19) sind Da, Ab Zeilen.

Die Ecken ABC sind aus den Kreisen abc gegeben. Denn es schneide bc auf den Kreisen b, c die Glieder $34, 5'6'$ ab. Nun sind bf, cn Zeilen, die Dreiecke $fb3, nc5'$ und $f'4, ncb'$ gleichschenkelig, also $f3, n5'$ Zeilen, $f4, n6'$ Zeilen, also (109) A die Flächenecke der Glieder $36', 45'$.

Es schneide ca auf den Kreisen c , a die Glieder 56, 1'2' ab, es schneide ab auf den Kreisen a , b die Glieder 12, 3'4' ab, so erhellet ebenso, dass B die Flächenecke der Glieder 62', 51' und C die Flächenecke der Glieder 23', 14' ist.

Diese Ecken heissen die *Aehnlichkeitsecken* der Kreise. Da Da , Ab Zeilen sind, so ist auch die Ecke D auf dem Stabe ABC gegeben.

Das Dreieck dhk ist dem Kreise a so eingeschrieben, dass die Seiten kd , dh , hk in den Ecken B , C , D liegen. Man ziehe also (167) aus D einen beliebigen Stral, welcher den Kreis a in h' , k' trifft. Der Stral Bk' trifft den Kreis a in d' . Der Stral Ch' trifft den Kreis a in o' . Das Band $d'o'$ trifft den *Aehnlichkeitsstab* ABC in l .

Die aus l an den Kreis a gezogenen beiden Seiten ld geben die Berührungsecken d . Der Stral Cd giebt auf dem Kreise b die Berührungsecke f . Der Stral Bd giebt auf dem Kreise c die Berührungsecke g . Alsdann müssen ad , bf , cg Stralen einer Ecke m sein, welche die gesuchte Kreismitte ist.

Die Stralen Bh' , Bk' treffen den Kreis c in n' , g' .

Da B die *Aehnlichkeitsecke* der Kreise c , a ist, so sind cn' , ah' Zeilen, cg' , ak' Zeilen; die Dreiecke $n'cg'$, $h'ak'$ sind gleichschenkelig, also sind $g'n'$, $h'k'$ oder $g'n'$, Dk' Zeilen. Aber Ac , Da sind Zeilen, cg' , ak' sind Zeilen, also (19) Ag' , Dk' Zeilen. Also ist n' eine Ecke des Strals Ag' . Dieser Stral treffe den Kreis b in f' . Da A die *Aehnlichkeitsecke* der Kreise b , c ist, so sind bf' , cn' Zeilen. Aber cn' , ah' sind Zeilen. Also sind bf' , ah' Zeilen. Also liegt die Ecke f' in dem Stral Ch' .

Hieraus ergibt sich der Satz:

Das Viereck $o'f'g'd'$ hat die Eigenschaft des Abkreisvierecks (166).

Wenn nämlich $o'f'$ ein Stral von C , $f'g'$ ein Stral von A , $g'd'$ ein Stral von B ist, so ist $d'o'$ ein Stral der festen Ecke l des *Aehnlichkeitsstabes* ABC .

Dieser Satz giebt folgende zweite für alle drei Kreise gleichmässige und sehr einfache Auflösung:

Aus C ziehe man einen beliebigen Stral, welcher die Kreise a , b in den wechselnamigen Ecken $o'f'$ trifft. Der

Stral Af' treffe den Kreis c in der wechselnamigen Ecke g' . Der Stral Bg' treffe den Kreis a in der wechselnamigen Ecke d' . Dann trifft das Band $d'o'$ den Ähnlichkeitsstab ABC in der festen Ecke l .

Diese zweite Auflösung führt auf die Auflösung der zweiten Aufgabe:

Zwei Kreise a, b und ein Stab c sollen berührt werden von einem Kreise m .

Die von den Kreismitten a, b auf den Stab c gezogenen Lothe treffen die Kreise a, b in den Ähnlichkeitsecken B, A . Die Ecke $ABab = C$ ist die Ähnlichkeitsecke der Kreise a, b .

Man ziehe aus C einen beliebigen Stral, welcher die Kreise a, b in den wechselnamigen Ecken $o'f'$ trifft. Der Stral Af' trifft den Stab c in g' .

Der Stral Bg' trifft den Kreis a in d' . Das Band $d'o'$ trifft den Ähnlichkeitsstab in l . Die aus l an den Kreis a gezogene Seite ld giebt die Berührungsecke d .

Die dritte Aufgabe ist:

Zwei Kreise a, b und eine Ecke c sollen von einem Kreise m berührt werden.

Hier fallen die Ähnlichkeitsecken A, B des allgemeinen Falls in die gegebene Ecke c . Man ziehe zu bc die Zeile aD , welche den Ähnlichkeitsstab Cc in D trifft. Man ziehe aus D einen beliebigen Stral, welcher den Kreis a in h', k' trifft. Der Stral ck' trifft den Kreis a in d' , der Stral Ch' trifft den Kreis a in o' . Das Band $d'o'$ trifft den Ähnlichkeitsstab Cc in l , die aus l an den Kreis a gezogene Seite ld giebt die Berührungsecke d .

In dem allgemeinen Fall, wo drei Kreise gegeben sind, entsprechen jedem Kreispaaire zwei Ähnlichkeitsecken, den Kreisen b, c die Ähnlichkeitsecken A, A' ; den Kreisen c, a die Ähnlichkeitsecken B, B' ; den Kreisen a, b die Ähnlichkeitsecken C, C' , so dass Flächenecken sind:

A von 36', 45';	A' von 35', 46';
B von 62', 51';	B' von 61', 52';
C von 23', 14';	C' von 24', 13'.

Drei Kreise haben also vier Aehnlichkeitsstäbe $\overline{ABC}$, $\overline{A'B'C}$, $\overline{AB'C'}$, $\overline{A'BC'}$.

Jedem Aehnlichkeitsstabe entsprechen zwei Berührungskreise. Also haben drei Kreise 8 Berührungskreise.

Zwei Kreise und ein Stab haben ebenfalls vier Aehnlichkeitsstäbe, also acht Berührungskreise.

Zwei Kreise und eine Ecke haben zwei Aehnlichkeitsstäbe, also vier Berührungskreise.

Die vierte Aufgabe ist:

Ein Kreis a und zwei Stäbe b , c sollen von einem Kreise m berührt werden.

Man ziehe aus der Kreismitte a Lothe auf die Stäbe c , b , welche den Kreis a in B , C treffen, so sind B , C die Aehnlichkeitsecken des Kreises zu den Stäben.

Die Sehnen der Berührungsecken dg , df liegen in B , C , also sind fg , BC Zeilen. Da im allgemeinen Fall fg , BC , $f'g'$ Stralen von A sind und hier fg , BC Zeilen sind, so müssen auch $f'g'$, BC Zeilen sein. Man ziehe also zu BC eine beliebige Zeile, welche die Stäbe b , c in f' , g' trifft. Die Stralen Bg' , Cf' treffen den Kreis a in d' , o' . Das Band $d'o'$ trifft den Aehnlichkeitsstab BC in l . Die aus l an den Kreis a gezogene Seite ld giebt die Berührungsecke d .

Die fünfte Aufgabe ist:

Ein Kreis a , eine Ecke b und ein Stab c sollen von dem Kreise m berührt werden.

Man ziehe aus der Kreismitte a ein Loth auf den Stab c , welches den Kreis a in B trifft, so ist B die Aehnlichkeitsecke des Kreises zum Stabe. Die Aehnlichkeitsecken A , C , sowie die Ecken f , f' des allgemeinen Falles fallen in die Ecke b , und die Ecken D , k , k' in die Ecke B . Da nun im allgemeinen Fall Dh , Ag und Dh' , Ag' Zeilen sind, so sind hier Bh , bg und Bh' , bg' Zeilen. Man nehme also auf dem Stabe c eine beliebige Ecke g' an und ziehe zu bg' die Zeile Bh' an den Kreis a . Der Stral Bg' trifft den Kreis a in d' , der Stral bh' trifft den Kreis a in o' , das Band $d'o'$ trifft den Aehnlichkeitsstab Bb in l . Die

aus l an den Kreis a gezogene Seite ld giebt die Berührungsecke d .

Die sechste Aufgabe ist:

Ein Kreis a und zwei Ecken b, c sollen von dem Kreise m berührt werden.

Hier treffen C, f, f' des allgemeinen Falles in b ; die Ecken B, g, g' des allgemeinen Falles in c . Da im allgemeinen Falle fg, hk und $f'g', h'k'$ Zeilen sind, so sind hier bc, hk und $bc, h'k'$ Zeilen. Man ziehe also zu dem Aehnlichkeitsstabe bc eine beliebige Zeile, welche den Kreis a in $h'k'$ trifft. Der Stral ck' trifft den Kreis a in d' . Der Stral bh' trifft den Kreis a in o' . Das Band $d'o'$ trifft den Aehnlichkeitsstab in l . Die aus l an den Kreis a gezogene Seite ld giebt die Berührungsecke d .

169.

Zwei bildhafte Abkreisvierecke geben mittelst einer beliebigen Abkreisecke auf einem Doppelstabe ein doppelbildhaftes Achteck.

Zwei bildhafte Abkreisvierseitungen geben mittelst einer beliebigen Abkreisseite in einer Doppelecke eine doppelbildhafte Achtstrahlung.

Auf dem Doppelstabe W seien die Ecken 1234, 567 gegeben.

Man nehme auf dem Abkreise eine beliebige Abkreisecke u an. Die von u nach 1234567 gezogenen Stralen geben auf dem Abkreise die Ecken 1234567. Hierdurch ergeben sich die Ecken $1625 = b, 1735 = c$. Die Ecken bc geben den Bildungsstab B .

Man bestimme die Abkreisecke S , so dass die Ecke $1845 = d$ in B liege.

In der Doppelecke W seien die Stralen 1234, 567 gegeben.

Man ziehe an den Abkreis eine beliebige Seite u . Die Stralen 1234567 geben auf u die Ecken 1234567.

Man ziehe aus diesen Ecken an den Abkreis die Seiten 1234567. Hierdurch ergeben sich die Bänder $1625 = b, 1735 = c$.

Die Bänder bc geben die Bildungssecke B .

Man bestimme die Abkreisseite S , so dass das

Der aus u nach der Abkreisecke 8 gehende Stral giebt auf dem Doppelstabe W die Ecke 8.

Da die Ecken bcd in einem Stabe B liegen, so sind (166) die Abkreisvierecke 1234, 5678 bildhaft.

Also sind in u die Vierstrahlungen 1234, 5678 bildhaft.

Also sind auf dem Doppelstabe W die Stabvierecke 1234, 5678 bildhaft.

Band 1845 = d ein Stral von B sei.

Die Abkreisseite 8 giebt auf der Abkreisseite u die Ecke 8 und hierdurch in der Doppelecke W den Stral 8.

Da die Bänder bcd in einer Ecke B liegen, so sind (166) die Abkreisvierseitungen 1234, 5678 bildhaft.

Also sind auf der Abkreisseite u die Stabvierecke 1234, 5678 bildhaft.

Also sind in der Doppelecke W die Vierstrahlungen 1234, 5678 bildhaft.

170.

Wenn zwei Abkreisvierecke einem dritten bildhaft sind, so sind sie einander bildhaft.

Es seien die Abkreisvierecke 1234, 5678 einem dritten $abcd$ bildhaft, also

$$1234 \parallel abcd,$$

$$5678 \parallel abcd,$$

so dass (166) die Ecken

$$1a1a = f, 1b2a = g,$$

$$1c3a = h, 1d4a = k$$

Ecken eines Bildungsstabes B , und

$$a5a5 = l, a6b5 = m,$$

$$a7c5 = n, a8d5 = o$$

Ecken eines Bildungsstabes C sind.

Also (166) sind die aus irgend einer Abkreisecke u nach 1234, $abcd$ gehenden Vierstrahlungen bildhaft. Ebenso sind die aus u nach 5678,

Wenn zwei Abkreisvierseitungen einer dritten bildhaft sind, so sind sie einander bildhaft.

Es seien die Abkreisvierseitungen 1234, 5678 einer dritten $abcd$ bildhaft, also

$$1234 \parallel abcd,$$

$$5678 \parallel abcd,$$

so dass (166) die Bänder

$$1a1a = f, 1b2a = g,$$

$$1c3a = h, 1d4a = k$$

Stralen einer Bildungsecke B , und die Bänder

$$a5a5 = l, a6b5 = m,$$

$$a7c5 = n, a8d5 = o$$

Stralen einer Bildungsecke C sind.

Also (166) sind die an irgend einer Abkreisseite u von 1234, $abcd$ gebildeten Stabvierecke bildhaft. Ebenso sind die an u von 5678, $abcd$

abcd gehenden Vierstralungen bildhaft.

Also (44) sind die aus *u* nach 1234, 5678 gehenden Vierstralungen bildhaft.

Also (166) sind die Abkreisvierecke

1234 ++ 5678.

entstehenden Stabvierecke bildhaft.

Also sind (59) die an *u* von 1234, 5678 entstehenden Stabvierecke bildhaft.

Also (166) sind die Abkreisvierseitungen

1234 ++ 5678.

171.

Bei einem stralenhaften Abkreissechseck und einer stabhaften Abkreissechsseitung ist jedes Glied den beiden andern bildhaft. Die drei Glieder machen eine Abkreisflächung.

Die drei Glieder seien 15, 26, 37 und liegen in *v*.

Es sei $1527 = k$, so ist

in 2 . . $15vk$ ++ 1567,

in 7 . . $15vk$ ++ 1532,

also (150, 166)

1567 ++ 1532.

Es sei $1567 = l$, so ist

in 6 . . $15vl$ ++ 1527,

in 7 . . $15vl$ ++ 1536.

Also (150, 166)

1527 ++ 1536.

Dasselbe gilt für jedes der übrigen Glieder. Also (vergleiche 106)

1532 ++ 1567,

1536 ++ 1527,

2613 ++ 2675,

2617 ++ 2635,

3721 ++ 3756,

3725 ++ 3716.

Wenn bei dem stralenhaften Sechseck zwei Theile eines Gliedes, z. B. 3 und 7, sich vereinigen, so ist dieses vereinigte Glied eine Abkreisseite. Es können aber aus *v* zwei Abkreisseiten gezogen werden, also entstehen dann zwei Doppelflächungen.

Ebenso wenn bei der stabhaften Sechsseitung zwei Theile eines Gliedes sich vereinigen, z. B. 3 und 7, so schneidet der Stab *v* in diesem vereinigten Gliede den Ab-

kreis. Da aber zwei Durchschnittsecken stattfinden, so ergeben sich ebenfalls zwei Doppelflächungen.

In beiden Fällen gelten die Doppelflächungen:

15, 26, 33 und 15, 26, 3'3',

deren Bildgleichungen sind:

$$\begin{array}{ll} 1532 \text{ ++ } 1563, & 153'2 \text{ ++ } 1563', \\ 2613 \text{ ++ } 2635, & 2613' \text{ ++ } 263'5. \end{array}$$

Wenn die beiden Theile zweier Glieder sich vereinigen, z. B. 2 und 6, 3 und 7, so entsteht das gleichmessende Abkreisviereck oder die gleichmessende Abkreisvierseitung (157), deren Glieder 15, 23 sind.

172.

Der Flächung am Abkreise entspricht eine Flächung am Stabe und an der Ecke.

Die Glieder der Abkreisflächung 15, 26, 37 liegen in v .

Man nehme am Abkreise eine Ecke oder Seite u an, so machen (150) in der Ecke u die nach 15, 26, 37 gehenden Stralen eine Flächung, oder an der Seite u die von 15, 26, 37 gebildeten gleichnamigen Glieder. Wenn also W ein beliebiger Stab oder eine beliebige Ecke ist, so macht die Stralung oder Stabung in u an W ebenfalls eine Flächung 15, 26, 37.

173.

Zwei stralenhafte Abkreisvierecke sind bildhaft.

Wenn bei zwei bildhaften Abkreisvierecken drei Bildbänder in einer Ecke liegen, so liegt das vierte Bildband in derselben Ecke.

Zwei stabhafte Abkreisvierseitungen sind bildhaft.

Wenn bei zwei bildhaften Abkreisvierseitungen drei Bildecken in einem Stabe liegen, so liegt die vierte Bildecke in demselben Stabe.

Zu der Ecke v sei B der Wendestral, zu dem Stabe v sei B die Spitze. Alsdann folgt aus (151):

Wenn $15 = a$, $26 = b$ in v liegen, so liegen in B :
1625, 1256.

Wenn $15 = a$, $37 = c$ in v liegen, so liegen in B :
1735, 1357.

Wenn $15 = a$, $48 = d$ in v liegen, so liegen in B :
1845, 1458.

Wenn also 15, 26, 37, 48 in v liegen, so liegen in B (161):

1625, 1735, 1845, 2736, 2846, 3847,
1256, 1357, 1458, 2367, 2468, 3478.

Also (166) sind die Abkreisvierecke oder Abkreisvierseitungen 1234, 5678 bildhaft,

1234 $\dagger$ 5678,

und B ist ihr Bildungsstab oder ihre Bildungsecke.

Ausserdem finden (166) noch drei andere Bildungsstäbe oder Bildungsecken statt, nämlich:

II. 1526, 1836, 1746, 2835, 2745, 3748.

III. 1827, 1537, 1647, 2538, 2648, 3645.

IV. 1728, 1638, 1548, 2637, 2547, 3546.

Aber 15, 26, 37, 48 liegen in v .

Also liegen diese drei andern Bildungsstäbe oder Bildungsecken h , k , l in v , nämlich

h . . 1836, 1746, 2835, 2745,

k . . 1827, 1647, 2538, 3645,

l . . 1728, 1638, 2547, 3546.

Man vergleiche hiermit den Satz (126), wo die Abkreisvierecke 1234, 5678 Stäbe sind, deren Ecke in B liegt, oder wo die Abkreisvierseitungen 1234, 5678 Ecken sind, deren Band in B liegt, und wo also h , k , l Flächenstäbe oder Flächenecken sind, nämlich h von ab , cd ; k von ac , bd ; l von ad , bc .

Auch finden hier wegen der Stralung oder Stabung in v vier Abkreisflächungen statt (171), nämlich:

15, 26, 37

15, 26, 48

15, 37, 48

26, 37, 48

} Abkreisflächungen.

174.

Der Abkreis und das Abkreisviereck machen am Doppelstabe vier Flächun- Der Abkreis und die Abkreisvierseitung geben in der Doppelecke vier

gen und eine Bildgleichung.

Aus fünf Abkreisecken ist die sechste in einem gegebenen Stabe durch einnamigen Schnitt bestimmt.

Flächungen und eine Bildgleichung.

Aus fünf Abkreisseiten ist die sechste in einer gegebenen Ecke durch einnamigen Schnitt bestimmt.

Am Abkreise sei $abcd$ das Viereck oder die Vierseitung. Die drei Paare Gegenseiten des Vierecks und der Abkreis schneiden auf dem Doppelstabe W die Glieder 15, 26, 37, 48 ab. Ebenso bilden die von der Doppelecke W nach den drei Paaren Gegenecken der Vierseitung gehenden Stralen und die an den Abkreis gezogenen Seiten die Glieder 15, 26, 37, 48; und zwar entsprechen die Bänder der Ecken ad , bc , ac , bd , ab , cd den Ecken oder Stralen 1, 5, 2, 6, 3, 7.

Nun giebt das Viereck oder die Vierseitung des Abkreises 48 cd

an a . . 4821, an b . . 4856.

Ebenso giebt das Viereck oder die Vierseitung des Abkreises 48 bd

an a . . 4831, an c . . 4857.

Ebenso giebt das Viereck oder die Vierseitung des Abkreises 48 bc

an a . . 4832, an d . . 4867.

Also (150) 4821 $\ddagger$ 4856,

4831 $\ddagger$ 4857,

4832 $\ddagger$ 4867.

Also (106) 15, 26, 48

15, 37, 48

26, 37, 48

und (106) 15, 26, 37

Flächungen.

Es seien nun vier Abkreisecken oder Abkreisseiten $abcd$ und ein Stab oder eine Ecke W gegeben, so sind in W durch $abcd$ auch die Glieder 15, 26, 37 gegeben. Wenn also in W noch eine fünfte Abkreisecke oder Abkreisseite 4 gegeben ist, so giebt jede der drei Flächungen 15, 26, 48; 15, 37, 48; 26, 37, 48 durch einnamigen Schnitt (106) die sechste Abkreisecke oder Abkreisseite 8 in W .

Siehe die andere Auflösung (164).

175.

Die einfache Flächung am Doppelstabe entspricht einer Abkreisflächung bei zeilenhafter Lage des Stabes.

Es sei v eine beliebige Ecke, 12, 34, 56, $h\infty$ Strahlen von v . Es sei u eine beliebige Abkreisecke, und der Stab W die Zeile zu $u\infty$. Alsdann geben die von u gezogenen Strahlen auf dem Doppelstabe W die Glieder 12, 34, 56, $h\infty$, so dass (173)

$$\left. \begin{array}{l} 12, 34, h\infty \\ 12, 56, h\infty \\ 34, 56, h\infty \\ 12, 34, 56 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$$

also (109) h die Flächenecke der Glieder 12, 34, der Glieder 12, 56, der Glieder 34, 56.

Dasselbe ergibt sich, wenn der Doppelstab u den Abkreis berührt, die Abkreisseite ∞ die Zeile zu u ist und die Spitzen der Wendestralen 12, 34, 56, $h\infty$ in einem Stabe v liegen.

176.

Zwei Wendestralen und eine Abkreisseite schneiden auf einem zeilenhaften Stabe eine einfache Flächung ab. Zu einer Abkreisecke ist die entsprechende Abkreisseite durch eine einfache Flächung gegeben.

Es sei abc ein Abkreisdreieck, zu ab sei eine Zeile gezogen, auf welcher die Wendestralen ca , cb das Glied 12, der Abkreis das Glied 34, und die Abkreisseite c die Ecke h abschneidet. Das Abkreisviereck $34ca$ giebt

$$\text{an } c \dots 34h1, \text{ an } b \dots 342\infty,$$

also (150)

$$34h1 \vdash 342\infty,$$

also (106) 12, 34, $h\infty$ eine einfache Flächung oder (109) h die Flächenecke der Glieder 12, 34.

Um also zu einer Abkreisecke c die entsprechende Abkreisseite ch zu bestimmen, ziehe man einen beliebigen Stab, auf welchem der Abkreis das Glied 34 abschneidet. Zn dem Stabe ziehe man im Abkreise eine beliebige Zeile ab , wodurch sich auf dem Stabe das Glied 12 ergibt.

Zu den Gliedern 12, 34 bestimme man (109) die Flächenecke h , so ist hc die Abkreisseite der Ecke c .

177.

Zwei Wendestralen und eine Abkreisseite schneiden auf einem Stabe eine Flächung ab.

Zu einer Abkreisecke ist die entsprechende Abkreisseite durch den einnamigen Schnitt einer Flächung gegeben.

Es sei abc ein Abkreisdreieck. Auf einem beliebigen Stabe W schneiden die Wendestralen ca , cb das Glied 26, die Abkreisseite c und der Gegenstral ab das Glied 73, der Abkreis das Glied 48 ab. Das Abkreisviereck $48ca$ giebt

an c . . 4872, an b . . 4863,

also (150)

4872 $\div$ 4863,

also (106) 26, 37, 48 eine Flächung.

Um also zu einer Abkreisecke c die entsprechende Abkreisseite zu bestimmen, ziehe man einen beliebigen Stab W , auf welchem der Abkreis das Glied 48 abschneidet. Man nehme zwei beliebige Abkreisecken a , b an. Die Wendestralen ca , cb geben auf W das Glied 26 an, der Gegenstral ab treffe W in 3.

Man ziehe aus 48 beliebige Stralen, welche von einem Stral aus 3 in a' , b' getroffen werden. Die Stralen $a'2$, $b'6$ treffen $b'8$, $a'4$ in c' , d' , das Band $c'd'$ trifft W in 7. Dann ist (106)

26, 37, 48 eine Flächung,

also $c7$ eine Abkreisseite.

178.

Auflösung des Wechselvierecks.

Die Bildgleichung des Wechselvierecks ist (122)

324 $\div$ 346, 328 $\div$ 386.

Die Hauptecke 3 und das Nebenglied 26 sind gegeben, das Doppelglied 48 ist zu bestimmen. Der Doppelstab sei W . Auf dem Abkreise sei u eine beliebige Ecke, $u\infty$ die Zeile zu W . Aus den von u nach den Ecken 326 in W gehenden Stralen ergeben sich die Abkreisecken 326,

hieraus die Ecken $263\infty = v$, $362\infty = a$, $236\infty = b$. Das Band ab ist (153) der Wendestral von v und trifft den Abkreis in 48. Die von u zu den Abkreisecken 48 gezogenen Stralen geben auf W die Ecken 48.

Da (157) auf dem Abkreise 3∞ , 48 und 26, 48 gleichmessende Vierecke sind, so giebt in W die Ecke 3 die Mitte des Doppelgliedes 48, und 26, 48 ist eine Gleichmessung.

Da 2∞ , 36, 48 in a , und 6∞ , 32, 48 in b liegen, so sind (171) diese Sechsecke Abkreisflächungen, also (172) sind auf dem Doppelstabe W :

$\infty 6, 32, 48$ } einfache Flächungen.
 $\infty 2, 36, 48$ }

II.

Zur Vereinfachung kann man statt des Abkreises einen Kreis, und 26 als Durchmesser des Kreises annehmen.

III.

Auf ähnliche Art wird das Wechselviereck durch Abkreisseiten aufgelöst. Der Doppelstab u sei eine Abkreisseite, die Ecken 326 von u geben die Abkreisseiten 326, die Abkreisseite ∞ ist die Zeile zu u , hieraus die Bänder $263\infty = v$, $362\infty = a$, $236\infty = b$; die Ecke ab ist die Spitze des Wendestrals v , die aus der Ecke ab gezogenen Abkreisseiten schneiden auf u das Doppelglied 48 ab.

Die gewöhnliche Auflösung dieser Aufgabe ist in (135) angezeigt. In der bisherigen Bildlehre heisst sie die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat.

In der *Sectio determinata* des Apollonius heisst diese Aufgabe so:

„Auf einem Stabe 26 eine Ecke 4 oder 8 so zu bestimmen, dass die Quadrate der Glieder 24, 64 oder 28, 68 sich wie die Glieder 23, 63 verhalten.“

179.

Auflösung der Mittelflächung.

Die Bildgleichung der Mittelflächung eines Doppelstabes W (109) ist:

$$324 \div 386,$$

wo 3 die Mitte des Doppelgliedes sein muss.

Die Flächenecke 3 und das Nebenglied 26 sind gegeben.

Auf dem Abkreise sei u eine beliebige Ecke, $u\infty$ die Zeile zu W . Aus den von u nach 326 in W gehenden Stralen ergeben sich die Abkreisecken 326, hieraus die Ecke $263\infty = v$. Man bestimme (153) zu dem Wendestral 3∞ die Spitze o . Der Stral vo schneidet auf dem Abkreise das Glied 48 ab. Die von u nach 48 gehenden Stralen geben auf W das Doppelglied 48.

Wegen der Stralung in v ist (171) 3∞ , 26, 48 eine Abkreisflächung.

Auf dem Doppelstabe W ist also (172) 3∞ , 26, 48 eine Flächung, oder 3 die Flächenecke der Glieder 26, 48. Da (157) $3\infty 48$ ein gleichmessendes Abkreisviereck ist, so ist auf dem Doppelstabe W die Ecke 3 die Mitte des Doppelgliedes 48.

II.

Zur Vereinfachung kann man statt des Abkreises einen Kreis und 26 als Sehne des Kreises annehmen.

III.

Auf ähnliche Art wird die Mittelflächung durch Abkreisseiten aufgelöst:

Der Doppelstab u sei eine Abkreisseite, die Ecken 326 von u geben die Abkreisseiten 326, die Abkreisseite ∞ sei die Zeile zu u , es seien die Bänder $263\infty = v$, $362\infty = a$, $236\infty = b$, so ist (154) die Ecke $ab = p$ die Spitze des Wendestrals v .

Es sei t die Spitze des Wendestrals 3∞ , so schneidet $tp = o$ auf dem Abkreise das Glied 48 ab. Die in 48 gezogenen Abkreisseiten schneiden auf dem Doppelstabe u das Doppelglied 48 ab.

Die gewöhnliche Auflösung dieser Aufgabe ist in (135) angezeigt. In der bisherigen Bildlehre heisst sie, ebenso wie das Wechselviereck, die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat.

180.

Zwei Wendestralen und eine Abkreisseite schneiden auf einem zeilenhaften Stabe, welcher eine Abkreisseite ist, ein Wechselviereck ab.

Wenn drei Abkreisecken, in einer derselben die Abkreisseite, und eine zweite zum Gegenstral zeilenhafte Abkreisseite gegeben sind, so ist der Abkreis durch ein Wechselviereck gegeben.

Es sei abc ein Abkreisdreieck, eine zu ab gezogene Zeile werde vom Abkreise in 4 berührt, von der Abkreisseite c und den Wendestralen ca , cb in 326 getroffen.

Es sei die Ecke $c4ab = d$.

Das Abkreisviereck $abc4$ giebt

an $c \dots 2634$, an 4 $\dots abd\infty$,

also (150) $2634 \parallel abd\infty$,

aber $\dots abd\infty \parallel 264\infty$,

also $\dots 2634 \parallel 264\infty$,

also (106) 26, 44, 3∞ eine Flächung,

also ist 3 die Flächenecke der Glieder 26, 44, oder 3246 ein Wechselviereck, so dass

$324 \parallel 346$.

Nimmt man $38 = 34$, so ist (123)

$328 \parallel 386$,

und 26, 48 eine Gleichmessung.

Wenn also drei Ecken abc eines Abkreises gegeben sind, die Abkreisseite c in der Ecke c gegeben ist, und zu dem Gegenstral ab eine Zeile W gegeben ist, welche von dem Abkreise berührt werden soll, so sind die Ecken 326 gegeben. Hieraus bestimme man nach (177) das Doppelglied 48 des Wechselvierecks 3246, 3286.

Die Aufgabe hat also zwei Auflösungen.

181.

Eine Abkreisgleichmessung bildet auf einem Stabe Wechselvierecke.

Der Abkreis schneide auf dem Stabe W das Glied 12 ab. In W sei die Ecke 3 beliebig, aus 3 seien an den Abkreis die Seiten $3c$, $3d$ gezogen, so ist (157) $cd12$ eine Abkreisgleichmessung, cd der Wendestral der Spitze 3, 12 der Wendestral der Spitze h , welche in cd liegt.

Wenn cd den Stab W in 4 trifft, so ist (157)

12, 34 eine Gleichmessung.

Es seien a, b die Mitten der Glieder 12, 34, so sind (123) $a134, a234, b312, b412$ Wechselvierecke, so dass

$$\begin{array}{rclcl} a13 & ++ & a41 & ++ & 243, \\ a23 & ++ & a42 & ++ & 143, \\ b31 & ++ & b23 & ++ & 421, \\ b41 & ++ & b24 & ++ & 321. \end{array}$$

Auch sind Flächenecken

1 von $b2, 34$; 2 von $b1, 34$,
3 von $a4, 12$; 4 von $a3, 12$.

Auf einem beliebigen Stral von 3 ist $fg, k3$ eine Gleichmessung. Wenn also cf die Zeile zu W ist, so wird 34 von cg in b gehalten.

182.

Auflösung des Wechselfünfecks oder der zweinamigen Gleichung.

Die Bildgleichung des Wechselfünfecks ist (121)

$$324 ++ 546,$$

$$\text{oder } \infty 234 ++ 56\infty 4.$$

Der Bildungsstab oder die Bildungsecke enthält also:

$$B \dots \infty 625, \infty \infty 35, 2\infty 36.$$

Gegeben sind im Doppelstabe W das Hauptglied 35, das Nebenglied 26; zu bestimmen ist das Doppelglied 48.

Man zieht also aus einer beliebigen Abkreisecke u zum Doppelstabe W die Zeile $u\infty$; die aus u nach 35, 26 gehenden Stralen geben auf dem Abkreise die Glieder 35, 26, hieraus ergeben sich die Ecken $\infty 625 = b, 2\infty 36 = f$; die Abkreisseite in ∞ wird von 35 in c getroffen. Die Ecken bcd geben den Bildungsstab B . Wenn dieser den Abkreis in 48 schneidet, so geben die von u nach 48 gehenden Stralen auf W das Doppelglied 48.

Zieht man aus c die zweite Abkreisseite cm , so giebt der Stral um auf W die Ecke m . Da $m\infty 35, m\infty 48$ (157) gleichmessende Abkreisvierecke sind, so ist auf dem Doppelstabe W die Ecke m die Mitte der Glieder 35, 48.

Oder man berühre den Doppelstab u durch einen Abkreis, ziehe aus 35, 26 die Abkreisseiten 3, 5, 2, 6 und

zu u die zeilenhafte Abkreisseite ∞ . Die Ecken je zweier Abkreisseiten geben die Eckbänder

$$\infty 625 = b, 2\infty 36 = f.$$

Die Ecke der Abkreisseiten 35 giebt mit der Abkreisecke ∞ das Eckband c . Die Bänder bcd geben die Ecke B . Wenn B ausserhalb des Abkreises liegt, so geben die aus B gezogenen Abkreisseiten 4, 8 auf u das Doppelglied 48.

Das Band c schneidet den Abkreis in einer zweiten Ecke m . Die in m gezogene Abkreisseite m schneidet den Doppelstab u in m . Da die Abkreisvierseitungen $m\infty 35$, $m\infty 48$ gleichmessend sind (157), so ist auf dem Doppelstabe u die Ecke m die Mitte der Glieder 35, 48.

Diese Aufgabe heisst in der Bildlehre *die Auflösung der zweinamigen (quadratischen) Gleichung*.

Nach Euklid wird sie so ausgedrückt: auf einem Stabe eine Ecke 4 so zu bestimmen, dass die von derselben zu einem gegebenen Gliede 35 genommene Fläche einer gegebenen Fläche, nämlich der Fläche der Glieder 32, 56 gleich sei (*applicare ad rectam datam rectangulum dato aequale, deficiens quadrato, excedens quadrato*).

In der *Sectio determinata* des Apollonius wird diese Aufgabe so dargestellt: die Ecke 4 so zu bestimmen, dass die Fläche der Glieder 42, 45 getheilt durch das Glied 46 dem gegebenen Gliede 32 gleich sei; oder dass die Fläche der Glieder 43, 46 getheilt durch das Glied 42 dem gegebenen Gliede 56 gleich sei.

II.

Zur Vereinfachung kann man statt des Abkreises einen Kreis annehmen.

Wenn eine Nebenecke in eine Hauptecke fällt, so ergibt sich das einfache Wechselfünfeck

$$324 \div 246.$$

$$B \dots \infty 622, \infty \infty 32, 2\infty 36.$$

183.

Die Seite des gleichseitigen Kreiszehnecks durch das Wechselfünfeck zu bestimmen.

Die Ecken des gleichseitigen Kreiszehnecks seien durch 0123456789 bezeichnet, der Durchmesser ist 05, die von der Kreisecke 9 nach den übrigen Kreisecken gehenden Stralen treffen diesen Durchmesser in den gleichbezeichneten Ecken. Wegen der gleichen Neigungen in der Kreisecke 9 sind in dieser Ecke alle Vierstralungen bildhaft. Also sind auch alle Stabvierecke auf dem Durchmesser bildhaft.

Die von 9 nach 0246, 2468 gehenden Vierstralungen sind bildhaft, der Stral 96 ist die Zeile zum Durchmesser 05, also ist auf dem Durchmesser

$$024\infty \parallel 24\infty 8, \\ \text{oder } 024 \parallel 428.$$

Aber auf dem Durchmesser ist 1 die Mitte von 02 und 48, also $28 = 04 = 45$, also $428 = 245$,

$$\text{also } 024 \parallel 245,$$

$$\text{also } 240 \parallel 452,$$

$$\text{also } \infty 452 \parallel \infty 240,$$

$$\text{also } \infty 452 \parallel 40\infty 2.$$

Der Bildungsstab dieser Bildgleichung enthält die Ecken

$$\infty 044, \quad \infty \infty 54, \quad 4\infty 50.$$

II.

Man nehme also eine beliebige Kreisecke u an und ziehe aus u zum Durchmesser 05 die Zeile, welche den Kreis in ∞ trifft. Der von u zur Kreismitte 4 gehende Stral treffe den Kreis in 4. Das Kreisglied 45 und die Berührende in ∞ geben die Ecke $\infty \infty 54 = c$, das Kreisglied 4∞ giebt auf dem Durchmesser die Ecke $4\infty 50 = f$, der Bildungsstab $cf = B$ trifft den Kreis in 2, 2', die von u nach diesen Kreisecken gehenden Stralen treffen den Durchmesser in 2, 2'. Dann ist das Glied 24 gleich der Seite des Zehnecks 09, und das Glied $2'4 = 25$ die Querseite des Zehnecks 96. Die in den Mitten der Abschnitte 02, 02' auf den Durchmesser gezogenen Lothe treffen den Umfang in den Ecken 1, 9 und 3, 7.

Man sieht an diesem Beispiele, wie sehr diese Auflösung alle bisher bekannten Verfahrungsarten an Einfachheit übertrifft.

184.

Auflösung der Doppelflächung.

Die Bildgleichung der Doppelflächung ist für die Glieder 13, 26 (119)

1324 ++ 1346, 2614 ++ 2643,
oder 1324 ++ 3164, 2614 ++ 6234.

Der Bildungsstab oder die Bildungsecke enthält also die Ecken oder Bänder

$B \dots 1623, 1236, 1133, 2266.$

Durch B ergeben sich die Abkreisecken oder Abkreisseiten 4, 8, hieraus mittelst der Abkreisecke oder Abkreisseite u in dem Stabe oder der Ecke W das Doppelglied 48.

Hieraus folgt (157), dass 1348 und 2648 gleichmessende Abkreisvierecke oder Abkreisvierseitungen sind. Also sind in W :

13, 48 }
26, 48 } Gleichmessungen.

Ebenso sind am Abkreise

16, 23, 48 und 12, 36, 48
strahlenhaft oder stabhaft. Also sind in W aus (115 und 172)

13, 26, 44 }
13, 26, 88 } Doppelflächungen,

16, 23, 48 }
12, 36, 48 } Flächungen.

II.

Die zweite Auflösung beruht auf dem allgemeinen Satz (154). Siehe auch (142 II.).

In W seien 13, 26.

Es sei an den Ecken oder Seiten 13 ein Abkreis beschrieben. An diesem Abkreis giebt 2 die Seiten oder

Ecken $2'2''$, und 6 die Seiten oder Ecken $6'6''$. Man bilde :

$$\begin{aligned} 2''6' &= a, & 2'6'' &= b, & 2'6' &= c, & 2''6'' &= d, \\ & & ab &= k, & cd &= l, \\ & & Wk &= 4, & Wl &= 8, \end{aligned}$$

so hat man :

$$\begin{aligned} (154) \quad & \left. \begin{array}{l} 13, 48 \\ 26, 48 \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen,} \\ (115) \quad & \left. \begin{array}{l} 13, 26, 44 \\ 13, 26, 88 \end{array} \right\} \text{ Doppelflächungen.} \end{aligned}$$

Die Doppelflächung wird in der *Sectio determinata* des Apollonius so ausgedrückt:

„Auf dem Doppelstabe die Ecke 4 so zu bestimmen, dass die von 4 zu den Gliedern 12, 36 genommenen Flächen sich wie die Glieder 12, 36 verhalten, wo dann auch die von 4 zu den Gliedern 16, 23 genommenen Flächen sich wie die Glieder 16, 23 verhalten müssen.“

185.

Zwei Wendestralen, eine Abkreisseite und ihr Gegenstral schneiden auf einer Abkreisseite eine Doppelflächung ab.

Wenn drei Abkreisecken, in einer derselben die Abkreisseite und ausserdem eine zweite Abkreisseite gegeben sind, so ist der Abkreis durch eine Doppelflächung gegeben.

Es sei abc ein Abkreisdreieck. Auf einer Abkreisseite 4 schneiden die Wendestralen ca , cb das Glied 26, die Abkreisseite c und ihr Gegenstral ab das Glied 31 ab. Es sei die Ecke $c4ab = d$. Das Abkreisviereck $abc4$ giebt an $c \dots 2634$, an 4 $\dots abd1$,

$$\begin{aligned} \text{also (150) } & 2634 \quad \vdash \quad abd1, \\ & \text{aber } abd1 \quad \vdash \quad 2641, \\ & \text{also } 2634 \quad \vdash \quad 2641, \end{aligned}$$

also (106) 13, 26, 44 eine Doppelflächung.

Wenn also drei Abkreisecken abc , in der einen Ecke c die Abkreisseite c und ausserdem eine zweite Abkreisseite W gegeben sind, so sind in W die Glieder 13, 26

gegeben, und die Berührungsecke 4 wird bestimmt durch Auflösung der Doppelflächung (184). Dann sind

$$\left. \begin{array}{l} 13, 26, 44 \\ 13, 26, 88 \\ 16, 23, 48 \\ 12, 36, 48 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$$

$$\left. \begin{array}{l} 13, 48 \\ 26, 48 \end{array} \right\} \text{Gleichmessungen,}$$

so dass zwei Auflösungen möglich sind.

186.

Auf einem Stabe, welcher durch die Ecke einer Abkreisseite und ihres Gegenstrals geht, schneiden die beiden Wendestrallen und der Abkreis eine Doppelflächung ab.

Es sei abc ein Abkreisdreieck, die Abkreisseite c werde von dem Gegenstral ab in 4 getroffen, durch 4 sei ein Stab W gelegt, auf welchem die Wendestrallen ca , cb das Glied 26, der Abkreis das Glied 13 abschneiden. Das Abkreisviereck $13ca$ giebt

$$\text{an } c \dots 1342, \text{ an } b \dots 1364,$$

$$\text{also (150) } 1342 \mp 1364,$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} 13, 26, 44 \\ 13, 26, 88 \\ 16, 23, 48 \\ 12, 36, 48 \end{array} \right\} \text{Flächungen,}$$

$$\left. \begin{array}{l} 13, 48 \\ 26, 48 \end{array} \right\} \text{Gleichmessungen.}$$

Wenn aus 4 eine zweite Abkreisseite gezogen wird, so liegt (157) die Doppelecke 8 in cc' .

Wenn also auf dem Doppelstabe W die Glieder 13, 26 gegeben sind, und durch Auflösung der Doppelflächung (184)

$$13, 26, 44$$

die Ecke 4 bestimmt wird, so lässt sich durch 13 eine Schaar Abkreise legen; jeder derselben hat die Eigenschaft, wenn an denselben aus 4 die Abkreisseite c gezo-

gen wird, aus c_2, c_6 die Abkreisecken a, b bestimmt werden, dass ab ein Stral der Ecke 4 sei.

187.

Auflösung des gleichmessenden Fünfecks.

Die Bildgleichung desselben ist

$$1234 \div 56 \infty 4,$$

wobei das Glied 12 in 3 gleichmessend getheilt oder gehalten ist.

In der *Sectio determinata* des Apollonius heisst diese Aufgabe so:

„Wenn auf dem Doppelstabe die Glieder 16, 25 gegeben sind, ausserhalb des einen und innerhalb des andern eine Ecke 4 zu bestimmen, welche zu diesen Gliedern 16, 25 gleiche Flächen habe.“

Aus der obigen Bildgleichung folgt der Bildungsstab oder die Bildungsecke

$$B . . 1625 = b, 1 \infty 35 = c, 2 \infty 36 = f.$$

Wenn also auf dem Doppelstabe die Glieder 16, 25 gegeben sind, so ist auch 3 als Mitte von 12 gegeben. Man nimmt nun auf dem Abkreise eine beliebige Ecke u an, woraus sich durch Stralung die Abkreisecken 12356 ergeben, und zieht zum Doppelstabe die Zeile $u \infty$.

Oder wenn der Doppelstab eine Abkreisseite u ist, so ziehe man aus 12356 die Abkreisseiten 12356, und zu u die zeilenhafte Abkreisseite ∞ .

In beiden Fällen bilde man nach der obigen Bestimmung b, c, f , hieraus B , und hieraus durch die Abkreisecken oder Abkreisseiten 48 auf dem Doppelstabe das Doppelglied 48.

Da auf dem Doppelstabe 12, 3∞ eine Gleichmessung machen, so ist auf dem Abkreise 123 ∞ ein gleichmessendes Abkreisviereck oder eine gleichmessende Abkreisvierseitung.

188.

Auflösung des Wechselschnitts.

Die Bildgleichung des Wechselschnitts ist (118)

$$1234 \div 5614,$$

$$\text{also } B . . 1625 = b, 1135 = c, 2136 = f.$$

Wenn also in dem Stabe oder der Ecke W die Ecken oder Stralen 12356 gegeben sind, so ergeben sich an dem Abkreise mittelst der beliebigen Abkreisecke oder Abkreisseite u die Ecken oder Seiten 12356, hieraus nach der obigen Bestimmung b, c, f , und hieraus der Bildungsstab oder die Bildungsecke B . Aus B ergeben sich auf dem Abkreise die Ecken oder Seiten 4, 8, und hieraus mittelst u in W das Doppelglied 48. Man hat also auch die Bildgleichung

$$1238 \mp 5618.$$

Aus b, c, f folgen (172, 173)

$$\left. \begin{array}{l} 16, 25, 48 \\ 11, 35, 48 \\ 12, 36, 48 \end{array} \right\} \text{Flächungen.}$$

189.

Der Doppelschnitt des Abkreises ist ein Abkreissiebeneck, dessen siebente Ecke in dem Bildungsstabe des Sechsecks liegt.

Der Doppelschnitt des Abkreises ist eine Abkreissiebenseitung, deren siebente Seite in der Bildungsecke der Sechseitung liegt.

Dem Abkreisdoppelschnitt entspricht der Doppelschnitt am Stabe oder an der Ecke.

Am Abkreise sei das Sechseck oder die Sechseitung 123567.

Der Bildungsstab B oder die Bildungsecke B enthält die Ecken oder Bänder

$$1625 = b, 1735 = c, 2736 = f.$$

Wenn nun B ein innerer Stab oder eine äussere Ecke ist, so ergeben sich aus B am Abkreise die Ecken oder Seiten 4, 8, und es entstehen (166) zwei bildhafte Abkreissiebenecke oder Abkreissiebenseitungen 1235674, 1235678, so dass (166)

$$\begin{array}{l} 1234 \mp 5674, \\ 1238 \mp 5678. \end{array}$$

Aus den Stralungen oder Stabungen an b, c, f folgen

$$\left. \begin{array}{l} 16, 25, 48 \\ 17, 35, 48 \\ 27, 36, 48 \end{array} \right\} \text{Abkreisflächungen.}$$

Durch den Abkreisdoppelschnitt ist der Doppelschnitt am Stabe oder an der Ecke W (117) aufgelöst. Man nehme am Abkreise eine beliebige Ecke oder Seite u . Da in W die Ecken oder Stralen 123567 gegeben sind, so sind durch die Stralung oder Stabung an u auch die Abkreisecken oder Abkreisseiten 123567 gegeben, hieraus bcf und hieraus B . Aus B ergeben sich am Abkreise die Ecken oder Seiten 4, 8 und hieraus mittelst u in W das Doppelglied 48. Dann ist in W

$$(169) \begin{array}{l} 1234 \text{ ++ } 5674, \\ 1238 \text{ ++ } 5678, \end{array}$$

$$(173) \left. \begin{array}{l} 16, 25, 48 \\ 17, 35, 48 \\ 27, 36, 48 \end{array} \right\} \text{Flächungen.}$$

Bei dem einfachen Doppelschnitt am Stabe oder der *Sectio determinata* des Apollonius liegt in W die Ecke 7 im Unendlichen (124), also ist am Abkreise $u7$ die Zeile zu W .

190.

Aus vier Abkreisecken und einer Abkreisseite ist der Abkreis durch den Doppelschnitt an dieser Seite gegeben. Aus vier Abkreisseiten und einer Abkreisecke ist der Abkreis durch den Doppelschnitt an dieser Ecke gegeben.

Die vier Abkreisecken oder Abkreisseiten seien $abcd$. Die Abkreisseite oder Abkreisecke sei W .

In W sei 4 die Abkreisecke oder Abkreisseite. Es sei $cbd4 = f$. In W entsprechen

den Bändern oder Ecken:

ad, bc, ac, bd, ab, cd

die Ecken oder Stralen:

1, 5, 2, 6, 3, 7.

Alsdann giebt $dcb4$

an a . . 1234, an 4 . . $fc b5$,

also (150) 1234 ++ $fc b5$,

aber an d . . $fc b5$ ++ 4765,

also . . 1234 ++ 4765,

also . . 1234 ++ 5674.

Also ist die Abkreisecke oder Abkreisseite 4 aus der Flächung 15, 26, 37 durch die Auflösung des Doppelschnitts (189) gegeben, und hat also zwei Auflösungen.

191.

Durch Auflösung des Doppelschnitts werden zwei Stäbe an einer Ecke oder zwei Ecken an einem Stabe bildhaft geschnitten.

Eine Ecke oder Stab sei m .

Zwei Stäbe oder Ecken seien W, W' . In W seien gegeben die Ecken oder Stralen 567, in W' die Ecken oder Stralen 1'2'3'.

Es seien nun in W, W' die Ecken oder Stralen 4, 4' so zu bestimmen, dass 44' in m liege und dass die Bildgleichung stattfinde

$$1'2'3'4' \vdash 5674.$$

Man bestimme in W die Ecken oder Stralen 123, so dass 1'1, 2'2, 3'3 in m liegen, so ist

$$1'2'3'4' \vdash 1234,$$

also muss sein

$$1234 \vdash 5674.$$

Also wird die Aufgabe durch den Doppelschnitt (189) gelöst und hat durch das Doppelglied 48 zwei Auflösungen.

Man ziehe aus der Ecke m zum Stabe W' an den Stab W die Zeile mn .

Wenn nun als *erster Sonderfall* die Ecken 3', 7 im Unendlichen liegen, so ist

$$1'2'\infty 4' \vdash 56\infty 4,$$

$$\text{also } 1'2'4' \vdash 564.$$

Diese Aufgabe hiess in der Bildlehre des Apollonius die *Sectio rationis*. Hier ist durch m der Stral 4'4 so zu ziehen, dass 1'2'4', 564 bildhafte Stabdreiecke seien. Es fällt 3 in n , und die aufzulösende Bildgleichung

$$12n4 \vdash 56\infty 4$$

ist der *einfache Doppelschnitt* (*sectio determinata*). Wenn als *zweiter Sonderfall* die Ecken 1', 7 im Unendlichen liegen, so ist

$$\infty 2'3'4' \vdash 56\infty 4,$$

$$\text{also } 3'4'2' \vdash 564.$$

Diese Aufgabe hiess in der Bildlehre des Apollonius die *Sectio Spatii*.

Es fällt 1 in n , und die aufzulösende Bildgleichung
 $n234 \parallel 56\infty 4$
 ist ebenfalls der *einfache Doppelschnitt*.

Es sei die Ecke $WW' = p$.

Wenn hier $3'$ in p fällt, so fällt 3 in p . Wenn dann auch 5 in p fällt, so ist

$$n2p4 \parallel p6\infty 4.$$

Dieser Sonderfall ist die Aufgabe:

„Aus einer gegebenen Ecke einen Stral zu ziehen, welcher von einer gegebenen Neigung eine Fläche von gegebener Grösse abschneidet.“

192.

Durch Auflösung des Doppelschnitts am Stabe oder an der Ecke wird eine Fügung einer gegebenen Fügung umschrieben, einer andern gegebenen Fügung eingeschrieben.

Die Fügung $44'4''4'''$ sei so zu beschreiben, dass 4, $4'$, $4''$, $4'''$ in b , b' , b'' , b''' und $44'$, $4'4''$, $4''4'''$, $4'''4$ in a , a' , a'' , a''' liegen.

Man nehme in b beliebig 123 an, bestimme hieraus $1'2'3'$ in b' , so dass 11', 22', 33' in a liegen; hieraus $1''2''3''$ in b'' , so dass 1'1'', 2'2'', 3'3'' in a' liegen; hieraus $1'''2'''3'''$ in b''' , so dass 1''1''', 2''2''', 3''3''' in a'' liegen; hieraus 567 in b , so dass 1'''5, 2'''6, 3'''7 in a''' liegen. Dann ist

$$\text{in } a \dots 1234 \parallel 1'2'3'4',$$

$$\text{in } a' \dots 1'2'3'4' \parallel 1''2''3''4'',$$

$$\text{in } a'' \dots 1''2''3''4'' \parallel 1'''2'''3'''4''',$$

$$\text{in } a''' \dots 1'''2'''3'''4''' \parallel 5674,$$

also muss 4 so bestimmt werden, dass

$$1234 \parallel 5674.$$

Dieses geschieht durch den Doppelschnitt am Stabe oder an der Ecke (189), wobei sich zwei Auflösungen ergeben:

$$1234 \parallel 5674,$$

$$1238 \parallel 5678.$$

193.

Durch Auflösung des Doppelschnitts am Abkreise wird eine Fügung einer andern Fügung umschrieben und dem Abkreise eingeschrieben.

Durch Auflösung des Doppelschnitts am Abkreise wird eine Fügung einer andern Fügung eingeschrieben und dem Abkreise umschrieben.

Die gegebene Fügung sei $aa'a''a'''$, wo die Zeichen Ecken oder Stäbe bedeuten. Es seien die Abkreisecken oder Abkreisseiten 4, 4', 4'', 4''' so zu bestimmen, dass die Wendestralen oder Spitzen 44', 4'4'', 4''4''', 4'''4 in a , a' , a'' , a''' liegen.

Man nehme die Abkreisecken oder Abkreisseiten 123 beliebig an, bestimme hieraus am Abkreise 1'2'3', so dass 11', 22', 33' in a liegen; hieraus am Abkreise 1''2''3'', so dass 1'1'', 2'2'', 3'3'' in a' liegen; hieraus am Abkreise 1'''2'''3''', so dass 1''1''', 2''2''', 3''3''' in a'' liegen; hieraus am Abkreise 567, so dass 1'''5, 2'''6, 3'''7 in a''' liegen.

Dann ist wegen der stralenhaften Abkreisvierecke oder stabhaften Abkreisvierseitungen (173)

an a . . 1234 $\dagger$ 1'2'3'4',
 an a' . . 1'2'3'4' $\dagger$ 1''2''3''4'',
 an a'' . . 1''2''3''4'' $\dagger$ 1'''2'''3'''4''',
 an a''' . . 1'''2'''3'''4''' $\dagger$ 5674,

also (170) muss 4 so bestimmt werden, dass sei

1234 $\dagger$ 5674,

welches durch Auflösung des Doppelschnitts am Abkreise (189) bewirkt wird.

Man bilde die Bändecken oder Eckbänder

1625, 1735, 2736,

welche den Bildungsstab oder die Bildungsecke B geben.

Wenn nun B in Bezug auf den Abkreis ein innerer Stab oder eine äussere Ecke ist, so ergeben sich die in B liegenden Abkreisecken oder die aus B gezogenen Abkreisseiten 4, 8 so, dass

1234 $\dagger$ 5674,
 1238 $\dagger$ 5678.

194.

Eine zeilenhafte Abkreisvierseitung und ein zeilenhaftes Abkreisviereck entsprechen einander gegenseitig. Alle zeilenhaften Abkreisvierseitungen und Abkreisvierecke haben eine gemeinsame Mitte. Sie heisst die Abkreismitte.

Die Stralen der Abkreismitte heissen Durchmesser. Die Querseiten der zeilenhaften Abkreisvierseitung sind Zeilen der Seiten des entsprechenden Abkreisvierecks und heissen verbundene Durchmesser.

Bei dem Stralenzuge fällt die Abkreismitte in die Ecke der Grenzseiten.

Die Abkreisvierseitung und das Abkreisviereck seien 1234. Die Ecken a, b, c, d seien die Spitzen der Wendestralen 13, 24, 23, 14.

Wenn die Ecken f, g die Spitzen der Wendestralen 12, 34 sind, so folgt aus (154), dass die Ecken $1324 = k, 1423 = l$ in fg liegen.

Wenn nun die Abkreisseiten 1, 2 Zeilen, die Abkreisseiten 3, 4 Zeilen sind, so liegen die Ecken f, g im Unendlichen. Also liegen dann auch die Ecken k, l im Unendlichen, d. h. 13, 24 sind Zeilen und 14, 23 sind Zeilen. Umgekehrt, wenn 13, 24 Zeilen und 14, 23 Zeilen, so liegen k, l im Unendlichen, also f, g im Unendlichen, also sind die Abkreisseiten 1, 2 Zeilen, die Abkreisseiten 3, 4 Zeilen.

Wenn also die Abkreisvierseitung $abcd$ eine Zeilung ist, so ist das Abkreisviereck 1234 eine Zeilung.

Wenn das Abkreisviereck 1234 eine Zeilung ist, so ist die Abkreisvierseitung $abcd$ eine Zeilung.

In beiden Fällen folgt aus (154) weiter, dass die Bänder 12, 34, ab, cd Stralen einer Ecke m sind, welche die Mitte dieser Bänder ist. Offenbar ist nur eine einzige solche Ecke möglich, welche die Mitte aller zeilenhaften Abkreisvierseitungen und zeilenhaften Abkreisvierecke ist. Diese Ecke m heisst daher die *Abkreismitte*.

Beim Stralenzuge kann jede Grenzseite als die Vereinigung zweier zeilenhaften Abkreisseiten angesehen werden, deren Berührungsecken im Unendlichen liegen. Diese beiden Berührungsecken liegen also in der Grenzseite, also

liegt auch ihre Mitte in der Grenzseite. Also liegt die Mitte des Stralenzuges in jeder Grenzseite, also liegt sie in der gemeinsamen Ecke beider Grenzseiten.

Alle Stralen der Abkreismitte m , also 12, 34, ab , cd heissen *Durchmesser des Abkreises*.

Wenn $abcd$, 1234 Zeilungen sind, so folgt aus (154) weiter, dass 14, 23, ab Zeilen, dass 13, 24, cd Zeilen sind, dass 14, 23, ab durch cd gehalbt, und dass 13, 24, cd durch ab gehalbt werden. Jeder Durchmesser, welcher die Zeilen des andern Durchmessers halbt, heisst ein *verbundener Durchmesser*.

Also sind die Querseiten ab , cd einer zeilenhaften Abkreisvierseitung oder die Seiten 14, 23 und 13, 24 eines zeilenhaften Abkreisvierecks die *Richtungen verbundener Durchmesser*.

Aus (160) folgt: die aus den Ecken 3, 4 zu den Ecken $a2c1$, $d2b1$ gehenden Stralen sind Zeilen der Seiten ad , bc oder 1, 2. Die aus den Ecken 1, 2 zu den Ecken $a4d3$, $c4b3$ gehenden Stralen sind Zeilen der Seiten ac , bd oder 3, 4.

195.

Der Halbzug halbt den von einer beliebigen Spitze zur Mitte ihres Wendestrals gezogenen Stral.

Beim Halbzuge sind alle diese Mittelstralen oder Durchmesser Zeilen.

Es seien h , f Ecken und Seiten des Halbzuges, l die Spitze des Wendestrals hf . Es sei g diejenige Seite des Halbzuges, welche dem Wendestral hf zeilenhaft ist. Der Halbzug hat (148) in jeder Richtung nur eine Seite g , die zweite ihr zeilenhafte Seite G liegt im Unendlichen. Da beide Zeilen zu hf sind, so liegt ihre Ecke N in hf . Also (157) liegt die Spitze von hf , nämlich l in dem Durchmesser gG , und das Abkreisviereck $hfgG$ ist gleichmessend. Wenn also n die Ecke des Wendestrals hf und des Durchmessers gG ist, so sind ln , gG und hf , nN Gleichmessungen. Aber die Ecken G , N liegen im Unendlichen, also ist g die Mitte von ln und n die Mitte von hf .

Die Mitte des Halbzuges liegt also in dem Mittelstral ln . Aber diese Mitte liegt im Unendlichen. Also sind alle Mittelstralen ln , $l'n'$ u. s. w. Zeilen.

196.

Bei dem Halbzuge machen die aus irgend einer Ecke des Durchmessers gehenden gesellten Wendestralen mit den entsprechenden Abkreisseiten eine Zeilung.

Jede Abkreisseite schneidet auf zwei andern Abkreisseiten gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke ab.

Vier Seiten und Ecken des Abkreises seien f, g, h, G .

Die Spitzen der Wendestralen fg, gh, hf, gG seien r, b, l, N . Es sei die Ecke $fhgG = o$, $orgh = p$, $obfg = q$, so folgt aus (154), dass:

fG in p ; hG in q ; l und N in pq

liegen, so dass pq, lN eine Gleichmessung, und pq der Wendestral der Spitze o ist. Auch sind (158) or, ob gesellte Wendestralen oder bor ein Wendeglied der Ecke o .

Wenn gG ein Durchmesser des Abkreises ist, so sind (194) die Abkreisseiten g, G Zeilen. Wenn zugleich der Abkreis ein Halbzug ist, so liegt (148) die zu g zeilenhafte Abkreisseite G im Unendlichen, also auch die Abkreisecke G im Unendlichen, also sind fp, og, hq Zeilen, br, pq Zeilen und l die Mitte von pq .

Aus (154) folgt, dass die Ecken $orlh, oblf$ in der Abkreisseite G liegen. Da diese im Unendlichen liegt, so sind or, lh Zeilen, und ob, lf Zeilen.

Also ist $borl$ eine Zeilung.

Also ist die Neigung des Wendeglieds bor der Neigung der Abkreisseiten blr im Wendestral gleich.

Hieraus folgen weiter die bildhaften Stabdreiecke, wenn die Ecke $ogpq = s$ ist:

$hof \parallel hbl, hof \parallel lrf, hof \parallel qsp, qsp \parallel bgr,$
also $hbl \parallel lrf \parallel bgr.$

Also schneidet die Abkreisseite g auf den Abkreisseiten h, f gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke ab.

197.

Bei dem Halbzuge ist das eingeschriebene Dreieck das Doppelte des umschriebenen Dreiecks.

Die Abkreisseite und der Durchmesser schneiden auf einer Sehne ein Wechselviereck ab.

Auf dem Durchmesser schneiden eine Abkreisseite, die Zeile derselben und die verbindende Sehne ein Wechselviereck ab.

Drei Ecken und Seiten des Halbzuges seien f, g, h , die Spitzen der Wendestralen fg, gh, hf seien r, b, l . Es sei n die Mitte von hf , und go die Zeile zu ln , also (195) ein Durchmesser.

Es seien die Ecken $orgh = p, obfg = q$, so folgt aus (196): fp, go, hq sind Zeilen, br, pq Zeilen, ob, lf Zeilen, or, lh Zeilen, $lbor, lprb, lqbr$ sind Zeilungen, r, b, l sind die Mitten von op, oq, pq .

Also werden of, oh von den aus r, b zu go gezogenen Zeilen gehalten, also sind die Dreiecke ofg, ohg das Doppelte der Dreiecke org, obg , also das eingeschriebene Dreieck fgh das Doppelte des Dreiecks bor , also auch das Doppelte des umschriebenen Dreiecks rbl .

Es sei die Ecke $hfbr = x$, so ergeben sich die bildhaften Stabdreiecke:

$$\begin{array}{l} xbr \parallel xho, \quad xbr \parallel xof, \\ \text{also } xho \parallel xof. \end{array}$$

Also schneiden auf der Sehne fh die Abkreisseite gx und der Durchmesser go ein Wechselviereck ab.

Es seien die Ecken $ophq = u, ogfp = v$. Da pq in l gehalten ist, so sind pv, qu in f, h gehalten. Also sind pq, fh, uv Stralen einer Ecke t . Also sind fh, ot und pq, st Gleichmessungen. Also ist aus der Stralung von o an pq, st auch br, gx eine Gleichmessung.

Es sei die Ecke $fgop = y$, und zu op die Zeilen fw, gz gezogen. Da pq der Wendestral der Ecke o ist, so ist (152, 157) fg, qy eine Gleichmessung, also wz, qu eine Gleichmessung. Aber h ist die Mitte von qu , also (122, 123)

$$hzu \parallel huw, \quad hzq \parallel hqw.$$

Wenn also die Ecken $oghl = c, ogfw = d$ sind, so ist

$$cgo \parallel cod.$$

Also schneidet auf dem Durchmesser go die Abkreisseite hl , ihre Zeile fw und die verbindende Sehne hf ein Wechselviereck $cgod$ ab.

198.

Beim Halbzuge schneiden drei Abkreisseiten auf zwei andern Abkreisseiten gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke ab.

Das eingeschriebene Vieleck ist das Doppelte des umschriebenen Vielecks.

Die zwischen dem Bogen und dem Wendestral enthaltene Fläche ist $\frac{2}{3}$ des von zwei Seiten und dem Wendestral gebildeten Dreiecks.

Es seien $h, f, 1, 2, 3$ Ecken und Seiten des Halbzuges, und es seien die Spitzen: l von hf , b von $h1$, b' von $h2$, b'' von $h3$, r von $f1$, r' von $f2$, r'' von $f3$.

Es sei n die Mitte von hf , so sind (196) $bo, b'o', b''o''$ Zeilen zu lf ; $ro, r'o', r''o''$ Zeilen zu lh ; $ol, o'2, o''3$ Zeilen zu ln .

Also

$$\begin{aligned} oo'o'' \vdash bb'b'', \quad oo'o'' \vdash rr'r'', \\ \text{also } bb'b'' \vdash rr'r''. \end{aligned}$$

Also schneiden die Seiten 123 auf den Seiten h, f gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke ab.

Es seien 7, 6, 5 die Spitzen von 12, 13, 23, so giebt (149, 150) die Abkreisvierseitung 123∞ an den Seiten h, f und an sich selbst die Bildgleichungen

$$bb'b'' \vdash rr'r'' \vdash 176 \vdash 725 \vdash 653.$$

Nach (197) sind die Dreiecksflächen

$$\begin{aligned} h12 & \text{ das Doppelte von } bb'7, \\ h23 & \text{ „ „ „ } b'b''5, \\ h3f & \text{ „ „ „ } b''ar''. \end{aligned}$$

Also ist das von den Wendestralen $hf, h1, 12, 23, 3f$ begrenzte Vieleck das Doppelte des von den Seiten $lb, b7, 75, 5r'', r''l$ begrenzten umschriebenen Vielecks.

Also ist die zwischen dem Wendestral hf und seinem Bogen enthaltene Fläche des Halbzuges das Doppelte der zwischen den Seiten lh, lf und dem Bogen enthaltenen, also zwei Drittel der von dem Wendestral hf und den Seiten lh, lf enthaltenen Fläche.

199.

Vier Stäbe werden nur von einem einzigen Halbzuge berührt. Die Berührungsecken und der Durchmesser sind durch einnamigen Schnitt gegeben.

Es seien die vier Stäbe lb , lr , br , $b'r'$ gegeben, welche von dem Halbzuge berührt werden sollen. Man beschreibe die Zeilungen $blro$, $b'lr'o'$, so dass bo , $b'o'$, lr und ro , $r'o'$, lb Zeilen seien. Hierdurch sind die Ecken o , o' gegeben, deren Band die Stäbe lb , lr in den Berührungsecken h , f trifft.

Es sei n die Mitte von fh , und ol , $o'2$ Zeilen zu ln , so sind 1, 2 die Berührungsecken in br , $b'r'$.

Oder man ziehe zu $b'r'$ die Zeilen bp , rp' ; zu br die Zeilen $b'p$, $r'p'$, so werden die Seiten br , $b'r'$ von dem Bande pp' in den Berührungsecken 1, 2 getroffen.

200.

Bei dem Halbzuge ist der Abschnitt der Leitecke die Hälfte des Aufsatzes oder ein Viertel des Nebenmaasses.

Jedes Wendeglied der Leitecke ist eine Lothung. Die aus irgend einer Ecke des Wendestrals der Leitecke an den Halbzug gezogenen Abkreisseiten machen eine Lothung.

Die in irgend einer Ecke des Halbzuges gezogene Abkreisseite und ihr Loth halben die Neigung des Leitstrals gegen den Durchmesser.

Der Leitstral einer Abkreisecke ist gleich der Anlage des Abschnitts dieser Ecke zu einem Viertel des Nebenmaasses.

Der Aufsatz einer Abkreisecke und das Loth ihrer Seite schneiden auf der Richt des Halbzuges die Hälfte des Nebenmaasses ab.

Es sei g diejenige Ecke des Halbzuges, in welcher die Abkreisseite BR auf dem Durchmesser gd lothhaft ist. Diese Ecke heisst der Scheitel des Halbzuges, und der aus demselben gezogene Durchmesser gd heisst die Richt des Halbzuges. Die aus einer beliebigen Abkreisecke f zu der Abkreisseite des Scheitels gezogene Zeile

fa heisst der Aufsatz, der Abstand *ga* der Abschnitt, beide zusammen die Stellenmaasse dieser Ecke *f*.

In der Richt giebt es eine Ecke *o*, in welcher der Abschnitt *go* die Hälfte des Aufsatzes *Fo*, oder ein Viertel der Sehne *FH* ist. Diese Sehne heisst das Nebenmaass.

Es sei *s* die Spitze des Nebenmaasses, so ist $so = Fo = Ho$, und *BoR* eine Lothung, also das Viereck *BoRs* ein Rahmen oder eine gleichseitige Lothzeilung.

Hier sind also zwei Wendeglieder der Leitecke *o*, nämlich *BoR* und *Fog*, Lothungen, also (158) sind alle übrigen Wendeglieder der Leitecke *o* Lothungen.

Man ziehe also aus *o* zwei beliebige zu einander lothhafte Stralen, welche die in *g* und *s* auf die Richt gezogenen Lothe in *b*, *r* und *q*, *p* treffen. Man vollende die Lothzeilung *borl*, so ist *l* die Mitte von *pq*, und *pq* der Wendestral der Leitecke *o*. Man ziehe aus *p*, *q* Zeilen zu der Richt *go*, welche die Stralen *lr*, *lb* in *f*, *h* treffen, so sind *f*, *h* Abkreisecken, *lf*, *lh* Abkreisseiten des Halbzuges.

Also machen die aus irgend einer Ecke *l* des Wendestrals der Leitecke an den Halbzug gezogenen Abkreisseiten eine Lothung *flh*.

Da *op* von *fr* lothhaft gehalten wird, so ist das Dreieck *ofp* gleichschenkelig, also werden die Neigungen des Leitstrals gegen den Durchmesser, nämlich *ofp*, *ofv* von der Abkreisseite *lf* und ihrem Loth *fd* gehalten.

Es sind also *opfd*, *ofvd* Rauten, d. h. gleichseitige Zeilungen.

Zieht man aus der Abkreisecke *f* auf die Richt *go* das Loth *fa*, so ist

$$of = pf = as = ga + sg.$$

Hier ist *ga* der Abschnitt der Abkreisecke, *sg* ein Viertel des Nebenmaasses *FH*. Also ist der Leitstral *of* gleich der Anlage des Abschnitts *ga* zu dem Viertel vom Nebenmaass.

Die Dreiecke *fad*, *pso* sind gleich, also $ad = so = \frac{1}{2}FH$.

Also schneiden der Aufsatz *fa* und das Loth *fd* der Abkreisseite auf der Richt ein Stück *ad* ab, welches die Hälfte des Nebenmaasses ist.

201.

Beim Abkreise wird jeder Wendestral von dem aus seiner Spitze zur Abkreismitte gezogenen Mittelstral gehalbt.

Wenn dieser Mittelstral den Abkreis durchschneidet, so machen die Abkreisecken das eine Glied, die Spitze und der Wendestral das andere Glied einer Gleichmessung. Die Spitze und Wendeecke machen das eine Glied, die Abkreismitte und jede Abkreisecke das andere Glied eines Wechselvierecks.

Die Abkreismitte und Wendeecke machen das eine Glied einer Gleichmessung, dessen anderes Glied von den aus den Ecken des Wendestrals zu den Ecken des zeilenhaften Durchmessers gehenden Stralen abgeschnitten wird, und dessen Mitte die Spitze des Wendestrals ist.

Es seien h, f Ecken und Seiten des Abkreises, l die Spitze des Wendestrals hf .

Erster Fall.

Es seien gG zwei Abkreisseiten, welche Zeilen zum Wendestral hf sind. Ihre Spitze liegt also in hf . Also (157) liegt die Spitze von hf in gG . Also ist $hgfG$ ein gleichmessendes Abkreisviereck, und da (194) die Abkreismitte m in gG liegt, so wird der Wendestral hf von dem Mittelstral lm in der Wendeecke n gehalbt. Auch ist (157) gG, ln eine Gleichmessung, und (122, 123) $lmng, lnmG$ sind Wechselvierecke, so dass (123)

$$\begin{aligned} mng \text{ ++ } mgl \text{ ++ } Gnl, \\ mnG \text{ ++ } mGl \text{ ++ } gnl. \end{aligned}$$

Zieht man also aus einer beliebigen Ecke u die Stralen 123 nach gGn , aus einer beliebigen Ecke v des Strals 3 Stralen nach G, g , welche die Stralen 1, 2 in w, x treffen, so ergibt sich die Spitze $xwgG = l$ des Wendestrals hf .

Zweiter Fall.

Es seien hf, kK Zeilen des Abkreises, und die Ecken $fkhK = q, fKhk = t$, so werden (15) hf, kK von qt gehalbt. Aber aus (154) folgt, dass die Spitzen der

Wendestralen hf , kK in gt liegen, so dass diese Spitzen die Theile des einen Gliedes, gt das andere Glied einer Gleichmessung sind.

Wenn also kK ein Durchmesser und m die Abkreismitte ist, so wird hf von dem Mittelstral lm gehalbt, und die Spitze l von hf ist die Mitte des Gliedes gt .

Also ist mn das eine Glied, lq oder lt das andere Glied eines Wechselvierecks, so dass (123)

$$\begin{array}{l} lnq \ \vdash \ lqm \ \vdash \ tnm, \\ lnt \ \vdash \ ltm \ \vdash \ qnm. \end{array}$$

Wenn hierbei der Mittelstral den Abkreis in gG durchschneidet, so ist m die Flächenecke von ln , gg , von ln , GG und von ln , gt , also ist gt , gg , GG eine Flächung, also gt , gG eine Gleichmessung.

202.

Ein beliebiger Wendestral und seine beiden Abkreisseiten schneiden auf einem festen Wendestral eine Doppelflächung ab.

Aus drei Abkreisecken und ihren Seiten ist die Abkreismitte durch einnamigen Schnitt bestimmt.

Es sei f/h der feste Wendestral, l dessen Spitze, also lf , lh Abkreisseiten.

Der beliebige Wendestral sei gG , N dessen Spitze, also Ng , NG Abkreisseiten.

Es seien die Ecken $f/hGg = o$, $hg/G = p$, $fghG = q$, so sind (154) die Ecken $lNpq$ stabhaft, lN , pq eine Gleichmessung, der Wendestral jeder Ecke des Stabes $lNpq$ ein Stral von o .

Es seien b , r , B , R die Spitzen der Wendestralen gh , fg , Gh , fG , so sind (154) die Ecken $qboR$, $pBor$ stabhaft.

Es seien die Ecken $pqqG = s$, $brfh = x$, $BRfh = X$, $pqfh = t$, so sind (154)

ot , fh und os , gG Gleichmessungen.

Aber an N ist

$$osgG \ \vdash \ otxX.$$

Also . . . ot , xX eine Gleichmessung.

Aus diesen beiden Gleichmessungen folgen (115)

$$\left. \begin{array}{l} fh, xX, oo \\ fh, xX, tt \end{array} \right\} \text{Doppelflächungen.}$$

Also schneiden der beliebige Wendestral gG und seine beiden Abkreisseiten gx , GX auf dem festen Wendestral fh eine Doppelflächung ab.

Hierauf beruhen auch die Auflösungen 142 II. 184 II.

II.

Es seien die Abkreisecken f , h und ihre Seiten gegeben. Es sei entweder die Abkreisecke g gegeben und hieraus (160) ihre Abkreisseite g bestimmt, oder die Abkreisseite g gegeben und hieraus (160) ihre Abkreisecke g bestimmt. Demnach seien die drei Abkreisecken f , g , h und ihre Abkreisseiten fgh gegeben.

Man ziehe aus der Spitze l des Wendestrals fh zu der Abkreisseite g die Zeile, welche die Wendestralen hg , fg , fh in p , q , t treffe.

Es seien die Ecken $fphq = G$, $fhgG = o$, so ist (154) gG ein Durchmesser, also dessen Mitte m , welche die Abkreismitte ist, gegeben. Es ist aber auch l die Mitte von pq , und fh , ot eine Gleichmessung, ferner (201) fg , hg , fh durch mr , mb , ml gehalbt, also mb , Gh und mr , Gf Zeilen. Die in G zu g gezogene Zeile treffe lh , lf , fh in B , R , X , so sind $qboR$, $pBor$ stabhaft, br , BR von lo gehalbt, fG , hG von mR , mB gehalbt, mB , gh und mR , fg Zeilen. Ferner wie oben:

$$\left. \begin{array}{l} fh, Xx, oo \\ fh, Xx, tt \end{array} \right\} \text{Doppelflächungen,}$$

deren Doppelglied ot ist.

Der Abkreis ist ein Halbzug, wenn G , X im Unendlichen liegen; ein Schlusszug oder ein Stralenzug, je nachdem Gg auf entgegengesetzten Seiten oder auf einerlei Seite von o liegt.

Zieht man beim Schlusszuge aus m zur Abkreisseite g die Zeile bis an die Abkreisseite hn , und aus h zum Durchmesser gG die Zeile hn , so ist (201) der zu den Seiten g , G zeilenhafte Halbmesser mk durch das Wechselviereck $muka$ gegeben.

203.

Wenn drei Abkreisseiten und in ihnen die entsprechenden Abkreisecken gegeben sind, so sind zu jeder in einer Seite liegenden Spitze und zu jedem in einer Ecke liegenden Wendestral die entsprechende Abkreisseite und Abkreisecke durch einnamigen Schnitt bestimmt.

Die drei gegebenen Abkreisseiten und Ecken seien h, f, g , es seien l, b, r die Spitzen der Wendestralen hf, hg, fg , so dass (160) lg, bf, rh Stralen einer Ecke sind.

Es sei nun auf der Seite h die Spitze B gegeben. Es sei die Ecke $Brhf = o$, hieraus die Ecke $bolf = R$, $BfhR = u$, so sind (160) go, lu, BR Stralen einer Abkreisecke G . Die entsprechende Abkreisseite ist BR .

Es sei zweitens in der Abkreisecke h der Wendestral hG gegeben. Es sei die Ecke $hGfg = q$, die Ecke $lqbr = N$, die Ecke $hglq = p$, die Ecke $pfhg = G$, so ist G die Abkreisecke und NG die entsprechende Abkreisseite.

204.

Durch vier gegebene Ecken gehen zwei verschiedene Halbzüge, welche durch ein Wechselviereck gegeben sind.

Die vier gegebenen Ecken seien 1234. Es seien die Ecken

$$1234 = h, \quad 1324 = k, \quad 1423 = l.$$

Es seien nop die Mitten von 12, 34, kl , so sind (99) nop stabhaft.

Man bestimme (135, 178) auf diesem Stabe die Wechselvierecke $pogn, porn$, so dass

$$pog \parallel pgn, \quad por \parallel prn,$$

so sind no, qr eine Gleichmessung.

Ziehe aus n, o an kl zu lr die Zeilen nf, og , so ist $porn \parallel pglf$, also $pglf$ ein Wechselviereck.

Aber p die Mitte von kl , also fg, kl eine Gleichmessung.

Also (154) f, g die Spitzen der Wendestralen 12, 34.

Da fn, go Zeilen sind, so ist der Abkreis (195) ein Halbzug.

Ziehe aus n , o an kl zu lq die Zeilen nf' , og' , so ist $pogn \perp pg'lf'$, also $pg'lf'$ ein Wechselviereck. Aber p ist die Mitte von kl , also

$f'g'$, kl eine Gleichmessung.

Also (154) f' , g' die Spitzen der Wendestralen 12, 34, und da $f'n$, $g'o$ Zeilen sind, so ist (195) der Abkreis ein Halbzug.

Da p die Mitte von kl , qr ist, so ist $klqr$ eine Zeilung. Auch ist p die Mitte der Glieder ff' , gg' .

Also gehen durch die vier Ecken 1234 zwei verschiedene Halbzüge, deren Durchmesser zu kq , lr und zu lq , kr Zeilen sind.

In dem einen Halbzuge sind $f'1$, $f'2$, $g'3$, $g'4$, in dem andern $f'1$, $f'2$, $g'3$, $g'4$ Abkreisseiten.

205.

*Durch vier gegebene Ecken geht eine Schaar von Abkreispaairen. Bei jedem Paar ist das Band der Mit-
ten die Zeile eines Stabes des Vierecks.*

Die vier gegebenen Ecken seien 1234. Es seien die Ecken $1234 = h$, $1324 = k$, $1423 = l$.

Es seien n , o , p die Mitten von 12, 34, kl , so sind (99) n , o , p stabhaft. Man nehme auf diesem Stabe die Ecke q beliebig an und bestimme die Ecke r so, dass no , qr eine Gleichmessung.

Es seien die Ecken $kqlr = m$, $krlq = m'$. Da p die Mitte von kl ist, so ist (15) mm' die Zeile zu dem Stabe $kl = H$.

Es sei die Ecke $nomm' = s$, so ist s die Mitte von mm' und (69)

ps , qr eine Gleichmessung.

Aus diesen beiden Gleichmessungen folgen (115)

qr , np , os }
 qr , ns , op } Flächungen,

no , ps , qq }
 no , ps , rr } Doppelflächungen.

Die Stralen mn , mo treffen den Stab H in f , g .

Dann ist $noqr \perp fgkl$, also fg , kl eine Gleichmessung.

Also ist (154, 201) m die Mitte eines Abkreises, welcher durch das Viereck 1234 geht, und in welchem f, g die Spitzen der Wendestralen 12, 34 sind. Alle Wendestralen dieses Abkreises, deren Spitzen in H liegen, sind Stralen der Ecke h .

Hierdurch ist noch (203) der Abkreis bestimmt. Da p die Mitte von kl ist, so sind

$pfkg, pflg$ Wechselvierecke,
so dass $pfk \parallel pkg, pfl \parallel plg$.

Die Stralen $m'n, m'o$ treffen den Stab H in f', g' .
Dann ist $noqr \parallel f'g'lk$. Also
 $f'g', kl$ eine Gleichmessung.

Da s die Mitte von mm' , p die Mitte von kl und mm' die Zeile zu H , so ist p die Mitte von ff', gg' . Also ist m' die Mitte eines zweiten Abkreises, welcher durch 1234 geht und in welchem f', g' die Spitzen der Wendestralen 12, 34 sind. Alle Wendestralen dieses zweiten Abkreises, deren Spitzen in H liegen, sind ebenfalls Stralen von h . Hierdurch ist (203) dieser zweite Abkreis ebenfalls bestimmt.

206.

Bei dem Stralenzuge ist:

Jede Abkreisecke die Mitte ihrer Abkreisseite zwischen den Grenzseiten.

Zwei Abkreisseiten schneiden auf den Grenzseiten gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke ab.

Vier Abkreisseiten schneiden auf den Grenzseiten eine Bildgleichung ab, deren Grenzecke die Abkreismitte ist.

Die Mitte des Wendestrals zweier Abkreisseiten ist die Mitte zwischen den Grenzseiten und liegt in dem von der Spitze zur Abkreismitte gehenden Mittelstral. Die von einer Abkreisecke zu den Grenzseiten gezogenen Zeilen machen das eine Glied einer Gleichmessung, deren anderes Glied die Abkreisseite und der zur Abkreismitte gehende Stral machen.

Aus zwei Abkreisseiten, aus den entsprechenden Abkreisecken und aus der Abkreismitte sind die Grenzseiten durch ein Wechselviereck gegeben, und damit der ganze Stralenzug bestimmt.

Die aus der Spitze eines Wendestrals zur Grenzseite bis an den Wendestral gezogene Zeile wird von dem Abkreise gehalten.

Die Grenzseiten des Stralenzuges seien mb , mc . Ihre Ecke m ist (194) die Abkreismitte. Es sei f eine Ecke des Stralenzuges. Ihre Abkreisseite treffe die Grenzseiten in bc . Die Grenzseiten berühren den Stralenzug in UV , so dass UV im Unendlichen liegen. Also sind die Strahlen bV , cU Zeilen der Grenzseiten mc , mb .

Die Ecke dieser Zeilen sei f' , so liegt (160) die Abkreisecke f in mf' . Aber $f'bmc$ ist eine Zeilung. Also ist die Abkreisecke f die Mitte ihrer Abkreisseite bc zwischen den Grenzseiten.

Es sei h eine zweite Abkreisecke. Ihre Abkreisseite treffe die Grenzseiten in rw , so ist aus gleichem Grunde h die Mitte von rw .

Die Abkreisseiten f , h und die Grenzseiten mU , mV bilden eine Abkreisvierseitung und ein Abkreisviereck $fhUV$. Also (154) sind bw , cr , fh Strahlen einer Ecke von UV .

Aber UV liegt im Unendlichen, also liegt jede ihrer Ecken im Unendlichen. Also liegt die Ecke von bw , cr , fh im Unendlichen. Also sind bw , cr , fh Zeilen. Also sind die Dreiecke mbc , mwr inhaltsgleich und die Abkreisseiten fh schneiden auf den Grenzseiten gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke ab:

$$mbr \text{ } \dagger \text{ } mwc.$$

Also (76) ist die Abkreismitte m die Grenzecke der Bildgleichung, welche von vier beliebigen Abkreisseiten auf den Grenzseiten entsteht. Wenn sie nämlich die Grenzseiten mV , mU in 1234 , $1'2'3'4'$ treffen, so sind die aus b zu 1234 gehenden Strahlen die Zeilen zu den aus c zu $1'2'3'4'$ gehenden Strahlen.

Also sind die Vierstralungen in b und c gleichneigig. Also sind sie bildhaft (42). Also (53) sind die Stabvier-ecke bildhaft:

$$1234 \text{ } \dagger \text{ } 1'2'3'4',$$

und m ist die Grenzecke (76) dieser Bildgleichung.

Es sei l die Spitze des Wendestrals fh . Der Mittelstral ml treffe die Zeilen bw , cr in uv , so sind (15) uv die Mitten der Zeilen bw , cr . Also ist $fhuv$ eine Zeilung.

Es sei also die Ecke $mlfh = n$, so ist n die Mitte von fh und uv . Es seien also die Ecken

$$fhmU = O, \quad fhmV = P,$$

$$\text{so ist } Oh = Pf = \frac{1}{2} bw,$$

$$Ph = Of = \frac{1}{2} cr.$$

Es sei die Ecke $f'bfv = Q$.

Da fQ , $f'c$ Zeilen sind und f die Mitte von bc ist, so ist Q die Mitte von $f'b$. Aber fu , $f'b$ sind Zeilen. Also bilden die Stralen

fu , fv das eine Glied
 fl , fm das andere Glied } einer Gleichmessung.

Also ist

uv , lm eine Gleichmessung.

Aber n ist die Mitte von uv .

Also (123) nlu , nvm Wechselvierecke, so dass

$$nlu \parallel num \parallel vlm,$$

$$nlv \parallel nvm \parallel ulm,$$

und m die Flächenecke der Glieder uv , lm .

Wenn also beim Stralenzuge zwei Abkreisseiten fh und die entsprechenden Abkreisecken fh , sowie ausserdem die Abkreismitte m gegeben sind, so sind die Ecken mln gegeben, hieraus durch Auflösung des Wechselvierecks (135, 178) die Ecken uv , hieraus die Grenzseiten als Zeilen zu uf , uh , und hieraus der ganze Stralenzug.

Es sei aus O eine Abkreisseite gezogen, deren Berührungsecke 3 ist. Aus 3 sei zur Grenzseite mO die Zeile 34 an den Wendestral fh gezogen. Da $O3$, OU Abkreisseiten sind und U im Unendlichen liegt, so ist 34 der Wendestral der Spitze O . Da O im Wendestral fh von l liegt, so liegt (157) l im Wendestral 34 von O , und $fh3U$ oder $fh3\infty$ ist ein gleichmessendes Abkreisviereck. Also ist $l4$ in 3 gehalbt, und

$O4$, fh eine Gleichmessung.

Zieht man aus P die Abkreisseite $P5$ und zur Grenzseite mP die Zeile 56, so ist aus gleichem Grunde $l6$ in 5 gehalbt und $P6$, fh eine Gleichmessung.

Auch liegen 3 in nb , 5 in nw .

207.

Wenn beim Stralenzuge zu zwei festen zeilenhaften Abkreisseiten ein beliebiger zeilenhafter Wendestral gezogen wird, und aus den festen Abkreisecken Zeilen zu den Grenzseiten gezogen werden, so schneiden sie auf dem Wendestral eine Gleichmessung und ein Wechselviereck ab.

Die festen zeilenhaften Abkreisseiten und ihre Abkreisecken seien g, G , der zeilenhafte Wendestral sei fh , die Spitze desselben sei l , er werde von den Grenzseiten in O, P , von den aus g, G gezogenen Zeilen derselben in S, s und T, t getroffen. Die Abkreisseiten f, h treffen die Grenzseiten in den Zeilen bw, cr , der Mittelstral gG halbt dieselben in u, v , und den Wendestral in n .

Dann ist

(201) gG, ln eine Gleichmessung,

und $gg, ln, m\infty$
 $GG, ln, m\infty$ } Flächungen,

(206) $uv, ln, m\infty$

also (107, 108)

$uv, gg, m\infty$
 $uv, GG, m\infty$ } Flächungen,
 uv, gg, GG

also uv, gG eine Gleichmessung.

Aber (206) uf, vh, gt, GT Zeilen, und

uh, vf, gs, GS Zeilen,

also $uv, gG \parallel fhtT \parallel hfsS$.

Also fh, sS
 fh, tT } Gleichmessungen.

Also $nshS, nsfS, ntfT, nthT$ Wechselvierecke, so dass

$nsh \parallel nhS, nsf \parallel nfS,$
 $nth \parallel nhT, ntf \parallel nfT,$

durch deren Auflösung (135, 178) die Ecken f, h gegeben sind.

208.

Bei dem Stralenzuge entspricht jeder Abkreisecke eine verbundene Zeilung zwischen den Grenzseiten

Die Seiten der verbundenen Zeilung sind Zeilen der verbundenen Durchmesser.

Jedem Stralenzuge entspricht ein verbundener Stralenzug. Die entsprechenden Ecken der verbundenen Stralenzüge haben eine gemeinsame verbundene Zeilung.

Die Spitze und Wendeecke bilden auf dem verbundenen Durchmesser eine Mittelflächung.

Die aus einer Abkreisecke zu einem Durchmesser gehenden Stralen bilden auf dem verbundenen Durchmesser eine Mittelflächung.

Die Abkreismitte sei m , zwei zeilenhafte Abkreisseiten seien g, G , die Glieder derselben zwischen den Grenzseiten seien ad, AD . Zu ihnen sei aus m die Zeile sS gezogen, dann heisst gG der Durchmesser, sS der verbundene Durchmesser, $gGsS$ die innere verbundene Zeilung, $aAdD$ die äussere verbundene Zeilung.

Ebenso ist für eine andere Abkreisecke f der Durchmesser fF , der verbundene Durchmesser kK , die innere verbundene Zeilung $fFkK$, die äussere verbundene Zeilung $bBcC$.

Es lässt sich ein verbundener Stralenzug beschreiben, welcher in den Nebenneigungen der Grenzseiten des ursprünglichen Stralenzuges liegt, so dass der verbundene Durchmesser des ursprünglichen Stralenzuges der Durchmesser des verbundenen Stralenzuges ist. Also sind sS, kK Durchmesser des verbundenen Stralenzuges, aD, bC in dem einen Flügel, Ad, Bc in dem andern Flügel sind die Abkreisseiten des verbundenen Stralenzuges.

Aus f sei zu sS der zeilenhafte Wendestral fh gezogen, welcher gG in n trifft, zu gG der zeilenhafte Wendestral fH , welcher sS in p trifft. Es seien l, o die Spitzen der Wendestralen fh, fH , also ist (201) l in gG , o in sS ; fh wird in n , fH in p gehalbt; n ist die Wendeecke von l, p die Wendeecke von o . Die aus b, c zu sS gezogenen Zeilen treffen gG in u, v ; die aus b, c zu gG gezogenen Zeilen treffen sS in y, z . Dann sind (206) n, p die Mitten von uv, yz , und

$$\left. \begin{array}{l} bc, lo \\ uv, lm \\ yz, om \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen,}$$

also (123) $myo \parallel mpz$,
 und (207) $mug \parallel mgv$,
 $mugv \parallel mwdc \parallel mxSz$,
 also $mxS \parallel mSz$;
 aber $mxS \parallel mys$,
 also $mys \parallel mSz$;
 aber $myo \parallel mpz$,
 also (109) $mso \parallel mpS$.

Also sind yz , sS und op , sS Mittelflächungen, deren Flächenecke und Mitte von sS in m ist.

Die aus f nach den Durchmessercken gG gehenden Stralen treffen den verbundenen Durchmesser in q , t . Dann ist (201) o die Mitte von qt , und m die Flächenecke von op , qt . Also ist qt , sS eine Mittelflächung.

Die diesen Sätzen entsprechenden gelten nun auch für den verbundenen Stralenzug.

209.

Die Ecken, in welchen zwei feste Abkreisseiten von der durch die Abkreismitte gezogenen Zeile ihres Wendestrals getroffen werden, sind die Grenzecken der bildhaften Stabvierecke, welche von beliebigen Abkreisseiten auf diesen festen Abkreisseiten entstehen.

Hierdurch ist der Abkreis aus der gegebenen Mitte, aus zweien gegebenen Abkreisseiten und den entsprechenden Abkreisecken bestimmt.

Es seien f , h zwei feste Abkreisseiten, a die Spitze ihres Wendestrals fh . Es seien F , H ihre zeilenhaften Abkreisseiten und A , D , d die Spitzen der Wendestralen FH , Fh , fH , so sind (194)

Dd , fh , FH und DH , dh , und Df , dF Zeilen, und Ff , Dd , Hh Stralen der Abkreismitte m .

Es sei g eine beliebige Abkreisseite, welche die festen Abkreisseiten h , f in b , r trifft. In der Abkreisvierseitung $Ffgh$ sind D , b , r die Spitzen der Wendestralen Fh , hg , gf und die Spitze des Wendestrals Ff liegt im Unendlichen. Aber (154) der aus b zu dieser Spitze gezogene Stral liegt in der Ecke $fhDr = o$. Also ist bo die Zeile zu den Abkreisseiten f , F .

Es sei g' eine andere beliebige Abkreisseite, welche die festen Abkreisseiten h, f in b', r' trifft. Es sei die Ecke $fhDr' = o'$, so erhellet, wie oben, dass $b'o'$ die Zeile zu den Abkreisseiten f, F ist.

Es seien die Ecken $Drb'o' = s, Ddb'o' = t, Ddbo = u$, so ist $Dbb' \parallel Dos, Dos \parallel to's, to's \parallel dr'r$.

Also $Dbb' \parallel dr'r$.

Zwei beliebige Abkreisseiten g, g' bilden also auf den festen Abkreisseiten f, h in Beziehung auf die festen Ecken D, d gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke.

Also (76) sind D, d die Grenzecken der Bildgleichung, welche auf den festen Abkreisseiten f, h von vier beliebigen Abkreisseiten entstehen (150)

$1'2'3'4' \parallel 1''2''3''4''$.

Ebenso folgt nun aus:

$Dbh \parallel ubo, ubo \parallel dar$, und aus $Db a \parallel Dor, Dor \parallel d/r$, dass

$Dbh \parallel dar, Db a \parallel d/r$.

Aus (154) folgt ferner, dass $gg', br', b'r$ Stralen einer Ecke des Wendestrals fh sind. Dieser Wendestral ist also (76) der Bildungsstab der obigen Bildgleichung.

Wenn nun die Abkreismitte m , die Abkreisseite und Abkreisecke f , die Abkreisseite und Abkreisecke h gegeben sind, so sind auf der aus m zu fh gezogenen Zeile auch die Grenzecken D, d gegeben. Nimmt man also auf einer der Seiten, z. B. auf der Seite h die Spitze b beliebig an, so ziehe man zu der Seite f die Zeile bo . Die Ecke $Doaf = r$ ist hierdurch gegeben, hieraus die Abkreisseite br , hieraus die Abkreisecke g nach (160).

210.

Die Abkreisecken zweier festen zeilenhaften Abkreisseiten sind die Grenzecken der bildhaften Stabvierecke, welche von beliebigen Abkreisseiten auf diesen festen Seiten entstehen.

Es seien H, h zwei feste zeilenhafte Abkreisseiten, also (194) der Wendestral Hh ein Durchmesser. Es seien f, g zwei beliebige Abkreisseiten. Es seien $abcd$ die Spitzen der Wendestrallen fh, gh, Hg, Hf .

Aus (154) folgt, dass ac, bd, fg Stralen einer Ecke u des Durchmessers Hh sind.

Also (31) aus der Ecke u :

$hab \vdash Hcd.$

Also bilden zwei beliebige Abkreisseiten auf den zeilenhaften Abkreisseiten H, h in Bezug auf die Abkreisecken H, h gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke.

Also (76) sind diese Abkreisecken H, h die Grenzecken der Bildgleichung, welche auf den festen Abkreisseiten H, h von vier beliebigen Abkreisseiten entstehen (150)

$1'2'3'4' \vdash 1''2''3''4''.$

Der Durchmesser Hh ist (76) der Bildungsstab dieser Bildgleichung.

Aus (154) folgt ferner:

die Wendestralen Hf, hg sind Stralen einer Ecke k von ac ;

die Wendestralen Hg, hf sind Stralen einer Ecke l von bd ;

das Band kl ist die Zeile der Abkreisseiten H, h und ein Stral der Spitze r des Wendestrals fg .

Bei dem Stralenzuge kann die Abkreisecke f ins Unendliche rücken. Alsdann ist die Abkreisseite ad eine Grenzseite und geht durch die Abkreismitte m , es ist $ha = Hd$, und es sind ug, ad, Hk, hl Zeilen. Es bleibt auch dann die Bildgleichung

$hab \vdash Hcd.$

211.

Auf einer Abkreisseite schneiden zwei zeilenhafte Abkreisseiten oder zwei verbundene Durchmesser beim Schlusszug eine Mittelflüchung, beim Stralenzug ein Wechselviereck ab.

Bei einem Schlusszuge seien die Abkreisseiten f, F Zeilen des Durchmessers k, K , und die Abkreisseiten k, K Zeilen des Durchmessers fF , so heissen fF, kK verbundene Durchmesser, $fkFK$ eine innere verbundene, $bcBC$ eine äussere verbundene Zeilung.

Es seien g, G zwei beliebige zeilenhafte Abkreisseiten, r, R, s, S die Spitzen der Wendestralen fg, FG, fG, Fg , so ist:

(210) $FRB \parallel fcs$,
 (194) $FRB \parallel frb$,
 also $frb \parallel fcs$.

Aber f ist die Mitte von bc .

Also (109) $bcrs$ eine *Mittelflächung*.

Es sei hH der verbundene Durchmesser zu gG , die Seite f werde von mg , mh in l , o getroffen, fn sei die Zeile zu mh , so ist:

(201) $ngl \parallel nmG$,
 also . . $frl \parallel fos$.

Also ist f die Flächenecke der Glieder lo , rs ; aber auch der Glieder bc , rs , folglich auch die Flächenecke der Glieder bc , lo . Also sind $bcrs$, $bclo$ *Mittelflächungen*, deren gemeinsame Flächenecke f und Flächenseite $fb = fc$ ist. Dieselben Schlüsse gelten beim Stralenzuge.

Hier sind f , F die zeilenhaften Abkreisseiten, bc , BC ihre Glieder zwischen den Grenzseiten, $bcBC$ ihre verbundene Zeilung, g , G zwei beliebige zeilenhafte Abkreisseiten, welche f , F in r , R , s , S treffen; die verbundenen Durchmesser gG , hH treffen bc , BC in l , o , L , O . Es sei fn die Zeile zu g , so ist

(210) $FRB \parallel fbs$,
 (194) $FRB \parallel frb$,
 also $frb \parallel fbs$,
 ferner (201) $ngl \parallel nmG$,
 also . . $frl \parallel fos$.

Also ist f die Flächenecke der Glieder rs , bb und der Glieder rs , lo , also auch die Flächenecke der Glieder lo , bb .

Also sind $frbs$, $frcs$ und $flbo$, $flco$ *Wechselvierecke*.

212.

Bei zwei verbundenen Zeilungen eines Abkreises sind die Mittelstralen zweier Paare verbundener Durchmesser ebenfalls verbundene Durchmesser.

Die Abkreismitte sei m .

Es seien fF , gG zwei Durchmesser und kK , hH die entsprechenden verbundenen Durchmesser.

In der Zeilung $fFgG$ seien r , R die Spitzen der Wendestrallen fg , FG . In der Zeilung $kKhH$ seien s , S

beim Schlusszuge die Spitzen der Wendestralen Kh , kH . Beim Stralenzuge sind in der Zeilung $kKhH$, sS die Spitzen der Wendestralen Kh , kH des verbundenen Stralenzuges.

Die aus f nach grG gehenden Stralen treffen hH in got . Die Ecke $fGgr = v$.

Die aus g nach frF gehenden Stralen treffen kK in $q'o't'$. Die Ecke $gFfr = v'$.

Dann sind (201) o , o' die Mitten von qt , $q't'$.

Also r die Mitte von gv , $f'v'$.

Aber m die Mitte von Gg , Ff .

Also mr , fG ; tr , Gg ; mr , Fg ; $t'r$, Ff Zeilen.

Also die Dreiecke frg , $t'mt$ deckend, fg , tt' gleiche Zeilen.

Da $mroo'$ eine Zeilung ist, so wird oo' von mr gehalten. Auch wird (201) fg von mr gehalten. Also (13) fg , oo' oder qq' , oo' oder tt' , oo' Zeilen.

Beim Schlusszuge:

$$mth \parallel mhq, \quad mt'k \parallel mkq'.$$

Beim Stralenzuge:

$$mth \parallel mHq, \quad mt'k \parallel mKq'.$$

Aber qq' , tt' Zeilen. Also (122) hk , HK Zeilen zu qq' oder zu fg , FG ;

und ebenso hK , Hk Zeilen zu fG , Fg .

Aber sS ist die Zeile zu hk , HK .

Also werden die Wendestralen fg , FG , hk , HK von rR , die Wendestralen fG , Fg , hK , Hk von sS gehalten.

Also ist sS der verbundene Durchmesser zu rR .

Beim Schlusszuge sind aus gleichem Grunde die Mittelstralen der Zeilungen $kgKG$, $fhFH$ verbundene Durchmesser.

Es seien l , l' die Spitzen der in f zu hH , in g zu kK zeilenhaften Wendestralen, so ist (201)

$$\begin{aligned} ofr \parallel orl, \quad o'gr \parallel o'rl', \\ \text{aber } ofr \parallel o'gr, \text{ also } orl \parallel o'rl'. \end{aligned}$$

Also ll' die Zeile zu oo' oder zu fg .

Es seien p , p' auf mh , mk die Wendeecken der Spitzen o , o' , so sind (201) qt , mp und $q't'$, mp' Gleichmessungen, also $mtpq \parallel mt'p'q'$, also pp' die Zeile zu fg .

Es seien die Ecken $fkgh = 3$, $fhgk = 4$, so fällt das Band 34 mit mr zusammen und halbt in 1, 2 die zeilenhaften Wendestralen fg , hk .

Beim Schlusszuge ist

$$412 \vdash 4fh \vdash mth \vdash mhq \vdash m21.$$

Also sind die Stabdreiecke 412, $m21$ gegenfolgend bildhaft, also (41) haben die Glieder 12, $m4$ eine gemeinsame Mitte w , also $14 = m2$, $24 = m1$. Also bilden die Glieder $m3$, 12 eine Mittelflächung, deren Flächenecke w ist.

Dasselbe gilt beim Schlusszuge für die Zeilen fh , gK ; gk , fH ; hK , fG .

Beim Stralenzuge ist:

$$412 \vdash 4fh \vdash mth \vdash mHq \vdash m2'1,$$

wo m die Mitte von $22'$ ist.

Aber 12, 34 eine Gleichmessung.

$$\text{Also } m21 \vdash 312.$$

Also (41) haben die Glieder 12, $m3$ eine gemeinsame Mitte w , also $13 = m2$, $23 = m1$. Also bilden die Glieder $m4$, 12 eine Mittelflächung, deren Flächenecke die Mitte w ist.

213.

Beim Abkreise sind die Wendedreiecke der Abkreismitte, oder die innern und äussern verbundenen Zeilungen inhaltsgleich. Ferner sind diejenigen beiden Zeilungen inhaltsgleich, deren Querseiten einerseits zwei beliebige Durchmesser, andererseits ihre verbundenen Durchmesser sind.

Der Schlusszug.

Es seien zwei beliebige Zeilungen beschrieben, deren Seiten Abkreisseiten sind, so sind ihre Querseiten, welche den Abkreis in fF , kK und gG , hH treffen, (158) gesellte Wendestralen der Abkreismitte, oder die Neigungen fmk , gmh Wendeglieder der Abkreismitte, oder die Dreiecke fmk , gmh Wendedreiecke der Abkreismitte. Auch sind (194) diese Querseiten fF , kK und gG , hH verbundene Durchmesser.

Den innern verbundenen Zeilungen $fFkK$, $gGhH$ entsprechen die äussern verbundenen Zeilungen $bBcC$ und

aAdD. Jede äussere verbundene Zeilung ist das Doppelte der innern verbundenen Zeilung.

Es seien r, R, s, S die Spitzen der Wendestralen fg, FG, hK, Hk , so sind (212)

fG, Fg, hK, Hk, rR Zeilen,
 fg, FG, hk, HK, sS Zeilen
 und (212) rR, sS verbundene Durchmesser.

Also sind inhaltsgleich die Dreiecke:

$mgh = mgs, mgs = mfs, mfs = mfk$,
 also sind inhaltsgleich die Wendedreiecke

$mgh = mfk$.

Also sind inhaltsgleich:

die innern verbundenen Zeilungen

$fFkK = gGhH$;

die äussern verbundenen Zeilungen

$bBcC = aAdD$.

Es seien die Ecken $fkgh = 3, fhgk = 4$, so fällt (212) das Band 34 mit dem Durchmesser rR zusammen und halbt die Zeilen fg, hk in 1, 2; auch sind die Glieder

$14 = m2, 24 = m1$.

Also sind inhaltsgleich die Dreiecke:

$fm1 = f24 = h14 = hm2$.

Also sind inhaltsgleich die Dreiecke

$mfg = mfk$.

Also sind inhaltsgleich die Zeilungen

$fFgG = hHkK, fFhH = gGkK$.

Der Stralenzug.

Die Grenzseiten seien ma, md . Es seien f, g oder bc, ad zwei beliebige Abkreisseiten, so sind (206) ab, cd Zeilen, und die Abkreisecken f, g die Mitten der Seiten bc, ad .

Also sind inhaltsgleich:

die Dreiecke $mad = mbc$;

die innern verbundenen Zeilungen

$fFkK = gGhH$;

die äussern verbundenen Zeilungen

$bBcC = aAdD$.

Es seien die Ecken $fkgh = 3, fhgk = 4$, so fällt

(212) das Band 34 mit dem Durchmesser rR zusammen und halbt die Zeilen fg , hk in 1, 2; auch sind die Glieder

$$13 = m2, 23 = m1.$$

Also sind inhaltsgleich die Dreiecke:

$$fm1 = f'23 = h13 = hm2.$$

Also inhaltsgleich

$$\text{die Dreiecke } mfg = m'hk,$$

$$\text{also die Zeilungen } fFgG = hHkK.$$

Aus der Inhaltsgleichheit der Dreiecke

$$mfK = mfc = \frac{1}{2} mbc = \frac{1}{2} mad = mgd = mgH$$

$$\text{und der Dreiecke } fgK = fgH$$

folgt die Inhaltsgleichheit der Dreiecke $mgK = m/H$, also der Zeilungen $fFhH = gGkK$.

214.

Auf einem verbundenen Wendestral schneiden zwei andere verbundene Durchmesser, wenn es ein Schlusszug ist, eine Mittelflächung, wenn es ein Stralenzug ist, gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke ab.

Es seien mf , mk zwei verbundene Halbmesser, mg , mh zwei andere verbundene Halbmesser, so heissen fk , gh verbundene Wendestralen.

Beim Stralenzuge sind fk , gh Zeilen der Grenzseite ma und werden von der andern Grenzseite md gehalten. Der verbundene Wendestral fk werde von den verbundenen Halbmessern mg , mh in v , y , von mc oder md in x getroffen. Dann ist x die Mitte von fk , vy , also sind:

$$vfk \parallel ykf$$

gegenfolgend bildhafte Stabdreiecke.

Beim Schlusszuge sei c die Spitze des verbundenen Wendestrals fk .

Aus c sei zu der Abkreisseite g oder zum verbundenen Durchmesser hH die Zeile gezogen, welche den verbundenen Wendestral fk in z trifft. Der verbundene Wendestral fk werde von den verbundenen Halbmessern mg , mh in v , y , von mc in x getroffen. Dann ist:

(202) fk , vz eine Gleichmessung.

Es sei x die Mitte von vv' , fk , so ist
 fk , $v'y$ eine Gleichmessung,

also $fvky$ eine Mittelflächung, wo x die Flächenecke der
 Glieder fk , vy und wo $fx = kx$ die Flächenseite ist.

Wenn mg , mh die Abkreisseite f in l , o treffen, so
 sind (211):

beim Stralenzuge $flbo$, $flco$ Wechselvierecke, beim
 Schlusszuge $bclo$ eine Mittelflächung, deren Flächenecke f ,
 deren Flächenseite $fb = fc$ ist.

Wenn also beim Schlusszuge die Zeilung der verbun-
 denen Halbmesser $mfck$ und die Richtung eines der ver-
 bundenen Halbmesser mg oder mh gegeben ist, so ist auch
 die Richtung des andern durch die Gleichmessungen fk , vz
 oder fk , $v'y$ bestimmt, beim Stralenzuge aber dadurch,
 dass x die Mitte von vy ist.

Zieht man dann zu mh , mg die Zeilen fn , fp , so sind
 die Abkreisecken g , h dadurch gegeben, dass in beiden
 Fällen $mlgn$ ein Wechselviereck, beim Schlusszuge $mpho$
 ein Wechselviereck, beim Stralenzuge $hHop$ eine Mittel-
 flächung ist.

215.

*Aus einer verbundenen Zeilung eines Abkreises ist die
 verbundene Zeilung der Richten durch zweinamigen
 Schnitt bestimmt.*

Die Abkreismitte sei m , die gegebenen verbundenen
 Halbmesser seien mf , mk , wo $mfck$, $mfbk$ gegebene Zei-
 lungen sind, und x die Mitte von fk .

I.

Der Abkreis sei ein Schlusszug.

Man bestimme auf mx die Ecke u , so dass x die Flä-
 chenecke der Glieder fk , mu , oder auf mf die Ecke w , so
 dass f die Flächenecke der Glieder bc , mw sei.

Dieses hängt von einem einnamigen Schnitt (109) ab.
 Ein um das Dreieck mfk beschriebener Kreis geht durch
 u , ein um das Dreieck mbc beschriebener Kreis geht durch
 w (134).

Man beschreibe nun um mu einen Kreis, dessen Mitte
 in fk liege. Dieser Kreis schneidet fk in v , y .

Oder man beschreibe um mw einen Kreis, dessen Mitte in bc liege. Dieser Kreis schneidet bc in l , o . Die Stralen mv , ml und my , mo müssen übereinstimmen und geben die beiden Richten der Lage nach. Man ziehe fn zeilenhaft zu moy , fp zeilenhaft zu mv , und bestimme die Ecken g , h durch die Wechselvierecke $mngl$, $mpho$.

II.

Der Abkreis sei ein Stralenzug, x die Mitte von fk , f die Mitte von bc , die Grenzseiten sind mc und mb , wo mb die Zeile zu fk ist. Man nehme xv , xy gleich xm , xc . Die Neigungen der Grenzseiten werden durch die Stralen mv , my , welche eine Lothung machen, gehalten. Wenn bc von mv , my in l , o getroffen wird, so ist

$$flb \parallel vlm \parallel vfk \parallel ykf \parallel ymo \parallel fbo,$$

also f die Flächenecke von lo , bb . Nimmt man also auf fm die Ecke w so, dass f die Flächenecke von mw , bb , also auch von mw , lo ist, so geht ein um mw beschriebener Kreis, dessen Mitte in bc liegt, durch lo .

Die Abkreisecke g wird durch das Wechselviereck $mlgn$ bestimmt. Hierdurch ergibt sich ad oder die verbundene Richt hH , wo $mho \parallel mpH$ ist.

216.

Durch eine gegebene Ecke gehen zwei Kreise, welche an der gegebenen Ecke an einem gegebenen Stabe eine gegebene Neigung fassen, und deren Mitten in einem gegebenen Stabe liegen.

Es sei durch die Ecke a ein Kreis zu beschreiben, welcher an einem gegebenen Stabe B eine gegebene Neigung $gar = A$ fasse, und dessen Mitte in einem gegebenen Stabe C liege. Es sei die Ecke $BC = c$.

Man nehme in dem Stabe C eine beliebige Ecke p an, ziehe aus p auf den gegebenen Stab B ein Loth ps , bestimme die Ecken no in dem Stabe B , so dass die Neigungen $spn = spo = A$ seien. Der aus p mit dem Halbmesser $pn = po$ beschriebene Kreis trifft den Stral ac in l , l' . Man ziehe aus a zu lp die Zeile am , zu $l'p$ die Zeile am' , so sind m , m' die Kreismitten. Man ziehe aus

a zu ln , lo die Zeilen aq , ar , so sind (19) mq , pn Zeilen, mr , po Zeilen, also $mq = mr = ma$. Man ziehe aus a zu $l'n$, $l'o$ die Zeilen aq' , ar' , so sind $m'q'$, pn Zeilen, $m'r'$, po Zeilen, also $m'q' = m'r' = m'a$.

Also schneidet ein aus m mit ma beschriebener Kreis den Stab B in qr , ein aus m' mit $m'a$ beschriebener Kreis den Stab B in $q'r'$, so dass die Neigungen $gar = nlo$ gleich der Neigung A , und $q'ar' = nl'o$ gleich der Neben-
neigung A .

Wenn die Stäbe B , C eine Lothung machen, so fallen für jede Lage von p die Stralen pc , ps zusammen, und s ist die gemeinsame Mitte der Abschnitte qr , $q'r'$.

217.

Aus der verbundenen Zeilung eines Abkreises ist jede andere verbundene Zeilung, deren Halbmesser eine gegebene Neigung haben, durch zweinamigen Schnitt bestimmt.

Die Abkreismitte sei m , die gegebenen verbundenen Halbmesser seien mf , mk , wo $mfck$, $mfbk$ gegebene Zeilungen sind, und x die Mitte von fk .

I.

Der Abkreis sei ein Schlusszug.

Man bestimme auf mx die Ecke u so, dass x die Flächenecke der Glieder fk , mu , oder auf mf die Ecke w so, dass f die Flächenecke der Glieder bc , mw sei. Diess hängt (109) von einem einnamigen Schnitt ab. Ein um das Dreieck mfk beschriebener Kreis geht durch u , ein um das Dreieck mbc beschriebener Kreis geht durch w . Man halbe mu durch ein Loth, beschreibe nach (216) durch die Abkreismitte m einen Kreis, dessen Mitte in jenem Loth liegt und der den Stab fk in vy so schneidet, dass die Neigung vmy einer gegebenen Neigung A gleich sei.

Oder man halbe mw durch ein Loth, beschreibe nach (216) durch m einen Kreis, dessen Mitte in diesem Loth liegt und der den Stab bc in lo so schneidet, dass die Neigung lmo der Neben-
neigung A gleich sei. Die Stralen mv , ml und my , mo müssen übereinstimmen (214) und geben die Richtungen der verbundenen Halbmesser.

Man ziehe zu moy die Zeile fn , zu mlv die Zeile fn , so sind die verbundenen Halbmesser mg , mh durch die Wechselvierecke $mngl$, $mpho$ gegeben.

II.

Der Abkreis sei ein Stralenzug.

Man ziehe in x auf fk ein Loth und beschreibe nach (216) durch m einen Kreis, dessen Mitte in diesem Loth liegt und welcher den Stab fk in vy so schneidet, dass die Neigung emy einer gegebenen Neigung A gleich sei.

Oder man bestimme auf mf die Ecke w so, dass f die Flächenecke der Glieder bb , mw sei, halbe mw durch ein Loth, beschreibe (216) durch m einen Kreis, dessen Mitte in diesem Loth liegt und der den Stab bc in lo so schneidet, dass die Neigung lmo der Nebenneigung A gleich sei.

Die Stralen mv , ml und my , mo müssen übereinstimmen und geben die Richtung der verbundenen Halbmesser. Man ziehe zu moy die Zeile fn , so ist der Halbmesser mg durch das Wechselviereck $mlgn$ gegeben.

218.

Die verbundenen Halbmesser eines Abkreises sind die Seiten eines Lothdreiecks, dessen dritte Seite unveränderlich ist und das Mittelmaass heisst. Dieses Mittelmaass ist beim Schlusszuge die Gegenseite der Lothung, beim Stralenzuge die Nebenseite der Lothung.

Es sei mlo ein beliebiges Dreieck, um welches ein Kreis beschrieben sei. Es sei f eine beliebige Ecke der Seite lo , der Stral mf treffe den Kreis in w .

Aus f seien zu mo , ml an die Seiten ml , mo die Zeilen fn , fp gezogen. Aus l , o seien zu mf Zeilen gezogen, welche den Kreis in 1, 2 treffen. Die Bänder ol , $l2$ treffen den Stral mf in 3, 4.

Alsdann haben die Glieder mw , 34 einerlei Mitte. Ferner sind die Neigungen oder Nebenneigungen

$$mo3 = ml1 = lmf = mfp,$$

$$ml4 = mo2 = omf = mfn.$$

Also sind $opf3$, $lnf4$ Kreisvierecke.

Also ist m die Flächenecke der Glieder op , $f3$ und ln , $f4$.

Es sei $mlgn$ ein Wechselviereck. Beim Schlusszuge seien $mpho$, $mpHo$ Wechselvierecke, beim Stralenzuge sei $ophH$ eine Mittelflächung.

Also ist mg die Flächenseite von m zu $f4$, und mh die Flächenseite von m zu $f3$.

Es sei mM die Flächenseite von m zu fw , so heisst mM das *Mittelmaass*.

Also (139) sind mM , mg , mh Seiten eines Lothdreiecks.

Beim Schlusszuge ist mw das äussere, 34 das innere Glied, also das Mittelmaass mM die Gegenseite der Lothung.

Beim Stralenzuge ist mw das innere, 34 das äussere Glied, also das Mittelmaass mM die Nebenseite der Lothung.

Da f die Flächenecke der Glieder mw , lo , bc ist und f die Mitte von bc , so ist der Halbmesser $mk = fb = fc$ die Flächenseite von f zu mw . Aber mM ist die Flächenseite von m zu fw . Also (137) sind mf , mk , mM Seiten eines Lothdreiecks, und zwar ist beim Schlusszuge, wo f die innere Ecke von mw ist, mM die Gegenseite der Lothung, beim Stralenzuge aber, wo f die äussere Ecke von mw ist, ist mM die Nebenseite der Lothung. Also sind die verbundenen Halbmesser mf , mk und mg , mh Seiten zweier Lothdreiecke, von gemeinsamer Seite mM , welche beim Schlusszuge die Gegenseite, beim Stralenzuge die Nebenseite der Lothung ist.

219.

Zwei verbundene Halbmesser eines Abkreises werden, der eine von dem Stellenmaass einer beliebigen Abkreisecke, der andere von dem verbundenen Stellenmaasse dieser Ecke, bildhaft getheilt.

Es seien mg , mh oder mH zwei verbundene Halbmesser, f eine beliebige Abkreisecke. Aus f seien fn , fp zeilenhaft zu mh , mg gezogen, so heissen mn , mp die *Stellenmaasse* der Ecke f . Die Ecke der Abkreisseiten f , g sei r , aus r zu mg die Zeile rt gezogen, so ist (201, 212) in dem Stabdreieck opm

ot die Flächenseite von *o* zu *mp*,
mh die Flächenseite von *m* zu *op*,
mp'' die Flächenseite von *p* zu *om*,
 beim Schlusszuge auch von *p* zu *hH*.

Alsdann sind (137) *opt* $\dagger\dagger$ *mp''H* und *mp*, *mp''*, *mh*
 oder *mH* sind Seiten eines Lothdreiecks.

Beim Schlusszuge ist *mH* die Gegenseite, beim Stralenzuge die Nebenseite der Lothung. Hier heissen *mp*, *mp''* *verbundene Stellenmaasse* der Ecke *f*.

Es ist aber *opt* $\dagger\dagger$ *ofr* $\dagger\dagger$ *mng*.

Da nun *opt* $\dagger\dagger$ *mp''H*, so ist *mp''H* $\dagger\dagger$ *mng*, also *np''*, *gH* Zeilen, also werden die verbundenen Halbmesser *mg*, *mH* der eine von dem Stellenmaass *mn*, der andere von dem zu *mp* verbundenen Stellenmaasse *mp''* bildhaft getheilt.

Ebenso erhellet: wenn zu dem Stellenmaasse *mn* das verbundene Stellenmaass *mn''* genommen wird, so dass *mn*, *mn''*, *mg* Seiten eines Lothdreiecks sind, so ist *mn''g* $\dagger\dagger$ *mph*, und *n''p*, *gh* Zeilen. Also werden die verbundenen Halbmesser *mh*, *mg*, der eine von dem Stellenmaasse *mp*, der andere von dem zu *mn* verbundenen Stellenmaasse *mn''* bildhaft getheilt.

Wenn also *mg*, *mh*, *mp* gegeben sind, so ist *mp''* gegeben, also die Zeile *p''n* gegeben, also *n* gegeben, also *f* gegeben. Ebenso ist *f* aus *mg*, *mh*, *mn* gegeben.

220.

Wenn in Bezug auf zwei verbundene Halbmesser die Stellenmaasse einer Abkreisecke bestimmt werden, so sind die verbundenen Stellenmaasse derselben die Stellenmaasse der verbundenen Abkreisecke.

Die Zeilungen der Stellenmaasse und der verbundenen Stellenmaasse sind inhaltsgleich.

Es seien *mg*, *mh*, sowie *mf*, *mk* verbundene Halbmesser; *mn*, *mp* die Stellenmaasse von *f*; *mn'*, *mp'* die Stellenmaasse von *g*; *mn''*, *mp''* die Stellenmaasse von *k*. Es seien *l*, *l'* die Spitzen der Wendeecken *n*, *n'*.

Dann ist (201)

$$mng \parallel mgl, mgl \parallel mn'f,$$

$$\text{also } mng \parallel mn'f,$$

also fg , nn' Zeilen. Also die Zeilungen mn/p , $mn'gp'$ inhaltsgleich.

Beim Schlusszuge sind ausserdem aus gleichem Grunde die Zeilungen $mn''kp''$, $mn'gp'$ inhaltsgleich.

Also beim Schlusszuge die Zeilungen der verbundenen Halbmesser mn/p , $mn''kp''$ inhaltsgleich.

Beim Stralenzuge sind (214) $mfck$, $mvcy$ Zeilungen, also liegen die Ecken $fnkp''$, $fpkn''$ in mc , also sind hier ebenfalls die Zeilungen mn/p , $mn''kp''$ inhaltsgleich.

In beiden Abkreisen sind (212) fg , hk , HK , pp' Zeilen. Beim Schlusszuge sind auch gk , fH , $n'p''$ Zeilen.

Also beim Schlusszuge:

$$mph \parallel mp'k \parallel mn''g,$$

$$mp''H \parallel mn'f \parallel mng.$$

Also sind beim Schlusszuge $n''p$, gh und np'' , gH Zeilen.

Beim Stralenzuge ist:

$$mnv \parallel yfv \parallel vky \parallel mp''y,$$

$$mn''v \parallel ykv \parallel vfy \parallel mpy,$$

also beim Stralenzuge $n''p$, np'' Zeilen zu vy , also zu fk , gH und zur Grenzseite ma .

Also stimmen in beiden Abkreisen die zu den Stellenmaassen mn , mp der Abkreisecke f gehörigen verbundenen Stellenmaasse (219) mit den Stellenmaassen mn'' , mp'' der verbundenen Abkreisecke k überein.

221.

In dem Umfange eines Kreises, welcher aus der Abkreismitte mit dem Mittelmaass als Halbmesser beschrieben ist, liegen die Spitzen aller Wendestrallen, deren Abkreisseiten lothhaft sind.

Es sei $lLoO$ eine beliebige zeilenhafte Abkreisvierseitung, deren Seiten lo , LO , lO , Lo den Abkreis in f , F , 1 , 2 berühren, so ist (194) $fF12$ eine Zeilung, fF , 12 , lL , oO sind Durchmesser, die Zeilen $f1$, $F2$, oO einerseits, die Zeilen $f2$, $F1$, lL andererseits sind die Richtungen verbundener Durchmesser hH , gG , und es wird

(201) der Wendestral $f1$ von ml oder mg in n , der Wendestral $f'2$ von mo oder mh in p gehalten.

Es sei r die Spitze des Wendestrals fg , aus r sei zu mg die Zeile rt gezogen, so ist (201) to die Flächen-
seite von o zu mp ; mh die Flächenseite von m zu op ,
also (137) mo , to , mh Seiten eines Lothdreiecks.

Wenn nun die Abkreisseiten f , l in l lothhaft sind,
so sind $ln = fn = nl$, $ml = mo$, und $tr = to$. Aber tr
 $= mg$, also $to = mg$.

Also sind in diesem Falle mo , mg , mh Seiten eines
Lothdreiecks, also (218) mo oder ml das Mittelmaass
des Abkreises. Da $ml = mo$ ist, so halbt der zu mf ver-
bundene Halbmesser mk die Neigung lmO .

Wenn also umgekehrt aus der Abkreismitte m mit
einem dem Mittelmaass gleichen Halbmesser ein Kreis be-
schrieben wird und l eine beliebige Ecke dieses Kreises
ist, so sind die aus l gezogenen Abkreisseiten lf , ll in l
lothhaft.

222.

Wenn aus einer Ecke der Hauptricht als Spitze zwei
Abkreisseiten gezogen werden, welche auf der verbun-
denen Richt ein der Hauptricht gleiches Glied ab-
schneiden, so heisst der dieser Spitze entsprechende
Wendestral das Nebenmaass. Die demselben und der
Hauptricht gemeinsame Ecke heisst die Leitecke.

Das Nebenmaass macht mit beiden Richten ein Wech-
selviereck.

Dem Abkreise entsprechen zwei gleich weit von der
Mitte entfernte Leitecken, deren gegenseitiger Abstand
die Ausweichung heisst.

Die Ausweichung macht mit beiden Richten ein Loth-
dreieck, in welchem die Ausweichung beim Schlusszuge
die Nebenseite, beim Stralenzuge die Gegenseite der
Lothung ist.

Alle Wendeglieder der Leitecke sind Lothungen.

Es sei gG die Hauptricht, hH die verbundene Richt.
In der Hauptricht gG sei die Ecke l angenommen.
Aus l seien an den Abkreis die Seiten lo , lO gezogen,

welche den Abkreis in f , l berühren und auf der verbundenen Richt das Glied oO abschneiden. Wenn nun dieses Glied oO der Hauptricht gG gleich ist, wenn also o , O Ecken eines aus m mit mg beschriebenen Kreises sind, so heisst der der Spitze l entsprechende Wendestral $f'l$ das *Nebenmaass* des Abkreises. Die Ecken n , n' , in welchen die Nebenmaasse $f'l$, $F'2$ die Hauptricht gG treffen, heissen die *Leitecken*, ihr Abstand nn' heisst die *Ausweichung*.

Es sei aus f auf hH das Loth fp gezogen, welches in $f'2$ liegt, so ist (201) $mpho$ ein Wechselviereck, so dass $mph \perp mho$, und $mo = mg$ ist. Also macht das Nebenmaass $f'l$ mit den beiden Richten hH , gG ein Wechselviereck.

Es seien r , R die Spitzen der Wendestralen fg , $f'G$, ferner aus r , R auf hH die Lothe rt , Rq gezogen, so ist

$$\begin{aligned} otm &\perp orl \perp mgl, \\ oqm &\perp oRl \perp mGl. \end{aligned}$$

Aber (201) $mgl \perp mng$ und $mGl \perp mnG$, also

$$otm \perp mng \text{ und } oqm \perp mnG.$$

Aber $om = mg = mG$,

$$\begin{aligned} \text{also } ot &= mn = oq, \quad tm = ng = gr, \\ qm &= nG = GR. \end{aligned}$$

Also sind rt , nf , og und Rq , nf , oG Stralen einer gemeinsamen Ecke, und die aus der Leitecke n zu den Spitzen r , R gehenden Stralen nr , nR halben die Lothungen fng , fnG . Also ist rnR eine Lothung.

Da r , R die Ecken sind, in welchen die Abkreisseiten g , G von der Abkreisseite f getroffen werden, so sind (158) nr , nR *gesellte Wendestralen* und rnR ein *Wendeglied* der Ecke n .

Da $f'l gG$ ein gleichmessendes Abkreisviereck ist, so sind auch nf , ng *gesellte Wendestralen* und fng ein *Wendeglied* der Ecke n .

Also sind zwei *Wendeglieder* der Ecke n *Lothungen*. Also (158) sind auch alle übrigen *Wendeglieder* der Ecke n *Lothungen*.

Wenn also die Abkreisseiten g, G beim Schlusszuge von der Ahkreisseite h , beim Stralenzuge von der Grenzseite ma , welche ebenfalls eine Abkreisseite ist, in a, D getroffen werden, so ist das Wendeglied anD eine Lothung. Aber aD wird beim Schlusszuge in h , beim Stralenzuge in m gehalten.

Also ist aD beim Schlusszuge das Doppelte von nh , beim Stralenzuge das Doppelte von nm . Also ist beim Schlusszuge $nh = mg$, beim Stralenzuge $mn = ma$.

Also macht die Ausweichung nn' mit den beiden Richtungen gG, hH ein Lothdreieck, in welchem nn' beim Schlusszuge die Nebenseite, beim Stralenzuge die Gegenseite der Lothung ist.

Zweiter Beweis.

Es ist

ot die Flächenseite von o zu mp ,

mh die Flächenseite von m zu op ,

also sind (137) mo, ot, mh oder mg, mn, mh die Seiten eines Lothdreiecks, in welchem mn beim Schlusszuge die Nebenseite, beim Stralenzuge die Gegenseite der Lothung ist.

Dritter Beweis beim Schlusszuge.

Der aus m mit dem Halbmesser $mg = mo$ beschriebene Kreis ist (145) der Urkreis, dessen Abbild der Schlusszug ist. Dieser Kreis werde von fn in s getroffen, so sind os, hf Urbild und Abbild und haben also in gG eine gemeinsame Ecke.

Also $nsf \parallel moh$,

aber $moh \parallel mhp$,

also $nsf \parallel mhp$.

Aber $nf = mp$, also $ns = mh$ und $ms = nh$.

Aber $ms = mo = mg$, also $nh = mg$.

Dritter Beweis beim Stralenzuge.

Wenn $mu = mn'' = mh$ genommen, in n'' auf gG ein Loth $n''k$ gezogen und aus m mit dem Halbmesser mp ein Kreis beschrieben wird, so ist er (147) der Urkreis, von

welchem der Stralenzug in Bezug auf die Lichtecke u , den Lichtstab $kn'' = Q$, den Grenzstab $hH = S$ das Abbild ist. Es sei die Ecke $fpkn'' = v$, so liegt v in der Grenzseite md . Diese trifft den Urkreis in einer Ecke f' , welche das Urbild der Abkreisecke f ist, also in dem Stral uf liegt. Also sind up , mf' Zeilen. Der Urkreis werde von mn in f'' getroffen. Es sei auf fp $pu' = pu$ genommen, so sind $f'f''$, uu' Zeilen. Es werde fp von $f'f''$ in v' getroffen, so ist (31) $f''mu \vdash v'vf$. Da $f'v'$, uu' Zeilen sind, so ist $u'v'f \vdash uf'f$. Da $f'v$, up Zeilen sind, so ist $uf'f \vdash pvf$. Also ist $u'v'f \vdash pvf$. Also (109) $v'vf \vdash u'pf$. Aber $f''mu \vdash umg$. Also $umg \vdash u'pf$. Es sei die Ecke $upad = d'$, so ist $umg \vdash upd'$. Also $upd' \vdash u'pf$. Aber $u'p = up$. Also $pd' = pf$. Aber $pf = mn$ und $pd' = md$, also $mn = md = ma$.

Es seien in beiden Abkreisen mf , mk verbundene Halbmesser, und kn'' die Zeile zu hH , so ist (219)

$$\begin{aligned} & mn''g \vdash mph \\ \text{oder } & mn''g \vdash mpH, \\ \text{aber } & mph \vdash mho, \\ & mpH \vdash mho, \\ \text{also } & mn''g \vdash mho. \\ \text{Aber } & mg = mo. \\ \text{Also } & mn'' = mk. \end{aligned}$$

223.

Die beiden Leitecken bilden mit einer beliebigen Abkreisecke ein Dreieck, dessen Neigungen von den beiden Paaren gesellter Wendestralen, sowie von der Abkreisseite und ihrem Loth gehalten werden.

Beim Schlusszuge ist die Anlage, beim Stralenzug der Unterschied der von den Leitecken zu der beliebigen Abkreisecke gezogenen Leitstralen der Hauptricht des Abkreises gleich.

Der von der Leitecke zur Spitze einer beliebigen Leitsehne gezogene Stral bildet mit der Leitsehne eine Lothung.

Wenn aus einer beliebigen Abkreisecke Zeilen zu den beiden Richten, ferner eine Zeile zu einem der beiden gesellten Wendestralen der einen oder der andern Leitecke, ferner ein Stral zu einem der beiden Scheitel gezogen werden, so entsteht eine Vierstrahlung, welche einer festen Vierstrahlung bildhaft ist.

Es sei gG die Hauptricht, eine beliebige Abkreisseite f werde von den zeilenhaften Abkreisseiten g, G in r, R , von der Hauptricht in l getroffen, so machen (160) die Glieder lf, rR eine Gleichmessung. Ein um rR als Durchmesser beschriebener Kreis treffe die Hauptricht in n, n' , so sind (90) die Neigungen $rnR, rn'R$ Lothungen. Aber (158) diese Neigungen sind Wendeglieder der Ecken n, n' . Also (222) sind n, n' die beiden Leitecken des Abkreises.

Dieses ist die bekannte Fügung, durch welche in der alten Bildlehre der zweinamige Schnitt aufgelöst wird.

Es seien die Ecken $n'rnR = o, nrn'R = p$. Da nun $rnR, rn'R$ Lothungen sind, so folgt aus (69), dass f die Ecke der Stralen op, rR ist; aus (91), dass die Stralen op, rR eine Lothung machen; dass die Neigung und Nebenneigung $n'nf$ von den gesellten Wendestralen nR, nr , ferner die Neigung und Nebenneigung $nn'f$ von den gesellten Wendestralen $n'r, n'R$, endlich die Neigung und Nebenneigung $nf n'$ von der Abkreisseite rR und ihrem Loth fo oder fp gehalten werden, und dass die Ecken r, R, o, p die Mitten der vier eingeschriebenen Kreise des Dreiecks $nf n'$ sind.

Der um rR als Durchmesser beschriebene Kreis werde von dem Leitstral $n'f$ in q getroffen, so sind die Neigungen $nf r = qfr$, also $nf = qf$, und $nr = qr$, also $n'q$ beim Schlusszuge die Anlage, beim Stralenzuge der Unterschied der Leitstralen $nf, n'f$.

Der um rR als Durchmesser beschriebene Kreis schneide die Abkreisseite G in s , so ist $rs = gG, n's = nr$, also $n's = qr$, also $n'q = rs = gG$. Also ist die Anlage oder der Unterschied der Leitstralen $nf, n'f$ gleich der Hauptricht gG .

Es sei durch die Leitecke n eine beliebige Leitsehne f/k gezogen, deren Spitze a sei, so ist n in dem Wendestral von a , also (157) a in dem Wendestral von n , also sind (158) f/n , an gesellte Wendestralen der Leitecke n , also (222) anf eine Lothung.

Es seien von a , f Lothe ab , fc auf die Haupttricht gG gezogen. Es sei von r auf nf ein Loth rd gezogen. Da der Stral nr die Neigung fng halbt, so sind die Dreiecke ndr , ngr deckend, also $nd = ng$. Es sei aus f zu nR die Zeile gezogen, welche gG in t trifft, so ist $nt = nf$.

Also hat man die Bildgleichungen

$$gbc \parallel raf \parallel dnf.$$

$$\text{Aber } dnf \parallel gnt,$$

$$\text{also } gbc \parallel gnt,$$

$$\text{also (109) } gbn \parallel gct.$$

Aber das Stabdreieck gbn ist fest. Also ist das Stabdreieck gct für jede Abkreisseite f einem festen Stabdreieck bildhaft.

Hier ist gc der veränderliche Abschnitt vom Scheitel g genommen, und gt der veränderliche Unterschied zwischen dem Leitstral nf und dem festen Abschnitt ng .

Zieht man also aus f Zeilen zu den Richten gG , hH , eine Zeile zu einem der gesellten Wendestralen nr oder nR , $n'r$ oder $n'R$, und einen Stral zu einem der beiden Scheitel g , G , so bilden diese vier Stralen eine Stralung, welche einer festen Vierstralung bildhaft ist, z. B. der aus h gehenden auf dieselbe Art gebildeten Vierstralung.

224.

Die Neigungen zweier beliebigen Leitstralen werden von den gesellten Wendestralen der Spitzen gehalbt.

(Siehe die Fügung 154.)

Es sei h eine beliebige Ecke, zwei beliebige Stralen derselben treffen den Abkreis in 12, 34, es seien a , b , c , d die Spitzen der Wendestralen 13, 24, 23, 41, so sind (154) ab , cd Stralen der Ecke h . Auch sind (158) ab , cd gesellte Wendestralen. Sie bilden das eine Glied einer Gleichmessung, deren anderes Glied die Stralen 12, 34 bilden. Also wird jede zu ab gezogene Zeile von den

Stralen 12, 34, cd und jede zu cd gezogene Zeile von den Stralen 12, 34, ab gehalten.

Wenn h die Leitecke ist, so ist (222) die Neigung der gesellten Wendestralen ab , cd der Spitzen eine Lothung, folglich werden alsdann die Neigung und Neben-
neigung der Stralen 12, 34 von diesen gesellten Wendestralen ab , cd gehalten.

225.

Wenn aus der Leitecke Stralen nach drei beliebigen Abkreisecken und nach den drei Spitzen ihrer entsprechenden Abkreissehnen gezogen werden, so ist die Neigung je zweier Spitzstralen die Hälfte der Neigung der entsprechenden Eckstralen.

Es seien 5, 6, 7 drei beliebige Abkreisecken und Abkreisseiten; es seien 1, 2, 3 die Spitzen der Abkreissehnen 67, 75, 56; es sei n eine der beiden Leitecken, und es seien die von n nach 123567 gezogenen Stralen durch $1'2'3'5'6'7'$ bezeichnet.

Die Neigung der Spitzstralen $2'3'$ ergibt sich durch Anlage oder Abzug aus den Neigungen $2'5'$ und $3'5'$. Nach (224) sind diese Neigungen die Hälften der Neigungen $7'5'$ und $6'5'$. Die Neigung der Eckstralen $6'7'$ wird aus den Neigungen $7'5'$, $6'5'$ durch Anlage oder Abzug gebildet. Also ist die Neigung der Spitzstralen $2'3'$ die Hälfte der Neigung der Eckstralen $6'7'$. Ebenso erhellet, dass die Neigung der Spitzstralen $3'1'$ die Hälfte der Neigung der Eckstralen $7'5'$, und die Neigung der Spitzstralen $1'2'$ die Hälfte der Neigung der Eckstralen $5'6'$ ist.

226.

Wenn an den Halbzug drei beliebige Seiten gezogen werden und um das Dreieck der Spitzen ein Kreis beschrieben wird, so liegt die Leitecke des Halbzuges in dem Umfange dieses Kreises.

Es seien 567 drei beliebige Ecken und Seiten des Halbzuges, 123 die Spitzen der Abkreissehnen 67, 75, 56. Die Leitecke sei n , die aus n nach 123567 gehenden Stralen seien $1'2'3'5'6'7'$, so ist (225):

die Neigung der Spitzstrahlen $2'3'$ die Hälfte der Neigung der Eckstrahlen $6'7'$.

Aber (200) die Neigungen der Abkreisseiten 6, 7 gegen die Richt sind die Hälften der Neigungen der Strahlen $6'7'$ gegen die Richt. Also ist die Neigung der Abkreisseiten 6, 7 in der Ecke 1 die Hälfte der Neigung der Eckstrahlen $6'7'$ gegen einander, also gleich der Neigung der Spitzstrahlen $2'3'$ gegen einander.

Folglich liegt die Leitecke n im Umfange des um das Dreieck der Spitzen 123 beschriebenen Kreises.

Wenn man die Leitecke Strahlen nach drei beliebigen Abkreissen und nach drei Spitzen ihrer entsprechenden Abkreisseiten gezogen werden, so ist die Neigung je zweier Spitzstrahlen die Hälfte der Neigung der entsprechenden Eckstrahlen.

Es seien 5, 6, 7 drei beliebige Abkreisseiten und Abkreissen; es seien 1, 2, 3 die Spitzen der Abkreisseiten; es sei n eine der beiden Leitecken; und es seien die von n nach 1, 2, 3 gezogenen Strahlen durch 1, 2, 3 bezeichnet.

Die Neigung der Spitzstrahlen $1'2'$ ergibt sich durch Anlage oder Abzug aus den Neigungen $1'3'$ und $2'3'$. Nach (204) sind diese Neigungen die Hälften der Neigungen der Eckstrahlen $6'7'$ und $5'7'$. Die Neigung der Eckstrahlen $6'7'$ wird aus den Neigungen $1'5'$ und $1'6'$ durch Anlage oder Abzug gebildet. Also ist die Neigung der Spitzstrahlen $1'2'$ die Hälfte der Neigung der Eckstrahlen $6'7'$. Ebenso erhält man, dass die Neigung der Spitzstrahlen $2'3'$ die Hälfte der Neigung der Eckstrahlen $5'6'$ und die Neigung der Spitzstrahlen $1'3'$ die Hälfte der Neigung der Eckstrahlen $5'6'$ ist.

Die Neigungen der beliebigen Leitstrahlen werden daher mittelst der Neigungen der Eckstrahlen der Spitzen 123 ausgedrückt.

Wenn man den Halbkreis mit drei beliebigen Seiten gezogen werden und um das Dreieck der Spitzen ein Kreis beschrieben wird, so liegt die Leitecke des Halbkreises in dem Umfange dieses Kreises. Es seien 5, 6, 7 drei beliebige Ecken und Seiten des Halbkreises; 1, 2, 3 die Spitzen der Abkreisseiten 6, 7, 5. Die Leitecke n ist die eine der beiden Leitecken (200) und seien 1, 2, 3, 4 die Punkte 1, 2, 3, 4.

Anhang.

Maassgleichungen.

Bildhafte Stabrechen sind (24) in zwei Theile zu
theilen. Die ersten (12) sind in der ersten Lage
gebracht worden, wo die Bildhafte Stabrechen
Man bringe die Stäbe also in eine Lage, wo die Bild-
thung bilden und wo die Bildhafte Rechen sind. Man
ziehe alsdann aus (23) Zahlen zum Stabe 1, und (24) Zahlen
zum Stabe 2. Die Zahlen des Stabes (24) in einem
Bildungsstabe 1, welcher (11) in der Reche 1 der Stäbe
(23) liegt. An den Rechen bed ergeben sich (11) folgende
inhaltsgleiche Lechnungen:

1	21	51	=	13	67
2	13	56	=	12	57
3	12	67	=	11	36
4	23	13	=	12	57
5	13	57	=	11	36

42.

Die drei Bildhafte einer Vierer-Rechen.

Die Stäbe 1'2'3'4' werden durch einen halbbogen Stab
W in 1'2'3'4' geschoben. Die Stäbe 2'3'4' und eine son-

Die Neigung der Spalten $23'$ die Hälfte der Nei-
gung der Spalten $12'$.
Die Neigung der Spalten $23'$ gegen die Spalten $12'$ ist
gleich der Neigung der Spalten $12'$ gegen die Spalten
 $23'$ gegen die Spalten $12'$. Also ist die Neigung der Spalten
 $23'$ gegen die Spalten $12'$ die Hälfte der Neigung der
Spalten $12'$ gegen die Spalten $23'$ gegen die Spalten
 $12'$ gegen die Spalten $23'$ gegen die Spalten $12'$.
Folglich liegt die Lücke n im Umfange des aus dem
Dreieck der Spalten 123 beschriebenen Kreises.

Anhang

Messung der Neigung

24*.

Maassgleichungen bildhafter Stabdreiecke.

Die bildhaften Stabdreiecke seien

$$123 \text{ ++ } 567.$$

Bildhafte Stabdreiecke sind (24) in jeder Lage bildhaft. Sie können (29) unter beliebiger Neigung in eine Lage gebracht werden, wo die Bildbänder Zeilen sind. Man bringe die Stäbe also in eine Lage, wo sie eine Lothung bilden und wo die Bildbänder Zeilen sind. Man ziehe alsdann aus 123 Zeilen zum Stabe *B*, aus 567 Zeilen zum Stabe *A*. Die Ecken *bcd* liegen (24) in einem Bildungsstabe *C*, welcher (11) in der Ecke *a* der Stäbe *AB* liegt. An den Ecken *bcd* ergeben sich (11) folgende inhaltsgleiche Lothzeilungen:

$$A \dots 23. 57 = 13. 67,$$

$$B \dots 13. 56 = 12. 57,$$

$$C \dots 12. 67 = 23. 56,$$

$$D \dots \frac{23}{67} = \frac{13}{57} = \frac{12}{56}$$

42*.

Die drei Bildwerthe einer Vierstrahlung.

Die Stralen 1'2'3'4' seien durch einen beliebigen Stab *W* in 1234 geschnitten. Die Stralen 2'3'4' und eine zum

Stabe W gezogene Zeile seien von einer zu $1'$ gezogenen Zeile in $abcd$ geschnitten, so ist:

$abd \vdash 321, acd \vdash 421, bcd \vdash 431$, also (24^*) :

$$\begin{aligned} \frac{ab}{ad} &= \frac{32}{31}, & \frac{ad}{ac} &= \frac{41}{42}, \\ \frac{bc}{cd} &= \frac{43}{31}, & \frac{cd}{ac} &= \frac{21}{42}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Verbindung:

$$\begin{aligned} A \dots & \frac{ab}{ac} = \frac{32.41}{31.42}, \\ B \dots & \frac{bc}{ac} = \frac{43.21}{31.42}, \\ C \dots & \frac{ab}{bc} = \frac{32.41}{43.21}, \end{aligned}$$

$$A + B = 1, \quad A = B. C.$$

Die Bildwerthe A, B, C bleiben unverändert, wenn (43)
1234 durch 2143, 3412, 4321

ersetzt werden.

Die Bildwerthe A, B, C bleiben bei veränderter Lage des Stabes W unverändert.

Alle bildhaften Vierstralungen haben (42) gleiche Bildwerthe.

54*.

Maassgleichungen bildhafter Stabvierecke.

Es sei 1234 $\vdash$ 5678. Die aus 5 nach 1234 gehende Vierstralung sei $1'2'3'4'$. Die aus 1 nach 5678 gehende Vierstralung sei $5'6'7'8'$, so ist (42^*)
an $1'2'3'4'$ und $5'6'7'8'$

$$A = \frac{32.41}{31.42}, \quad B = \frac{43.21}{31.42}, \quad C = \frac{32.41}{43.21},$$

$$A' = \frac{76.85}{75.86}, \quad B' = \frac{87.65}{75.86}, \quad C' = \frac{76.85}{87.65}.$$

Aber (53) $1'2'3'4' \vdash 5'6'7'8'$, also $A = A', B = B', C = C'$. Also

$$A \dots \frac{32. 41}{31. 42} = \frac{76. 85}{75. 86},$$

$$B \dots \frac{43. 21}{31. 42} = \frac{87. 65}{75. 86},$$

$$C \dots \frac{32. 41}{43. 21} = \frac{76. 85}{87. 65}.$$

Wenn eine Ecke ins Unendliche rückt, so sind die nach dieser Ecke genommenen Glieder einander gleich und heben einander also auf. Z. B. es rücke 8 ins Unendliche, so ist:

$$A \dots \frac{32. 41}{31. 42} = \frac{76}{75},$$

$$B \dots \frac{43. 21}{31. 42} = \frac{65}{75},$$

$$C \dots \frac{32. 41}{43. 21} = \frac{76}{65}.$$

Die Maassgleichungen A, B, C bleiben unverändert, wenn (64)

1234 durch 2143, 3412, 4321,

5678 durch 6587, 7856, 8765

ersetzt werden.

67*, 68*.

Bildwerthe der Gleichmessung.

Es sei 12, 34 ein gleichmessendes Stabviereck, so ist 1234 $\parallel \infty bcd$, wo $bc = bd$, und a ins Unendliche gerückt ist.

Also

$$\frac{da}{ca} = 1, \quad \frac{cb}{db} = 1, \quad \frac{ba}{ca} = 1, \quad \frac{dc}{db} = 2,$$

$$\frac{da}{ba} = 1, \quad \frac{cb}{dc} = \frac{1}{2},$$

also (54*)

$$A \dots \frac{32. 41}{31. 42} = 1,$$

$$B \dots \frac{43. 21}{31. 42} = 2,$$

$$C \dots \frac{32. 41}{43. 21} = \frac{1}{2}.$$

130*.

Maassgleichungen der Flächenecken eines Stabfünfecks.

In dem Stabe *W* sei das Fünfeck 12345, die Flächenecken *hkl*, die Spitzen *abc*, die Mittspitze *m*.

Es sind . . 12, 34, *h5* }
 13, 24, *h5* }
 14, 23, *h5* } Flächungen.
 also (126) . . 12, *kl*, *h5* }
 34, *kl*, *h5* }

Es sind 12, *a5*; 34, *b5*; *ab*, *m5* }
 also (126) *kl*, *ab* } Gleichmessungen.
 es seien noch *kl*, *x5*; 12, *xt* }
 34, *xw* }

Da 12, *kl*, *h5* eine Flächung,
 und . . 12, *a5*; *kl*, *x5* }
 12, *xt*; *kl*, *ab* } Gleichmessungen.
 so ist (128) I. *bt*, *h5* }

Da . . . 34, *kl*, *h5* eine Flächung
 und . . . 34, *b5*; *kl*, *x5* }
 34, *xw*; *kl*, *ab* } Gleichmessungen.
 so ist (128) II. *aw*, *h5* }

Da . . 12, *xt*; 12, *a5* }
 34, *xw*; 34, *b5* } Gleichmessungen,
 kl, *ab*; *kl*, *x5* }

so sind (115)

III. 11, *xt*, *a5* }
 IV. 33, *xw*, *b5* } Doppelflächungen.
 V. *kk*, *ab*, *x5* }

Da . . *bt*, *h5*; *ab*, *m5* }
 aw, *h5* } Gleichmessungen,

so ist (68) *bth5* ++ *bam5*; *awh5* ++ *abm5*,
 also *b5th* ++ *b5am*; *a5wh* ++ *a5bm*,

also VI. *ah*, *mt*, *b5* }
 VII. *bh*, *mw*, *a5* } Flächungen.

Hieraus ergeben sich folgende Maassgleichungen:

- I. 2. $bh. t5 = bt. h5$,
 II. 2. $ah. w5 = aw. h5$,
 III. . $at. ax. 15. 15 = a1. a1. x5. t5$,
 IV. . . $bw. bx. 35. 35 = b3. b3. x5. w5$,
 V. . . $kx. kx. a5. b5 = ax. bx. k5. k5$,
 VI. . . $bt. hm. a5 = bh. at. m5$,
 VII. . . $aw. hm. b5 = ah. bw. m5$.

Aus der Verbindung derselben folgt:

$$2. kx. hm. 15. 35. a5. b5 = a1. b3. x5. k5. h5. m5,$$

$$\text{Gleichmessungen} \left\{ \begin{array}{l} kl, x5 \dots kl. x5 = 2. kx. l5, \\ 12, a5 \dots 2. a1. 25 = 12. a5, \\ 34, b5 \dots 2. b3. 45 = 34. b5. \end{array} \right.$$

Die Verbindung dieser vier giebt:

$$4. kl. hm. 15. 25. 35. 45 = 12. 34. h5. k5. l5. m5.$$

$$\text{Es sei also } \frac{h5. k5. l5. m5}{15. 25. 35. 45} = A,$$

so ist:

$$\frac{kl. hm}{12. 34} = \frac{lh. km}{13. 24} = \frac{hk. lm}{14. 23} = \frac{1}{4} A.$$

Ferner sind (130)

$ab, m5$; $cd, m5$; $fg, m5$ Gleichmessungen,
 $cg, ah, m5$ eine Flächung,

also:

$$\begin{array}{l} 2. am. b5 = ab. m5, \\ cd. m5 = 2. cm. d5, \\ fg. m5 = 2. gm. f5, \\ cm. gm. a5. h5 = am. hm. c5. g5. \end{array}$$

Aus der Verbindung dieser vier folgt:

$$cd. fg = 2. ab. hm. \frac{c5. d5. f5. g5}{a5. b5. h5. m5}$$

$$\text{Es sei also } \frac{c5. d5. f5. g5}{a5. b5. h5. m5} = B,$$

so ist $\frac{cd. fg. kl}{ab. 12. 34} = \frac{1}{2}. A. B =$
 $\frac{1}{2}. \frac{c5. d5. f5. g5. k5. l5}{a5. b5. 15. 25. 35. 45}.$

Wenn 5 ins Unendliche rückt, so ist $A=1, B=1.$

145. II*.

Maassgleichung des Schlusszuges für lothhafte Stellenmaasse.

Es sei $ma = ml = mc = a, mc' = b,$

$mn = x, nl' = y, nl = z,$

so ist $\frac{y}{z} = \frac{b}{a}, z^2 + x^2 = a^2,$

also $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$

147. II*.

Maassgleichung des Stralenzuges für lothhafte Stellenmaasse.

Es sei $mh = a, hl = mn = mg = mu = b, mk =$

$ml = p,$ so ist $\frac{mk}{mn} = \frac{ma}{mg} = \frac{md}{ml} = \frac{mn}{mk},$

also $ap = b^2.$

Es sei $mc = x', cl = y', mo = x, ol' = y.$

Da $l'l, uv$ eine Gleichmessung,

so ist oc, un eine Gleichmessung,

also $mcno$ ein Wechselviereck, also $xx' = bb.$

Aber $\frac{ol'}{cl} = \frac{ul'}{ul} = \frac{wl''}{wl} = \frac{mn}{mc} = \frac{mo}{mn},$ also $xy' = by.$

Aber $x'x' + y'y' = pp = \frac{b^2}{a^2} \cdot b^2,$

also $x^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} = b^2 + y^2,$ also $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1.$

148. II*.

Maassgleichung des Halbzuges für lothhafte Stellenmaasse.

Es ist

$$\frac{1'1''}{au} = \frac{11''}{al} = \frac{bn}{an} = \frac{bl. bl}{al. al} = \frac{bl''. bl''}{ab. ab} = \frac{cl'. cl'}{ab. ab}.$$

Setzt man also $1'1'' = bc = x$, $bl'' = cl' = y$
und $\frac{ab. ab}{au} = p$, so ist $y^2 = p. x$.

197*.

Maassgleichung des Halbzuges für schiefe Stellenmaasse.

Es ist $hzu \parallel huw \parallel hof \parallel wdf$,

$$\text{also } \frac{uo. hw}{wf} = hu, \quad \frac{uo^2. hw^2}{wf^2} = hu^2 = hz. hw,$$

$$\text{also } uo^2 = \frac{wf^2}{hw} \cdot hz.$$

Setzt man also $hz = x$, $zg = uo = y$, $\frac{wf^2}{hw} = p$, so
ist $y^2 = p. x$.

219*.

Maassgleichung des Abkreises für schiefe Stellenmaasse.

Es sind mp , mp'' , mh Seiten eines Lothdreiecks, also
 $mp''. mp'' = mh. mh \pm mp. mp$.

$$\text{Auch ist } mp''H \parallel mng, \text{ also } \frac{mn}{mg} = \frac{mp''}{mH}.$$

Setzt man also:

$$mg = a, \quad mh = mH = b, \quad mn = x, \quad mp = y,$$

$$\text{so ist } \frac{x^2}{a^2} = 1 \pm \frac{y^2}{b^2}.$$

Das obere Zeichen gilt für den Stralenzug, das untere für den Schlusszug.

223*.

Maassgleichung des Abkreises für die Leitecke.

Es sei ft die Zeile zu nR , oder $nt = nf$, so ist $gct \parallel gbn$. Aber gG , bn ist eine Gleichmessung, also
 (123) $gbn \parallel mGn$, also $gct \parallel mGn$, also $gt = \frac{mn}{mG} \cdot gc$.

Setzt man also den Leitstral der Abkreisecke $nf = r$, den Abschnitt der Leitecke $gn = d$, den Abschnitt der Abkreisecke $gc = x$, das Ausweichungsverhältniss $\frac{mn}{mG} = e$, so ist:

$$r - d = e \cdot x.$$

Da die Neigungen des Dreiecks n/n' von der Abkreisseite Rr und ihrem Loth fop , sowie von den gesellten Wendestralen nr , nR , $n'r$, $n'R$ gehalten werden, so steht dieser Satz in unmittelbarem Zusammenhange mit den Aufgaben der ebenen Dreieckslehre, aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel, oder aus drei Seiten das Dreieck zu berechnen.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ngr , RGn folgt die Maassgleichung $ng \cdot nG = gr \cdot GR$.

Setzt man also $gG = 2a$, $gr = B$, $GR = C$, $gn = d$, so sind die Leitecken n , n' durch Auflösung der zweiaemigen Gleichung

$$d (2a - d) = B \cdot C$$

gegeben. Diese Auflösung wird durch Beschreibung eines Kreises um den Durchmesser rR bewirkt.

142*.

Ergänzende Sätze zur Kreisberührung.

I.

Jedes Kreispaar hat zwei Aehnlichkeitskreise und einen Flächenkreis.

Das Kreispaar ab werde von dem Mittelstabe in 12, 34 geschnitten. Es sei zu den Gliedern 12, 34 die Flächenecke h ,

zu den Gliedern 13, 24 die Flächenecke k ,
zu den Gliedern 14, 23 die Flächenecke l ,
so heissen:

h die Flächenecke des Kreispaares,
 k, l die Aehnlichkeitsecken des Kreispaares.

Man bestimme (135) die Flächenseiten
von h zu den Gliedern 12 oder 34,
von k zu den Gliedern 13 oder 24,
von l zu den Gliedern 14 oder 23.

Man beschreibe mit diesen Halbmessern
aus h den Flächenkreis des Kreispaares,
aus k, l die Aehnlichkeitskreise des Kreispaares.

II.

Gleichmessungen der drei Ecken.

Man bilde:

$\left. \begin{array}{ll} 12, lo; & 34, lp \\ 12, ko'; & 34, kp' \\ 12, bp''; & 34, ao'' \end{array} \right\} \text{ die Gleichmessungen,}$

so ist:

(127) . . . h die Mitte von op ,
 h die Mitte von $o'p'$,

(128) . . . h die Mitte von $o''p''$.

III.

Maassgleichungen der drei Ecken.

Es seien

von den Gliedern 12, 34, 13, 24, 14, 23
die Mitten a, b, c, d, f, g ,

so ist (114)

$$2ab = \frac{13. 14}{h1} = \frac{23. 24}{h2} = \frac{31. 32}{h3} = \frac{41. 42}{h4},$$

$$2cd = \frac{12. 14}{k1} = \frac{32. 34}{k3} = \frac{21. 23}{k2} = \frac{41. 43}{k4},$$

$$2fg = \frac{12. 13}{l1} = \frac{42. 43}{l4} = \frac{21. 24}{l2} = \frac{31. 34}{l3}.$$

Die Halbmesser der drei Kreise seien H, K, L ,
so ist:

$$H^2 = h1. h2 = h3. h4,$$

$$K^2 = k1. k3 = k2. k4,$$

$$L^2 = l1. l4 = l2. l3,$$

$$4ab^2. H^2 = 13. 14. 23. 24,$$

$$4cd^2. K^2 = 12. 14. 32. 34,$$

$$4fg^2. L^2 = 12. 13. 42. 43.$$

Dieses sind dieselben Ausdrücke, welche aus den drei Seiten eines Dreiecks den Inhalt desselben geben.

Aus (130 *) folgt:

$$2cd. fg. kl = ab. 12. 34,$$

$$2fg. ab. lh = cd. 13. 24,$$

$$2ab. cd. hk = fg. 14. 23.$$

IV.

Die beiden Aehnlichkeitskreise und der Flächenkreis schneiden einander in zwei Gemeinecken lothhaft.

Denn (126) es sind Flächenecken:

h der Glieder 12, 34, *kl*,

k der Glieder 13, 24, *lh*,

l der Glieder 14, 23, *hk*.

Also (135) haben die Kreise *hkl* in der Gemeinecke *n* einen lothhaften Schnitt, so dass

$$hn = H, kn = K, ln = L.$$

Wenn das Kreispaar *ab* eine Gemeinecke hat, so ist sie auch die Gemeinecke *n* der Kreise *hkl*. Dann ist *knl* eine Lothung und *nh* das Loth zum Mittelstabe *ab*.

Wenn das Kreispaar *ab* keine Gemeinecke hat, so ist *hn* das Loth zu einem der beiden Halbmesser *kn* oder *ln*, und der andere das Loth zum Mittelstabe *ab*.

Wenn also von den drei Ecken *hkl* und Halbmessern *HKL* je drei gegeben sind, so sind auch die andern drei gegeben.

V.

Jede Kreismitte bildet mit der Mittmitte und den beiden Aehnlichkeitsecken ein Wechselviereck.

Es sei *m* die Mitte des Gliedes *ab*, also die Mitt-

mitte des Kreispaares ab , so ist (130) m auch die Mitte der Glieder cd , fg .

Aber es sind (126)

$$\left. \begin{array}{l} ab, kl \\ cd, lh \\ fg, hk \end{array} \right\} \text{ Gleichmessungen.}$$

Also sind (123) mka , $mkbl$ Wechselvierecke, so dass

$$\begin{array}{l} mak \quad ++ \quad mla \quad ++ \quad blk, \\ mbk \quad ++ \quad mlb \quad ++ \quad alk, \end{array}$$

woraus folgt:

$$ma. ma = mb. mb = mk. ml,$$

k die Flächenecke der Glieder ab , ml ,

l die Flächenecke der Glieder ab , mk .

VI.

Auf dem Kreispaaire schneidet jeder Stral der Aehnlichkeitsecke zwei wechselnamige Glieder ab , deren Kreise von dem Aehnlichkeitskreise lothhaft geschnitten werden.

Es seien auf dem Kreispaaire ab die Halbmesser $a1'$, $b3'$ Zeilen, so sind auf dem Bande $1'3'$ auch die Halbmesser $a2'$, $b4'$ Zeilen, also auch $11'$, $33'$ Zeilen, $22'$, $44'$ Zeilen. Wenn also dieses Band den Mittelstab in l trifft, so ist

$$\begin{array}{l} lab \quad ++ \quad l1'3', \quad l1'3' \quad ++ \quad l13, \\ lab \quad ++ \quad l2'4', \quad l2'4' \quad ++ \quad l24. \end{array}$$

$$\text{Also } l13 \quad ++ \quad l24, \quad l1'3' \quad ++ \quad l2'4'.$$

Also ist l die Flächenecke der Glieder 14 , 23 und der Glieder $1'4'$, $2'3'$.

Da $11'$, $33'$ Zeilen, $22'$, $44'$ Zeilen und $11'22'$, $33'44'$ Kreisvierecke, so sind auch (90) $11'44'$ und $22'33'$ Kreisvierecke.

Also (134) ist die von l zu den Gliedern 14 oder 23 genommene Flächenseite L der von l zu den Gliedern $1'4'$ oder $2'3'$ genommenen Flächenseite gleich.

Legt man also durch die Glieder $1'4'$, $2'3'$ beliebige Kreise, so sind (135) die von l an diese Kreise gezogenen Seiten einander und der Flächenseite L gleich, welche der Halbmesser des Aehnlichkeitskreises l ist.

Also werden diese Kreise $1'4'$, $2'3'$ von dem Aehnlichkeitskreise l des Kreispaares ab lothhaft geschnitten.

VII.

Die Flächenecke, Aehnlichkeitsecke und Mittmitte eines Kreispaares machen an der Mitte der Gemeinseite Lothungen.

Wenn jeder der beiden Kreise ab ausserhalb des andern liegt, so können an das Kreispaar zwei gemeinsame Berührende qr gelegt werden, deren eine in der Aehnlichkeitsecke k , die andere in der Aehnlichkeitsecke l liegt. Alsdann sind aq , br Lothe zu qr . Wenn also m , s die Mitten von ab , qr sind, so ist auch ms das Loth zu qr . Aber $sq = sr$, also s eine Ecke der Flächenricht. Aber die Flächenecke h liegt in der Flächenricht. Also ist sh das Loth zum Mittelstabe ab . Der aus s mit dem Halbmesser $sq = sr$ beschriebene Kreis wird (VI) von dem Aehnlichkeitskreise k oder l lothhaft geschnitten.

Wenn das Kreispaar ab einander schneidet, so hat es ausser einer gemeinsamen Berührenden eine zweite Gemeinseite qr , welche den Mittelstab ab lothhaft in der Aehnlichkeitsecke l so trifft, dass die Halbmesser aq , br Zeilen sind. Dieses Loth schneide den Kreis b in r , r' .

Es seien yq , yr' Seiten der Kreise ab , und die Ecke $aqbr' = z$, so sind brr' , zqr' , yqr' gleichschenklige Dreiecke, also yz die Zeile zu ab .

Also werden die Glieder rr' , qr' von den Zeilen ab , yz gehalbt.

Also ist das von y auf ab gezogene Loth die Hälfte von qr , also gleich $qs = sr$. Aber die von y an das Kreispaar ab gezogenen Seiten yq , yr' sind gleich. Also ist y eine Ecke der Flächenricht. Also ist yh das Loth zum Mittelstabe ab . Also $yhsq$ eine Zeilung. Also msh eine Lothung.

Wenn die Aehnlichkeitsecke ausserhalb des Gliedes mh liegt, so ist die Gemeinseite qr des Kreispaares eine Berührende. Wenn die Aehnlichkeitsecke innerhalb des Gliedes mh liegt, so ist die Gemeinseite qr das Loth zum Mittelstabe der Kreise.

VIII.

Bei der Berührung zweier Kreispaares liegt die Aehnlichkeitsecke des einen Paares in der Flächenricht des andern Paares.

Das Kreispaar ab werde von dem Kreise M in $2'3'$ berührt. Das Band $2'3'$ schneide auf dem Kreispaares ab das wechselnamige Glied $1'4'$ ab, so sind (132) $a2'$, $b4'$ Zeilen, $a1'$, $b3'$ Zeilen. Also (VI) trifft der Stral $1'2'3'4'$ den Mittelstab ab in einer der Aehnlichkeitsecken l des Kreispaares ab . Es sei die Ecke $a1'b4' = N$, so ist $MNab$ eine Zeilung, $M2' = M3'$, $N1' = N4'$. Also ist N die Mitte eines zweiten Kreises N , welcher das Kreispaar ab in $1'4'$ berührt. Die aus l zu den Gliedern $2'3'$, $1'4'$, 23 , 14 genommenen Flächenseiten sind einander gleich und gleich dem Halbmesser des aus l beschriebenen Aehnlichkeitskreises des Kreispaares ab . Dieser Kreis l ist also der Flächenkreis des Kreispaares MN und schneidet dieses Kreispaar lothhaft. Die Aehnlichkeitsecke l des Kreispaares ab ist also die Flächenecke des Kreispaares MN . Folglich ist das aus l auf den Stab MN gezogene Loth die Flächenricht des Kreispaares MN .

Der Stab MN treffe den Stral $1'2'3'4'$ in L , so ist L eine Aehnlichkeitsecke des Kreispaares MN , und es ist

$$L1'3' \parallel LNM, L4'2' \parallel LNM,$$

$$\text{also } L1'3' \parallel L4'2',$$

also ist L die Flächenecke der Glieder $1'2'$, $3'4'$. Also liegt L in der Flächenricht des Kreispaares ab . Also ist das aus L auf den Mittelstab ab gezogene Loth Lh die Flächenricht des Kreispaares ab . Also ist h die Flächenecke dieses Kreispaares.

IX.

Wenn ein Kreispaar von einem Kreise berührt wird, so wird das Mittelband dieses Kreispaares von einem Stral der Mitte des berührenden Kreises gehalten, welcher in derjenigen Ecke liegt, wo der Berührungsstral die Flächenricht des berührten Kreispaares trifft.

Das Kreispaar ab werde von dem Kreise M in $2'3'$ berührt. Der zweite dem Berührungsstral $1'2'3'4'$ entspre-

chende Berührungskreis sei N , so ist $MNab$ eine Zeilung. Also wird ab von MN in m gehalten. Die Flächenricht des berührten Kreispaares ab treffe den Berührungsstrahl $1'2'3'4'$ in L , so liegt (VIII) L in MN . Also wird ab von ML in m gehalten.

X.

Wenn ein Kreispaar von einem Kreise berührt wird, so trifft jeder Strahl der Berührungsecke den Wendestral und die Flächenricht so, dass die aus diesen Ecken zu den Kreismitten gezogenen Strahlen Zeilen sind.

Das Kreispaar ab werde von dem Kreise M in $2'3'$, also von dem entsprechenden Kreise N in $1'4'$ berührt. Die in den Ecken $1'2'3'4'$ an das Kreispaar ab gezogenen Seiten bilden eine Zeilung $uvwx$, wo $w1' = w4'$, $x2' = x3'$. Also sind w und x Ecken der Flächenricht des Kreispaares ab . Also ist wx die Flächenricht desselben, der Berührungsstrahl $1'2'3'4'$ trifft den Mittelstab ab in der Aehnlichkeitsecke l . Hier ist u die Spitze des Wendestrals $1'2'$, also liegt l in dem Wendestral von u . Also (157) liegt u in dem Wendestral von l gegen den Kreis a . Also ist das von u auf den Mittelstab ab gezogene Loth uo der Wendestral von l gegen den Kreis a . Aus gleichem Grunde ist das von v auf den Mittelstab ab gezogene Loth vp der Wendestral von l gegen den Kreis b . Also sind uo , vp , wx Zeilen. Also wird das Glied op in der Flächenecke h gehalten. Auch liegt uv in l . Also $lop \parallel lab$. Ein beliebiger Strahl der Berührungsecke $2'$ treffe den Wendestral uo und die Flächenricht wx in 56, so sind au , Mx Zeilen, $u5$, $x6$ Zeilen. Also (19) $a5$, $M6$ Zeilen.

168*.

Zweite Auflösung der Kreisberührung.

I.

Der Aehnlichkeitsstab der Kreisdreieung liegt bildhaft gegen dieselbe.

Die Kreisdreieung sei abc . Es seien ABC die Aehn-

lichkeitsecken der Kreispaare bc , ca , ab , so liegen sie (168) in einem Stabe W , welcher der *Aehnlichkeitsstab* dieser Kreisdreieung heisst.

Da C in dem Stabe W liegt, so liegt (157) der Wendestral von C gegen den Kreis a in der Spitze von W gegen den Kreis a , also in der Ecke 1. Also ist das von 1 auf den Stab Ca gezogene Loth ol der Wendestral von C gegen den Kreis a . Es seien 23 die Spitzen von W gegen das Kreispaar bc , so ist das von 2 auf Cb gezogene Loth $p2$ der Wendestral von C gegen den Kreis b . Also ist (142*. X)

$$Cop \parallel Cab.$$

Die Spitzen 123 liegen in den von abc auf W gezogenen Lothen, welche den Stab W in 456 treffen, und es ist

$$Cab \parallel C45.$$

$$\text{Also ist } Cop \parallel C45.$$

Also (27) sind $o4$, $p5$ Zeilen. Aber auch 14, 25 Zeilen und ol , $p2$ Zeilen.

Also (20) liegt das Band 12 in C .

Aus gleichem Grunde liegen 23 in A , 31 in B . Also ist

$$a14 \parallel b25 \parallel c36,$$

d. h. W liegt bildhaft gegen die Kreisdreieung abc .

II.

Bei der Berührung einer Kreisdreieung durch einen Kreis liegt die Berührungsecke in dem Stral, welcher die Flächenmitte mit der Spitze des Aehnlichkeitsstabes verbindet.

Die Kreisdreieung sei abc , ihr Aehnlichkeitsstab sei W . Es sei l die Ecke der Flächenrichten der Kreispaare ca , ab , so sind die aus l an das Kreispaar ca gezogenen Seiten gleich und die aus l an das Kreispaar ab gezogenen Seiten gleich. Also sind die aus l an das Kreispaar bc gezogenen Seiten gleich. Also liegt l auch in der Flächenricht des Kreispaares bc . Also haben die drei Flächenrichten eine gemeinsame Ecke l , welche die *Flächenmitte* der Kreisdreieung abc heisst. Die aus l an die Kreis-

dreieung abc gezogenen Seiten heissen die *Flächenhalbmesser* der Kreisdreieung abc .

Der Kreis M berührt die Kreisdreieung abc , und zwar berührt er den Kreis a in d . Es sei l die Spitze von W gegen den Kreis a . Der Stral dl treffe die Flächenrichten der Kreispaaire ca , ab in l' , l'' . Die Wendestralen der Ecken BC gegen den Kreis a liegen (152) in der Spitze l .

Also (142*. X) sind l' , l'' Zeilen zu al . Also fallen l' , l'' in l zusammen. Also ist l die Zeile zu al . Also ist l lothhaft zu W .

Also liegt die Berührungsecke d in l . Aber l trifft den Kreis a in zwei Ecken d , d' . Also wird die Kreisdreieung abc von einem Kreispaar MN berührt, dessen Berührungsecken dd' an dem Kreise a in dem Stral l liegen.

Die Halbmesser ad , ad' treffen das aus l auf W gezogene Loth lh in den Kreismitten MN .

Aus gleichem Grunde liegen die Berührungsecken des Kreispaares MN an dem Kreise b in dem Stral l_2 und die Berührungsecken an dem Kreise c in dem Stral l_3 .

III.

Die Flächenmitte der Kreisdreieung ist die Aehnlichkeitsecke des berührenden Kreispaares. Der Aehnlichkeitsstab der Kreisdreieung ist die Flächenricht des berührenden Kreispaares.

Aus (142*. VIII) folgt:

Die Aehnlichkeitsecke des Kreispaares MN liegt in den Flächenrichten der Kreispaaire bc , ca , ab . Also liegt sie in ihrer Gemeinecke l , welche die Flächenmitte der Kreisdreieung abc ist.

Aus (142*. VIII) folgt ferner:

Die Flächenricht des Kreispaares MN liegt in den Aehnlichkeitsecken ABC der Kreispaaire bc , ca , ab . Also ist der Stab W die Flächenricht des Kreispaares MN .

Wenn also aus l auf W das Loth lh gezogen wird, welches W in h trifft, so ist h die Flächenecke des Kreispaares MN .

IV.

Der Flächenkreis der Kreisdreieung ist der Aehnlichkeitskreis des berührenden Kreispaares.

Der Flächenhalbmesser der Kreisdreieung abc ist die Flächenseite der Ecke l zum Gliede dd' des Kreises a . Aber dd' ist auch ein wechselnamiges Glied des Kreispaares MN . Also (142*. VII) ist diese Flächenseite auch der Halbmesser des Aehnlichkeitskreises des Kreispaares MN .

Wenn also der Kreis l den Stab W in n schneidet, so ist (142*. IV) n eine Gemeinecke des Kreispaares MN , und die Lothung lnk giebt die zweite Aehnlichkeitsecke k des Kreispaares MN .

Wenn der Kreis l den Stab W nicht schneidet, so hat auch das Kreispaar MN keine Gemeinecke. Alsdann giebt die aus h an den Kreis t gezogene Seite die Ecke n , das aus n auf lh gezogene Loth nk giebt die zweite Aehnlichkeitsecke k des Kreispaares MN .

V.

Der Aehnlichkeitsstab der Kreisdreieung ist gegen einen aus der Mittmitte des berührenden Kreispaares beschriebenen Kreis bildhaft.

Der Stral $l1$ treffe den Stab W in 7. Der Stab W ist die Flächenricht des Kreispaares MN , und der Kreis a berührt das Kreispaar MN in dem Stral $l1$ oder $l7$. Wenn also der Stral $a7$ den Mittelstab MN in m trifft, so (142*. IX) ist m die Mitte des Gliedes MN oder die Mittmitte des Kreispaares MN .

Da ma , $l1$, $h4$ Stralen von 7 sind, so ist

$$mlh \text{ ++ } a14.$$

Desgleichen, wenn die Stralen $l2$, $l3$ den Stab W in 8, 9 treffen, so wird das Glied MN von den Stralen $b8$, $c9$ ebenfalls in m gehalbt. Also ist

$$mlh \text{ ++ } a14 \text{ ++ } b25 \text{ ++ } c36.$$

Erster Fall.

Der Stab W schneide die Kreisdreieung abc nicht.

Es sei dann $f1$ die Zeile zu W , so ist $f4$ eine Seite

des Kreises a . Das Kreispaar MN wird von den Stralen fd , fd' in qr getroffen. Wegen der gleichschenkligen Dreiecke adf , Mdq und $ad'f$, $Nd'r$ sind af , Mq , Nr Zeilen.

Also (19) sind lq , lr Zeilen zu $f1$, also zu W . Also ist qr lothhaft zum Mittelstabe MN . Also (142*. VII) ist qr die Gemeinseite des Kreispaares MN . Aber die Glieder

dd' , 71 bilden eine Gleichmessung.

Also wird qr von dem Stral $f7$ in 5 gehalbt. Aber es ist auch m die Mitte von MN . Also ist ms die Zeile zu Mq , Nr , af . Aber auch

$mlh \div a14$.

Also ist hs die Zeile zu $f4$.

Also hat der Stab W zu dem aus m mit dem Halbmesser $ms = m$ beschriebenen Kreise eine Lage, welche der gegen die Kreise abc bildhaft ist.

Zweiter Fall.

Der Stab W schneide die Kreisdreieung abc .

Es schneide dann W den Kreis a in f , so ist $f1$ die Seite des Kreises a . Das Kreispaar MN wird von den Stralen fd , fd' in qr getroffen. Wegen der gleichschenkligen Dreiecke adf , Mdq und $ad'f$, $Nd'r$ sind af , Mq , Nr Zeilen, also (19) lq , lr Zeilen zu $f1$. Also (142*. VII) ist qr die Gemeinseite des Kreispaares MN .

Aber die Glieder

dd' , 71 eine Gleichmessung.

Also wird qr von dem Stral $f1$ oder W in s gehalbt. Aber es ist auch m die Mitte von MN . Also ist ms die Zeile zu Mq , Nr , af . Aber auch

$mlh \div a14$.

Also sind ls , $f1$ Zeilen. Also ist ls die Seite eines aus m mit dem Halbmesser $ms = m$ beschriebenen Kreises. Also hat W zu diesem Kreise eine Lage, welche der gegen die Kreisdreieung abc bildhaft ist.

VI.

Maassgleichungen für die Kreisberührung.

Die gegebenen Kreismitten seien abc , die Seiten des Dreiecks abc seien bezeichnet:

$$bc = g, \quad ca = g', \quad ab = g''.$$

Es sei die Dreiecksfläche bezeichnet:

$$abc = x,$$

so ist

$$1) \quad 16x^2 = 2 (g^2 g'^2 + g'^2 g''^2 + g''^2 g^2) - (g^4 + g'^4 + g''^4).$$

Die Halbmesser der Kreise abc seien bezeichnet mit

$$r, \quad r', \quad r''.$$

Man nehme den Fall an, wo der Stab W die Kreis-
dreieckung weder berührt noch schneidet.

Die Gemeinseiten der Kreispaaire bc, ca, ab seien bezeichnet mit

$$t, \quad t', \quad t'',$$

so ist

$$2) \quad \begin{cases} t^2 = g^2 - (r' - r'')^2, \\ t'^2 = g'^2 - (r'' - r)^2, \\ t''^2 = g''^2 - (r - r')^2. \end{cases}$$

Man beschreibe um die Mitten abc mit den Halbmessern r, r', r'', m Kugeln, so werden sie (V) von einer durch W gehenden Ebene in den Ecken $a'b'c's'$ berührt. Die Seiten des Dreiecks $a'b'c'$ sind bezeichnet:

$$b'c' = t, \quad c'a' = t', \quad a'b' = t''.$$

Die Ecke s' ist die Mitte des dem Dreieck $a'b'c'$ umschriebenen Kreises. Der Halbmesser sei bezeichnet mit R , so ist

$$s'a' = s'b' = s'c' = R.$$

Die Flächen seien bezeichnet

$$b's'c' = p, \quad c's'a' = p', \quad a's'b' = p'', \\ a'b'c' = y,$$

so ist

$$3) \quad \begin{cases} 16y \cdot p = t^2 (t'^2 + t''^2 - t^2), \\ 16y \cdot p' = t'^2 (t''^2 + t^2 - t'^2), \\ 16y \cdot p'' = t''^2 (t^2 + t'^2 - t''^2), \\ y = p + p' + p'', \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 16y^2 = 16y \cdot p + 16y \cdot p' + 16y \cdot p'', \\ 16y^2 = 2 (t^2 t'^2 + t'^2 t''^2 + t''^2 t^2), \\ \quad \quad \quad (t^4 + t'^4 + t''^4), \end{cases}$$

$$5) R = \frac{t \cdot t' \cdot t''}{4y}.$$

Man lege durch W eine zur Ebene des Dreiecks $a'b'c'$ lothhafte Ebene und ziehe auf dieselbe aus abc Lothe, welche diese Ebene in $a''b''c''$ treffen, so sind die Abstände dieser Ecken von W den Halbmessern r, r', r'' gleich. Die Dreiecksfläche sei bezeichnet

$$a''b''c'' = z,$$

o ist z gegeben durch die Gleichung

$$6) x^2 = y^2 + z^2$$

oder durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} 4z^2 &= y^2 (r - r') (r - r'') + g'^2 (r' - r'') (r' - r) \\ &\quad + g''^2 (r'' - r) (r'' - r'), \\ 4z^2 &= t^2 (r - r') (r - r'') + t'^2 (r' - r'') (r' - r) \\ &\quad + t''^2 (r'' - r) (r'' - r'). \end{aligned}$$

Die auf die Ebene $a'b'c'$ in den Ecken $a'b'c's'$ gezogenen Lothe treffen die Ebene abc in den Ecken $abcm$, und sind den Halbmessern $rr'r''m$ gleich.

Der Stral am treffe bc in der Ecke w , der Stral $a's'$ treffe $b'c'$ in der Ecke w' .

Das Band $ww' = w$ ist die Zeile zu $rr'r''m$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{r' - w}{w - r'} = \frac{p''}{p'}, \quad \frac{r - m}{m - w} = \frac{p' + p''}{p},$$

woraus folgt:

$$m = \frac{p \cdot r + p' \cdot r' + p'' \cdot r''}{p + p' + p''}.$$

Dieser Ausdruck ist nicht auf die lothhafte Lage gegen die Ebene $a'b'c'$ beschränkt, sondern setzt nur voraus, dass $rr'r''mw$ Zeilen sind, welche also auch mit den Dreiecken $abc, a'b'c'$ in einer Ebene liegen können. Er giebt folgenden bemerkenswerthen Satz:

Wenn bei zwei beliebig geneigten oder auch zusammenfallenden ebenen Vierecken $abcm$, $a'b'c's'$ die Endkanten aa' , bb' , cc' , ms' Zeilen sind, also einen Schaft bilden, so ist die Bindung eines Dreiecks mit der Zeile der vierten Ecke gleich der Anlage der Bindungen der drei übrigen Dreiecke mit den Zeilen ihrer Gegenecken.

Dieser Satz löset die Berechnung der wesentlichen Stücke der Kreisberührung. Denn es sei bezeichnet:

7) $16y \cdot p \cdot r + 16y \cdot p' \cdot r' + 16y \cdot p'' \cdot r'' = D$,
so ist

8) $m = \frac{D}{16y^2}$.

Das aus s' auf die Ebene abc gezogene Loth trifft diese Ebene in der Flächenmitte l . Es sei die aus der Flächenmitte l an die Kreisdreieung abc gezogene Seite oder der Halbmesser des Flächenkreises derselben $= L$, und das Loth $s'l = sl = s$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} L^2 &= ld, \quad ld' = lq \cdot lr, \\ lr &= sr + sl, \quad lq = sq - sl, \quad sq = sr, \\ \text{also } L^2 &= sq^2 - sl^2. \\ \text{Aber } L^2 &= R^2 - sl^2, \\ \text{also } sq &= sr = R. \end{aligned}$$

Also ist die Gemeinseite qr des berührenden Kreispaares MN dem Durchmesser des um das Dreieck $a'b'c'$ beschriebenen Kreises gleich.

Man hat also für die Halbmesser des berührenden Kreispaares MN die Werthe:

9)
$$\begin{cases} M = m - R \cdot \frac{x}{y}, \\ N = m + R \cdot \frac{x}{y}, \end{cases}$$

und für die Abstände der Kreismitten MN von dem Stabe W :

10)
$$\begin{cases} M' = m \cdot \frac{x}{z} - R \cdot \frac{z}{y}, \\ N' = m \cdot \frac{x}{z} + R \cdot \frac{z}{y}. \end{cases}$$

Durch die vorstehenden Ausdrücke 1) bis 10) werden die wesentlichen Stücke der Kreisberührung berechnet. Zur Prüfung und weitem Entwicklung dient folgendes.

An dem Dreieck $a''b''c''$ ist

$$\frac{Ba''}{c''a''} = \frac{r}{r-r''}, \quad \frac{Ca''}{a''b''} = \frac{r}{r-r'},$$

$$\frac{BC \cdot r}{2z} = \frac{Ba'' \cdot Ca''}{c''a'' \cdot a''b''} = \frac{r \cdot r}{(r-r') (r-r'')}.$$

Hieraus ergeben sich die gegenseitigen Abstände der Aehnlichkeitsecken ABC auf dem Stabe W :

$$11) \quad \begin{cases} BC = 2z \cdot \frac{r}{(r-r') (r-r'')} \\ CA = 2z \cdot \frac{r'}{(r-r') (r'-r'')} \\ AB = 2z \cdot \frac{r''}{(r-r'') (r'-r'')} \end{cases}$$

Der Abstand der Flächenmitte l von dem Aehnlichkeitsstabe W sei durch h bezeichnet, so ist

$$12) \quad h = m \cdot \frac{y^2}{xz} = \frac{D}{4x \cdot 4z}.$$

Der Abstand der Mitte der Gemeinseite qr von der Flächenmitte ist

$$13) \quad s = m \cdot \frac{y}{x} = \frac{D}{4x \cdot 4y}.$$

Man beschreibe aus der Mitte s' des Dreiecks $a'b'c'$ mit dem Halbmesser R eine Kugel. Wenn das Kreispaar MN den Stab W weder berührt noch schneidet, so wird diese Kugel von einer durch W gehenden Ebene in n' berührt. Die aus der Ecke h an diese Kugel gezogene Seite sei bezeichnet

$$hn' = T.$$

Die aus ABC an diese Kugel gezogenen Seiten An' , Bn' , Cn' sind den aus ABC an den Kreis s' gezogenen

Seiten, also den Flächenseiten der Ecken ABC gegen die Glieder $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ gleich.

Man hat also :

$$14) \begin{cases} An'^2 = t^2 \cdot \frac{r'r''}{(r'-r'')^2}, \\ Bn'^2 = t'^2 \cdot \frac{r''r}{(r''-r)^2}, \\ Cn'^2 = t''^2 \cdot \frac{r \cdot r'}{(r-r')^2}, \end{cases}$$

woraus folgt

$$\frac{AB^2 \cdot T^2}{An'^2 \cdot Bn'^2} = \frac{4z^2 \cdot T^2}{t^2 \cdot t'^2 \cdot r \cdot r'}.$$

Man setze also :

$$15) \begin{cases} t^2 \cdot r = u^2, \\ t'^2 \cdot r' = u'^2, \\ t''^2 \cdot r'' = u''^2, \end{cases} \quad \frac{uu'u''}{2zT} = E,$$

so ist

$$\begin{cases} \frac{AB \cdot T}{An' \cdot Bn'} = \frac{u''}{E}, \\ \frac{BC \cdot T}{Bn' \cdot Cn'} = \frac{u}{E}, \\ \frac{CA \cdot T}{Cn' \cdot An'} = \frac{u'}{E}. \end{cases}$$

Hier sind $uu'u''$ die Seiten eines Dreiecks, dessen Durchmesser $= E$ und Inhalt $= \Delta$, so dass

$$16) 16 \Delta^2 = 2 (u^2 u'^2 + u'^2 u''^2 + u''^2 u^2) - (u^4 + u'^4 + u''^4),$$

$$17) E = \frac{u \cdot u' \cdot u''}{2 \Delta}.$$

Also ist

$$18) T = \frac{\Delta}{Z}.$$

Hieraus ergibt sich folgender bemerkenswerther Satz:

„Es seien drei Kugeln abc von einer Ebene berührt, welche die Mittelebene in einer Kante W schneidet. Aus der Mitte s' des Berührungsdreiecks sei eine Kugel s' durch das Berührungsdreieck beschrieben. Durch die Kante W sei an diese Kugel s' eine berührende Ebene gelegt. Aus der Berührungsecke n' seien Stralen nach den Aehnlichkeitsecken der Kugeln abc , welche in W liegen, gezogen.“

„Die Neigungen dieser Stralen gegen einander sind den Neigungen eines Dreiecks gleich, in welchem jede Seite die Bindung des Zweinamigen der Berührungsseite zweier Kugeln mit dem Halbmesser der dritten Kugel ist.“

Die aus der Ecke h an diese Kugel s' gezogene Seite $hn' = T$ ist der aus h an das Kreispaar MN gezogenen Flächenseite hn gleich. Man hat also die Gleichungen:

$$19) L^2 = R^2 - s^2,$$

$$20) L^2 = h^2 - T^2,$$

hieraus

$$16z^2. L^2 = 16z^2. h^2 - 16 \Delta^2,$$

$$\text{aber } z'. h = y. s,$$

$$\text{also } 16z^2. L^2 = 16y^2. s^2 - 16 \Delta^2,$$

$$\text{aber } 16y^2. L^2 = 16y^2. R^2 - 16y^2. s^2,$$

$$\text{also } 16x^2. L^2 = 16y^2. R^2 - 16 \Delta^2,$$

$$\text{oder } 16x^2. L^2 = t^2. t'^2. t''^2 - 16 \Delta^2.$$

Setzt man also:

$$21) t^2. t'^2. t''^2 - 16 \Delta^2 = P^2,$$

$$\text{so ist } 22) L^2 = \frac{P^2}{16x^2}.$$

Dieses ist der einfachste Ausdruck für den Flächenhalbmesser L der Kreisdreieung abc . Berechnet man denselben aus 22), so muss er für die vier Aehnlichkeitsstäbe

einerlei Werth haben. Dieses giebt eine erste Rechnungsprüfung. Eine zweite Prüfung ergibt sich aus 19) und 20) für die aus 5), 12), 13), 18) gefundenen Werthe von R, h, s, T .

Wenn der aus 22) gefundene Werth von L^2 gegen-
theilig wird, so zeigt dieses an, dass die Flächenmitte l
der Kreisdreieung abc innerhalb derselben liegt. Man er-
hält also auch aus 22) den einfachsten Ausdruck für die
Höhe H eines Keils, dessen Grundkanten $gg'g''$, Endkan-
ten $rr'r''$ sind.

Man findet leicht:

$$16x^2 \cdot H^2 = 4r^2 r'^2 r''^2 + (r^2 + r'^2 - g'^2)(r'^2 + r''^2 - g^2)(r''^2 + r^2 - g'^2) - r^2(r'^2 + r''^2 - g^2)^2 - r'^2(r''^2 + r^2 - g'^2)^2 - r''^2(r^2 + r'^2 - g'^2)^2.$$

Man setze hier

$$\begin{aligned} g^2 - (r' - r'')^2 &= t^2, & t^2 \cdot r &= u^2, \\ g'^2 - (r'' - r)^2 &= t'^2, & t'^2 \cdot r' &= u'^2, \\ g''^2 - (r - r')^2 &= t''^2, & t''^2 \cdot r'' &= u''^2, \\ 2(u^2 u'^2 + u'^2 u''^2 + u''^2 u^2) - (u^4 + u'^4 + u''^4) &= 16\Delta^2, \\ 16\Delta^2 - t^2 \cdot t'^2 \cdot t''^2 &= K^2, \end{aligned}$$

so ist $4x \cdot H = K$,

wo H die Höhe, $\frac{1}{12}K$ der Inhalt des Keils ist.

Die Lage der Ecke h auf dem Stabe W ergibt sich
aus der Gleichung

$$2AB \cdot Ah = AB^2 + An'^2 - Bn'^2.$$

Durch Einsatz der Werthe aus 11) und 14) findet man:

$$23) \left\{ \begin{aligned} 4z. Ah &= t^2 \cdot \frac{rr' + rr'' - 2r'r''}{r' - r''} - t'^2 r' + t''^2 r'', \\ 4z. Bh &= t'^2 \cdot \frac{r'r'' + r'r - 2rr''}{r'' - r} - t''^2 r'' + t^2 r, \\ 4z. Ch &= t''^2 \cdot \frac{r''r + r''r' - 2rr'}{r' - r} + t^2 r - t'^2 r'. \end{aligned} \right.$$

Rechnungsbeispiel.

Erster Aehnlichkeitsstab.

g	r	t^2	$16yp$	$16ypr$	u^2	
12	4	143	9295	37180	572	144144
11	2	112	14224	28448	224	99456
10	1	96	15264	15264	96	67200
			<u>38783</u>	<u>80892</u>		<u>22512</u>

$16x^2$	42471	L^2	35,6720	AB	10,1214
$16y^2$	38783	R^2	39,6446	BC	20,2429
$16z^2$	3688	s^2	3,9726	CA	30,3644
$16\Delta^2$	22512	h^2	41,7761	Ah	16,7301
$t^2t'^2t''^2$	1537536	T^2	6,1041	Bh	6,6086
P^2	1515024	R	6,2964	Ch	13,6343
D	80892				

$$m \quad 2,0857 \quad m. \frac{x}{z} \quad 7,0780$$

$$R. \frac{x}{y} \quad 6,5889 \quad R. \frac{z}{y} \quad 1,9416$$

$$M \quad 4,5032 \quad M' \quad 5,1364$$

$$N \quad 8,6747 \quad N' \quad 9,0197$$

Zweiter Aehnlichkeitsstab.

g	r	t^2	$16yp$	$16ypr$	u^2	
12	4	135	7695	30780	540	239760
11	2	96	12960	25920	192	48384
10	1	96	12960	12960	96	79488
			33615	43740		270864
$16x^2$	42471	L^2	35,6720	AB	3,1368	
$16y^2$	33615	R^2	37,0120	BC	18,8212	
$16z^2$	8856	s^2	1,3401	CA	15,6843	
$16\Delta^2$	270864	h^2	5,0866	Ah	0,7651	
$t^2t'^2t''^2$	1244160	T^2	30,5853	Bh	3,9019	
P^2	1515024	R	6,0837	Ch	14,9193	
D	43740					
m	1,3012	$m.$	$\frac{x}{z}$	2,8495		
$R.$	$\frac{x}{y}$	6,8383	$R.$	$\frac{z}{y}$	3,1226	
M	5,5371	M'	0,2731			
N	8,1395	N'	5,9722			

Dritter Aehnlichkeitsstab.

g	r	t^2	$16yp$	$16ypr$	u^2	
12	4	135	5535	22140	540	378000
11	2	112	9744	19488	224	185472
10	1	64	11712	11712	64	16128
			<u>26991</u>	<u>14364</u>		<u>547344</u>

$16x^2$	42471	L^2	35,6720	AB	6,9121
$16y^2$	26991	R^2	35,8520	BC	13,8243
$16z^2$	15480	s^2	0,1800	CA	6,9121
$16\Delta^2$	547344	h^2	0,3138	Ah	2,3147
$t^2t'^2t''^2$	967680	T^2	35,3581	Bh	9,2269
P^2	1515024	R	5,9875	Ch	4,5974
D	14364				
m	0,5322	$m \cdot \frac{x}{z}$	0,8815		
$R \cdot \frac{x}{y}$	7,5109	$R \cdot \frac{z}{y}$	4,5345		
M	6,9787	M'	3,6530		
N	8,0431	N'	5,4160		

Vierter Aehnlichkeitsstab.

g	r	t^2	$16yp$	$16ypr$	u^2	
12	4	143	2431	9724	572	473616
11	2	96	10656	21312	192	134400
10	1	64	11200	11200	64	28416
			24287	22788		636432
$16x^2$	42471	L^2	35,6720	AB	13,4848	
$16y^2$	24287	R^2	36,1754	BC	8,9898	
$16z^2$	18184	s^2	0,5034	CA	22,4746	
$16\Delta^2$	636432	h^2	0,6724	Ah	17,9164	
$t^2t'^2t''^2$	878592	T^2	34,9996	Bh	4,4316	
P^2	1515024	R	6,0146	Ch	4,5582	
D	22788					
m	0,9383	$m \cdot \frac{x}{z}$	1,4339			
$R \cdot \frac{x}{y}$	7,9536	$R \cdot \frac{z}{y}$	5,2043			
M	7,0153	M'	3,7703			
N	8,8919	N'	6,6382			

Handwritten title or header, possibly "Handwritten Title" or "Handwritten Title".

Handwritten text, possibly a date or location, such as "1840" or "Leipzig".

1840	1841	1842	1843	1844	1845	1846
1847	1848	1849	1850	1851	1852	1853
1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860
1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867
1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874
1875	1876	1877	1878	1879	1880	1881
1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888
1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895
1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902
1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909
1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916
1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930
1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944
1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951
1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

1840	1841	1842	1843	1844	1845	1846
1847	1848	1849	1850	1851	1852	1853
1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860
1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867
1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874
1875	1876	1877	1878	1879	1880	1881
1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888
1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895
1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902
1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909
1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916
1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930
1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944
1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951
1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000

D r u c k f e h l e r.

Seite	29	Zeile	18	von oben	fehlt „in“ vor <i>flmn</i>
-	31	-	7	-	lies <i>u</i> statt <i>w</i>
-	32	-	13	-	lies <i>u2v6</i> statt <i>u2u6</i>
-	33	-	17	-	unten lies 6785 statt 6758
-	37	-	3	-	lies Stabvierecken statt Stabdreiecken
-	46	-	16	-	oben lies <i>Sb1</i> ++ <i>Tf1</i> ++ <i>T5a</i> statt <i>Sb1</i> ++ <i>T51</i> ++ <i>Tfa</i>
-	—	-	4	-	unten lies <i>d'f'k'n'</i> statt <i>d'f'k'n</i>
-	49	-	18	-	oben lies 16 statt 1 <i>b</i>
-	54	-	6	-	lies <i>v'3'1'</i> statt <i>v3'1'</i>
-	—	-	24	-	lies 1234 statt 1234'
-	57	-	10	-	lies <i>aba'b'</i> statt <i>aba'b</i>
-	62	-	9	-	unten lies Seiten statt Seite
-	63	-	12	-	lies <i>kl</i> statt <i>kl</i>
-	67	-	3	-	oben lies 14 <i>f'b'</i> statt 14 <i>f'h'</i>
-	69	-	11	-	lies <i>OC</i> statt <i>OE</i>
-	75	-	7	-	unten lies <i>w</i> statt <i>v</i>
-	—	-	6	-	lies <i>v</i> statt <i>w</i>
-	76	-	2	-	oben lies <i>u</i> statt <i>n</i>
-	78	-	7	-	unten lies 3'3 statt 3'3'
-	80	-	8	-	lies 1'2'3'4' statt 1'2'3'4
-	82	-	11	-	lies 1'4''3'2'' statt 1'4''3'3''
-	89	-	21	-	oben lies 3721 statt 3712
-	91	-	4	-	lies <i>S''5</i> statt <i>S'''5</i>
-	94	-	7	-	unten lies 1234 statt 1224
-	102	-	4	-	lies <i>n</i> statt 12
-	104	-	15	-	oben lies <i>S''2</i> statt <i>S''</i>
-	—	-	20	-	lies <i>S''14</i> statt <i>S'14</i>
-	105	-	19	-	unten lies <i>S28</i> ++ <i>T86</i> statt <i>S28</i> ++ <i>T85</i> .

D r u c k f e h l e r .

Seite 59	Nelle 18 von oben fehlt „in“ vor „Vina“	19
31	lies „w. statt w.“	7
32	lies „w. statt w.“	13
33	unten lies 6785 statt 6782	17
37	lies „Stadterischen statt Stadterischen“	3
40	oben lies 241 + 271 + 270 statt 241 + 271 + 270	10
—	unten lies 774 statt 774	4
40	oben lies 10 statt 10	18
54	lies „w. statt w.“	6
—	lies 134 statt 134	23
57	lies „w. statt w.“	10
62	unten lies 101 statt 101	9
63	lies 101 statt 101	13
67	oben lies 147 statt 147	3
69	lies 101 statt 101	11
72	unten lies w. statt w.	7
—	lies w. statt w.	6
76	oben lies w. statt w.	2
78	unten lies 373 statt 373	7
80	lies 1734 statt 1734	8
82	lies 1734 statt 1734	11
89	oben lies 373 statt 373	31
91	lies 273 statt 273	4
94	unten lies 1734 statt 1734	7
102	lies w. statt w.	4
104	oben lies 273 statt 273	15
—	lies 273 statt 273	30
105	unten lies 273 + 273 statt 273 + 273	19

Nach dem Satze: „Die Neigungen u. s. w.“ ist ein-
 auschoben:

Da nämlich W die Flächenecke des Kreispaars WV
 ist, so sind die aus irgend einer Ecke von W an diese
 Kreise gezogenen Seiten einander gleich. Der mit dieser
 Seite aus irgend einer Ecke beschriebene Kreis schneidet
 den Kreis W in einem Punkte, so dass

Spätere Zusätze zur Bildlehre.

Zu §. 127. Seite 113.

Da 51, h2, o4 und 52, h1, o'4 Flächungen, so sind

$$\begin{array}{lcl}
 5124 \parallel 51oh \text{ und } 5214 \parallel 52o'h, \\
 \text{also } \dots\dots\dots 51oh \parallel 5o'2h, \\
 \text{also } \dots\dots\dots 12, oo', h5 \\
 \text{ebenso } \dots\dots\dots 12, pp', h5 \\
 \qquad\qquad\qquad 34, oo', h5 \\
 \qquad\qquad\qquad 34, pp', h5 \\
 \qquad\qquad\qquad oo', pp', h5 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 12, oo', h5 \\ 12, pp', h5 \\ 34, oo', h5 \\ 34, pp', h5 \\ oo', pp', h5 \end{array}} \right\} \text{Flächungen.}
 \end{array}$$

Zu §. 130. Sonderfall. Seite 121.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Es seien } \infty l, 12, ao \\
 \qquad\qquad \infty l, 34, bp \\
 \qquad\qquad \infty k, 12, ao' \\
 \qquad\qquad \infty k, 34, bp' \\
 \qquad\qquad \infty a, fg, mn \\
 \qquad\qquad \infty a, cd, mn' \left. \vphantom{\begin{array}{l} \infty l, 12, ao \\ \infty l, 34, bp \\ \infty k, 12, ao' \\ \infty k, 34, bp' \\ \infty a, fg, mn \\ \infty a, cd, mn' \end{array}} \right\} \text{einfache Flächungen,}
 \end{array}$$

so ist h die Mitte von op und o'p', es ist $ho = hp = an$,
 $ho' = hp' = an'$, und es ist h die Flächenecke der Glieder:
 12, oo'; 34, oo'; 12, pp'; 34, pp'; oo', pp'.

Zu §. 142*. III. Seite 246.

Aus 130. Sonderfall folgt:

$$H^2 = ho \cdot ho' = hp \cdot hp' = an \cdot an'$$

$$am \cdot an = af \cdot ag \qquad am \cdot an' = ac \cdot ad.$$

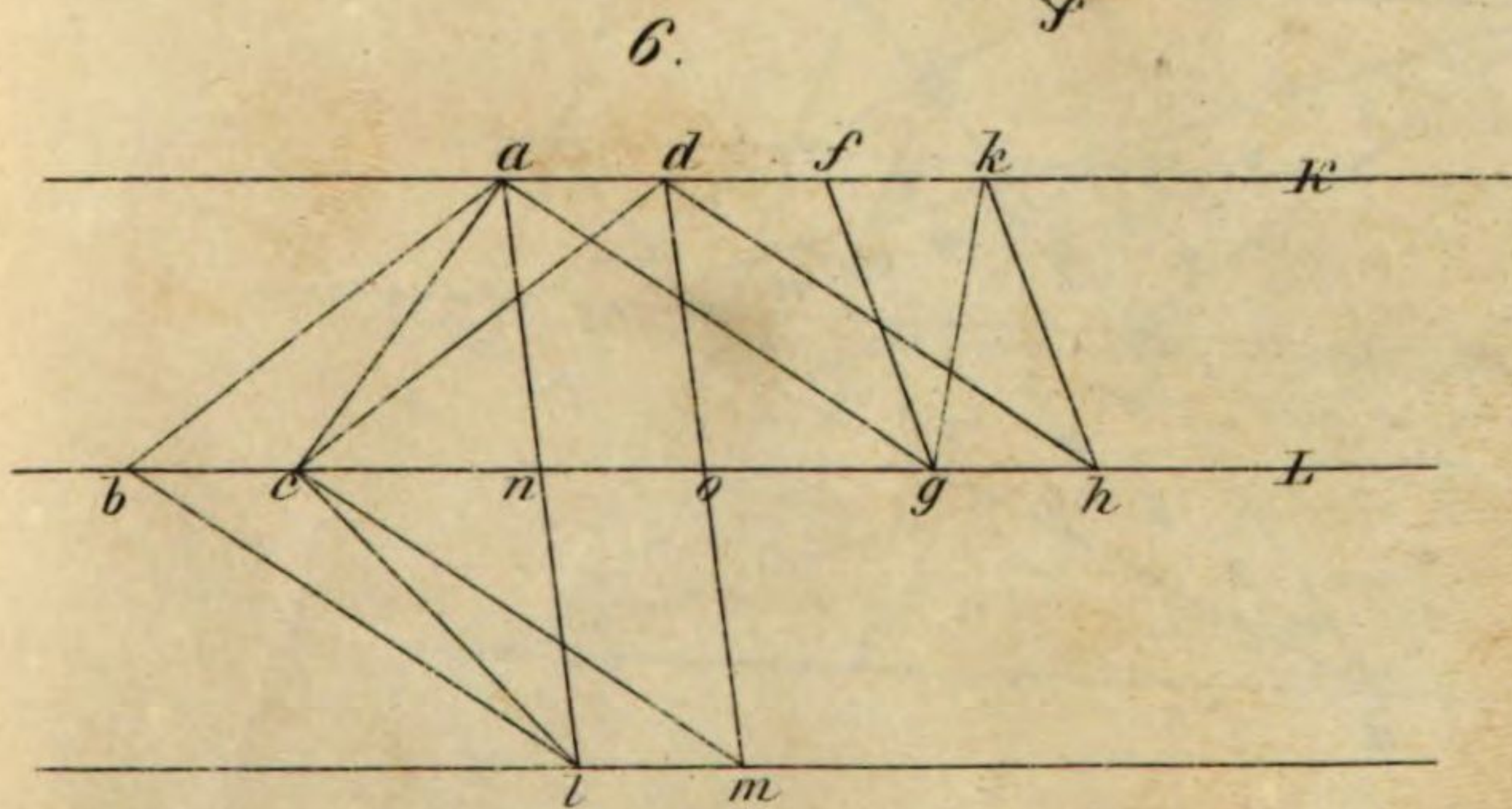
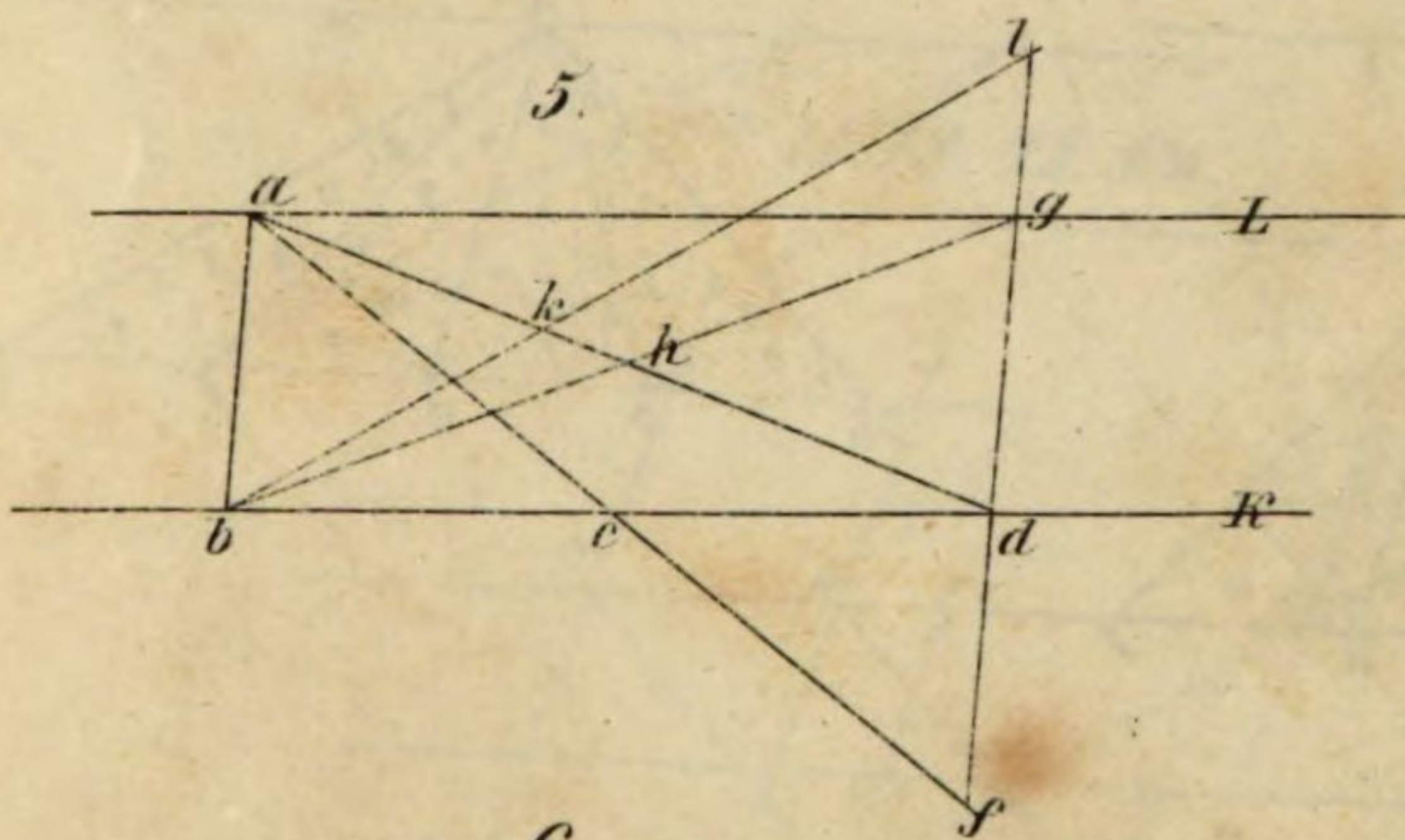
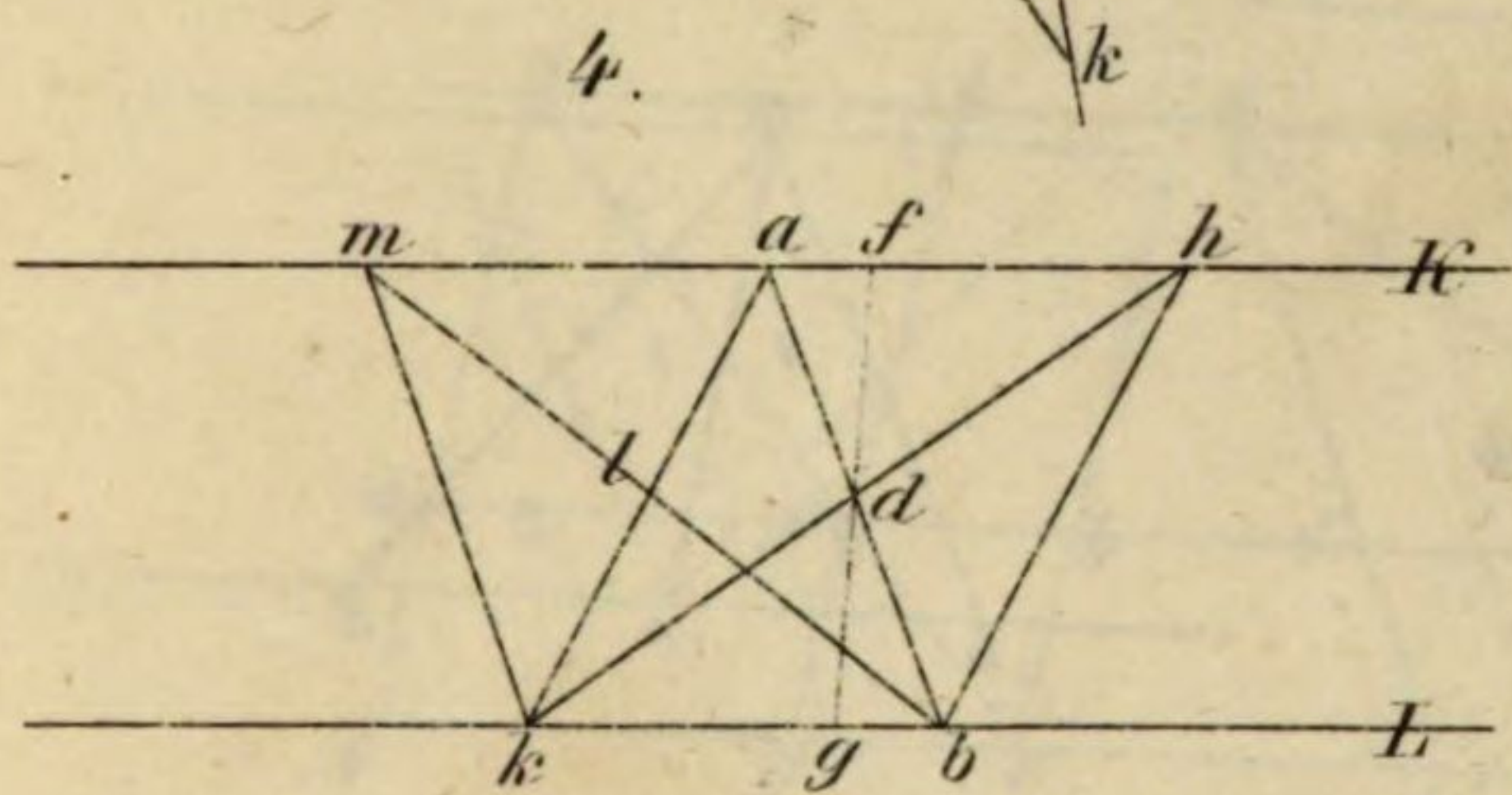
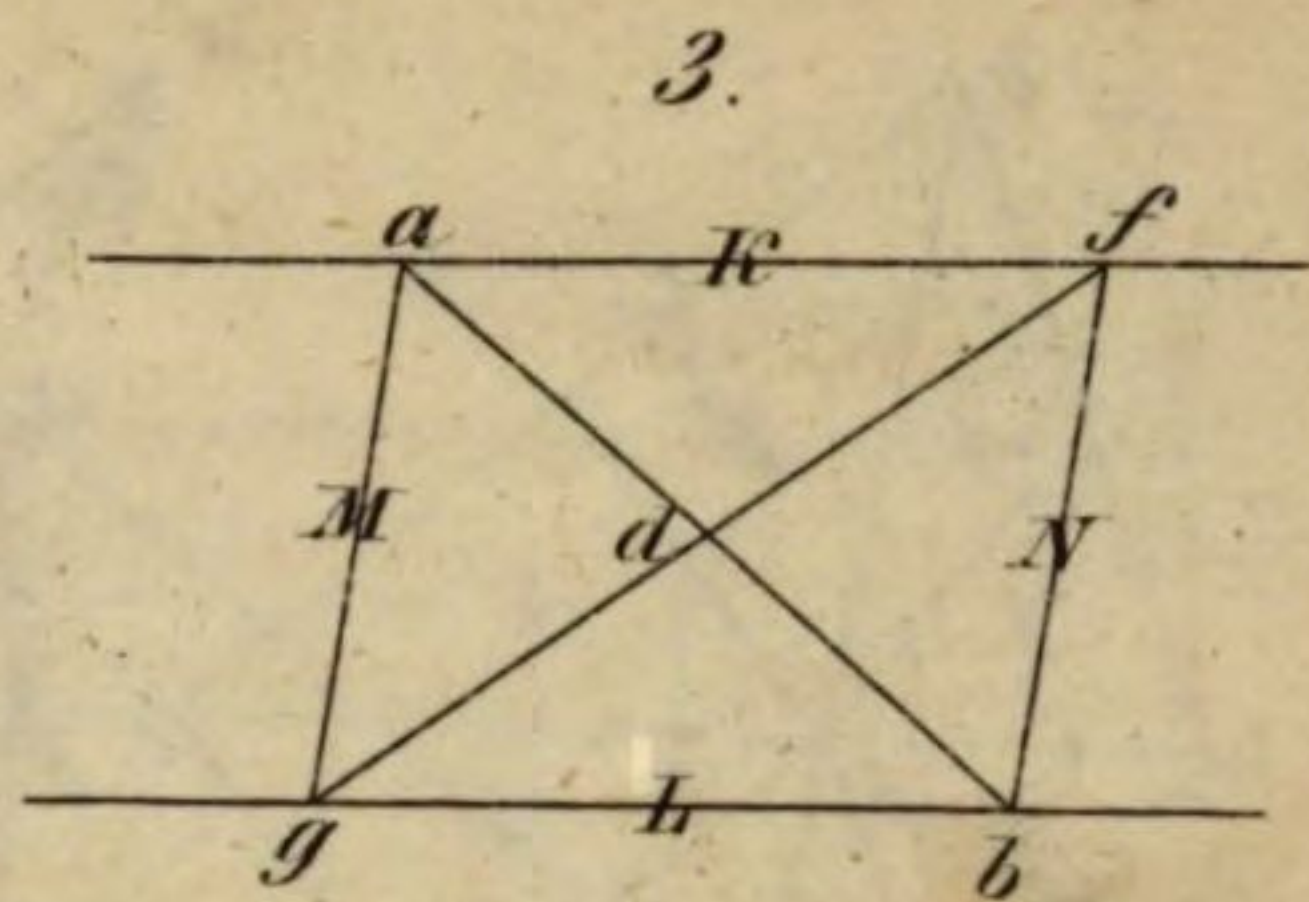
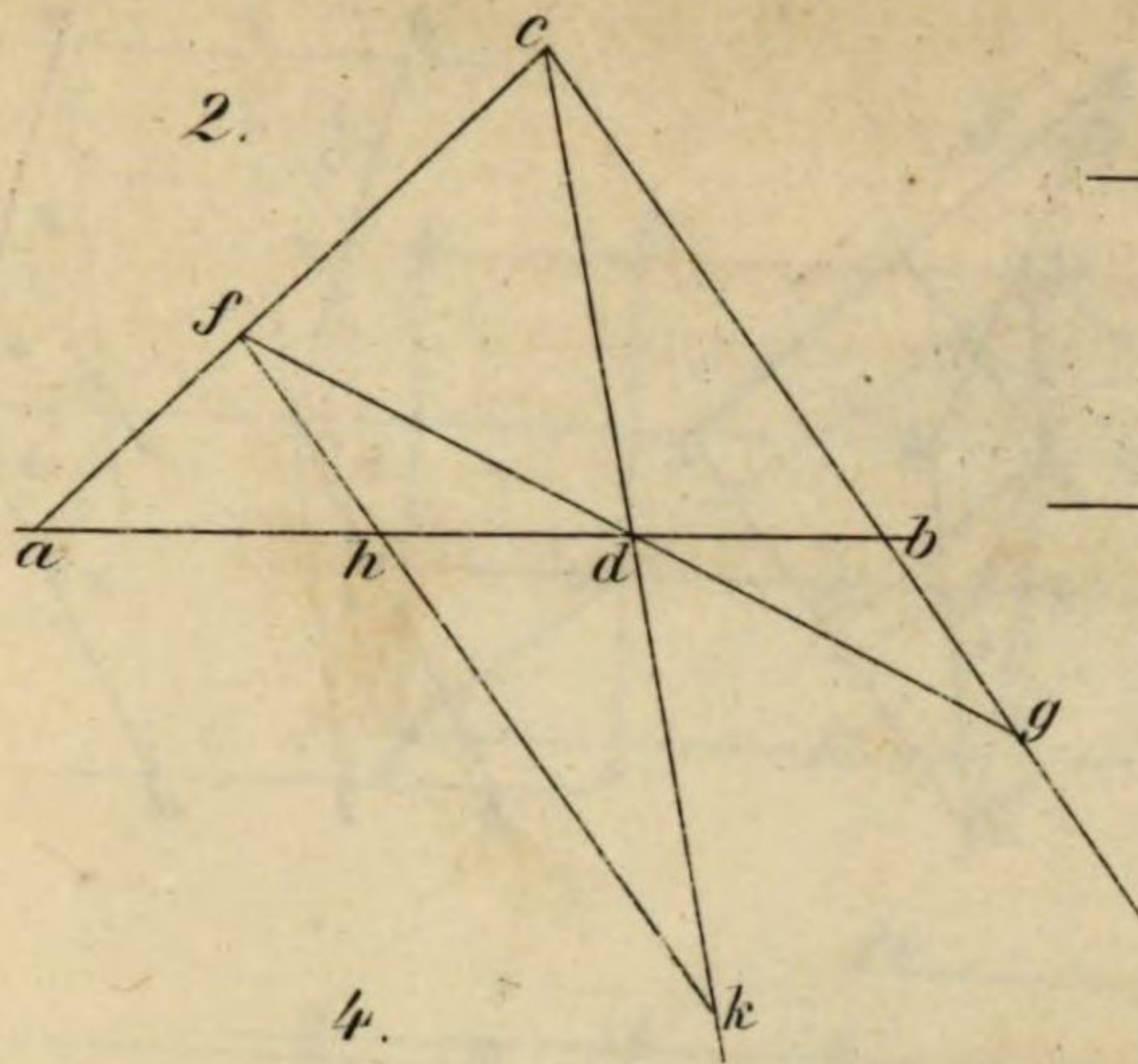
Aber am, af, ag, ac, ad sind gegenseitig die Hälften
 von ab, 24, 13, 23, 14;

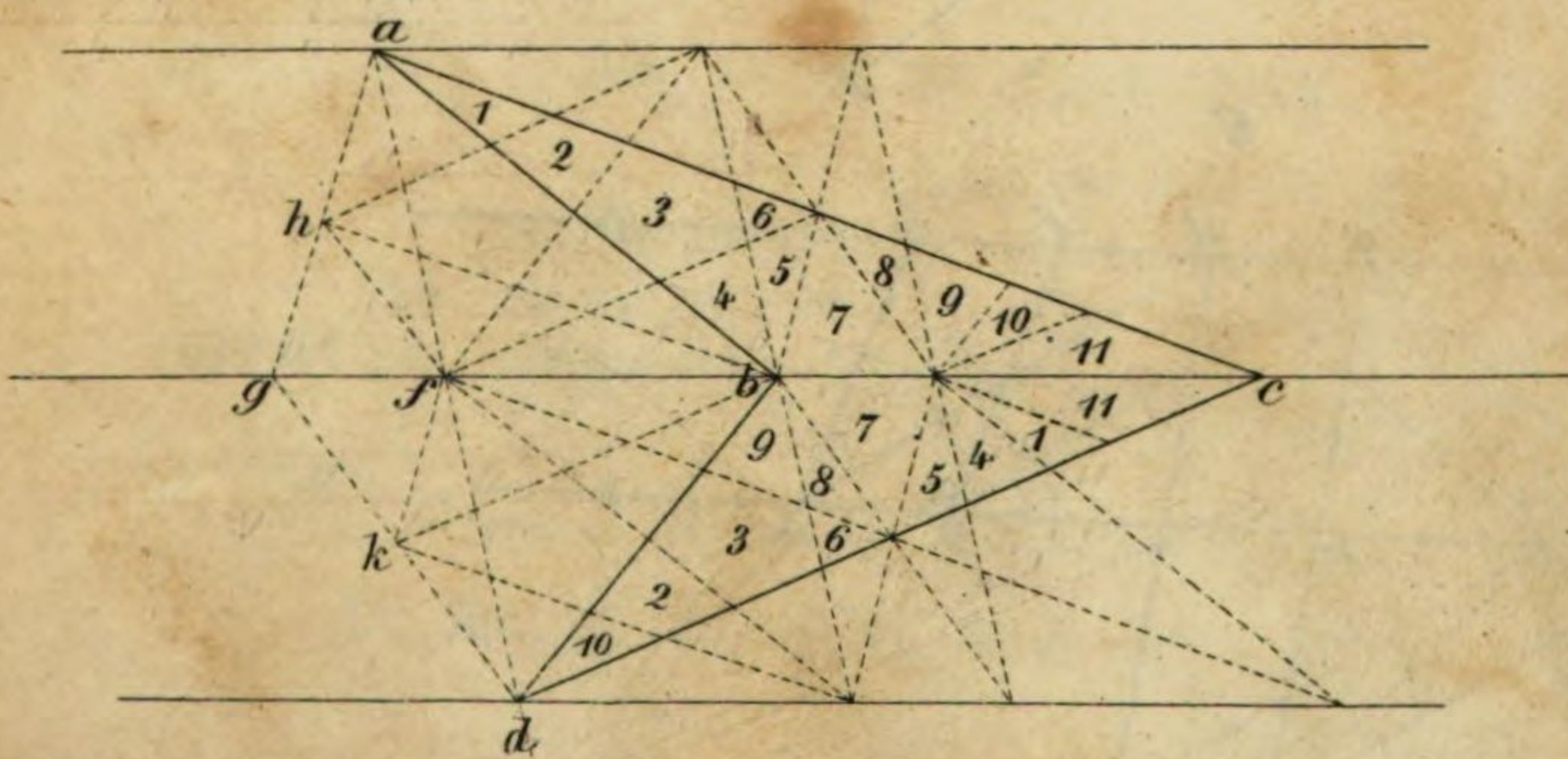
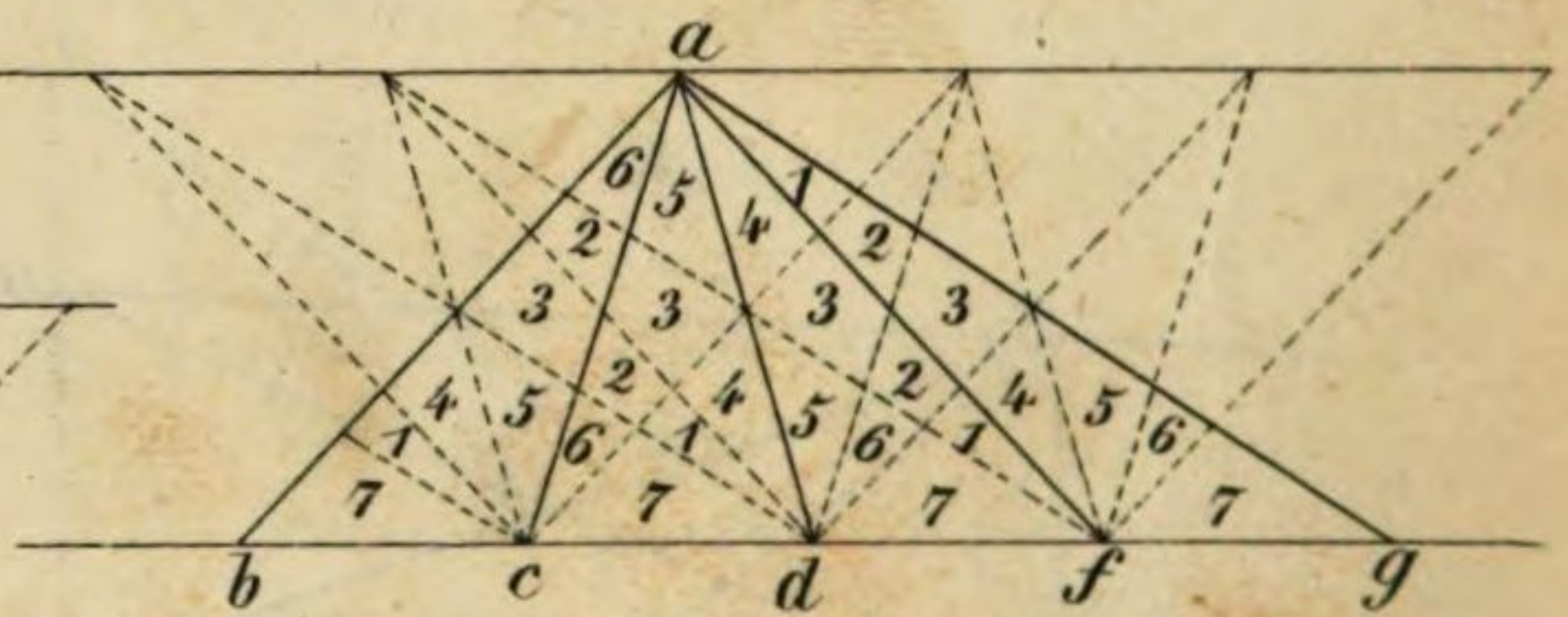
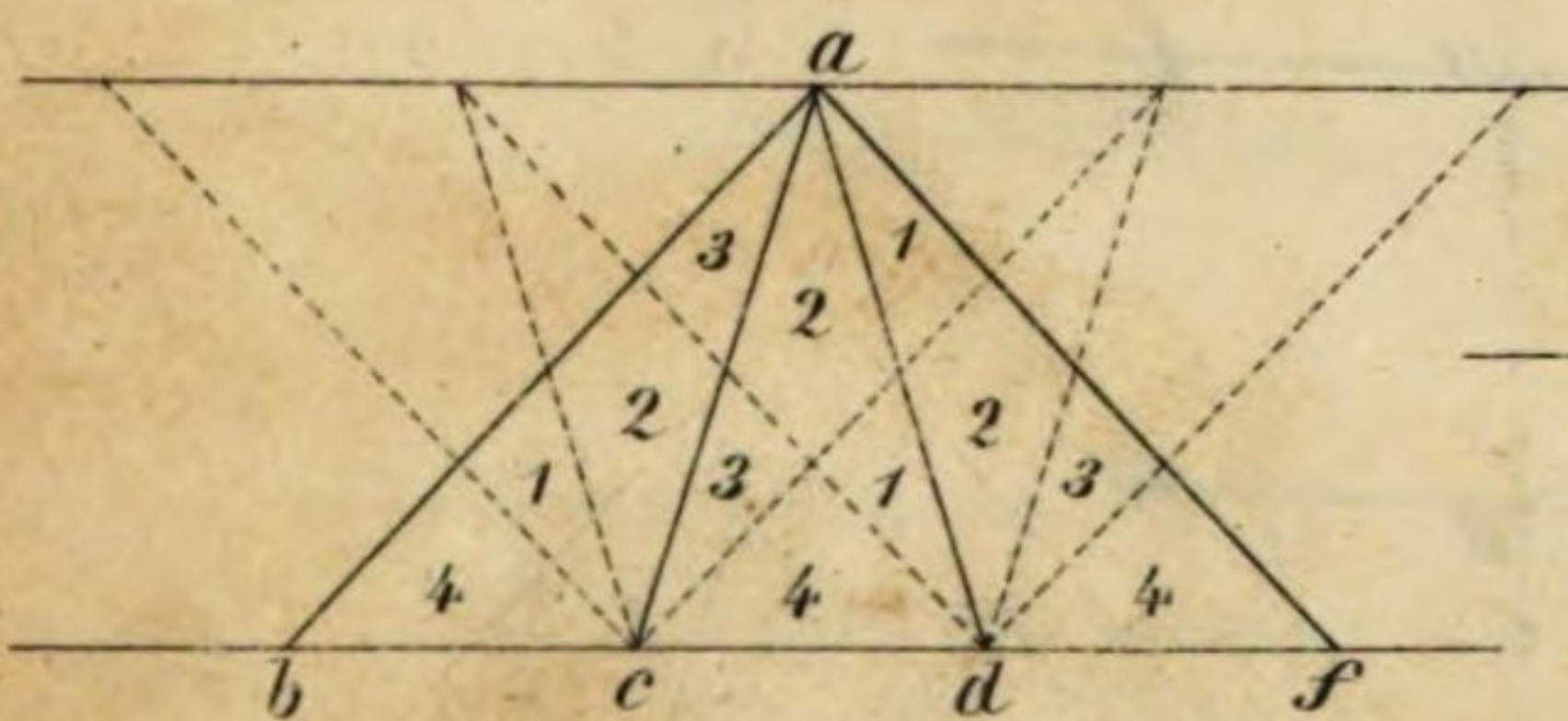
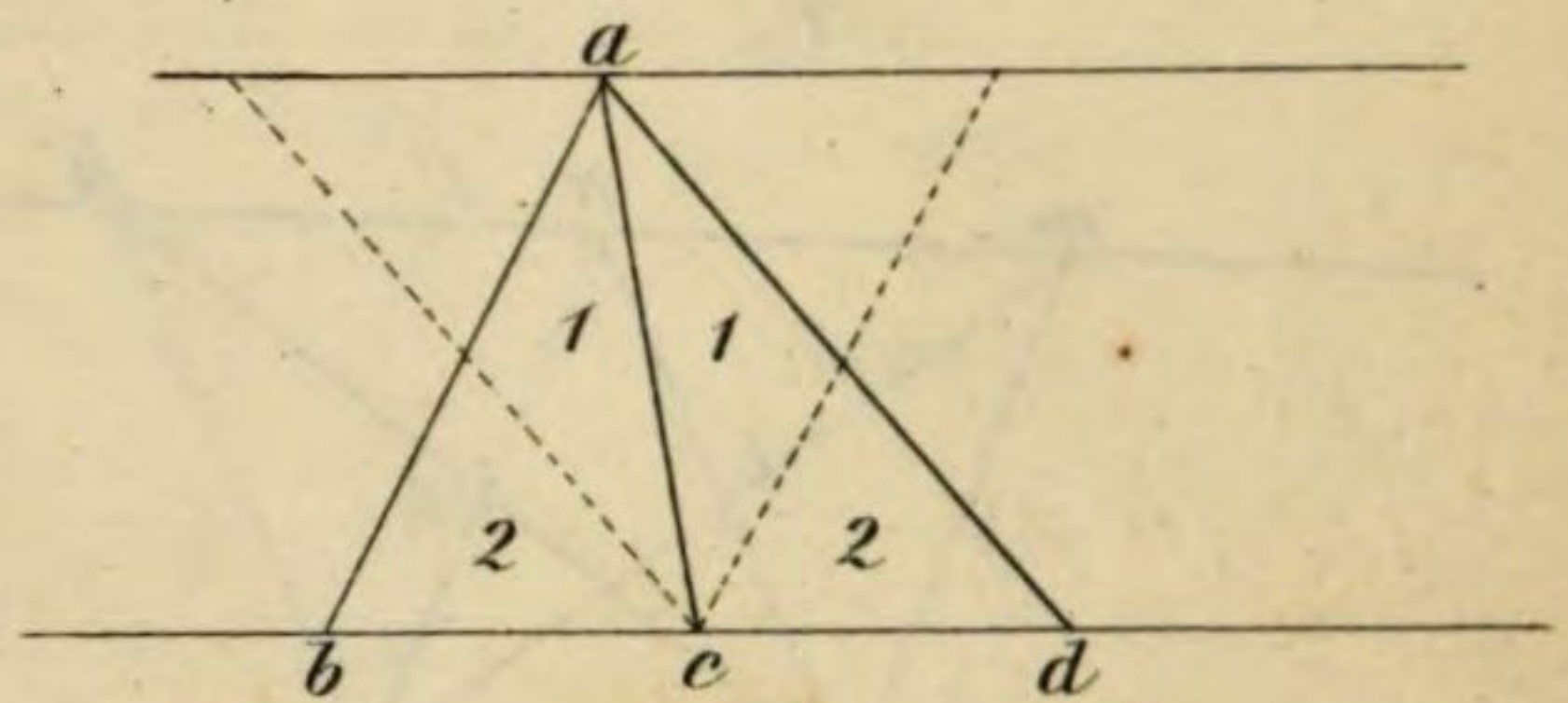
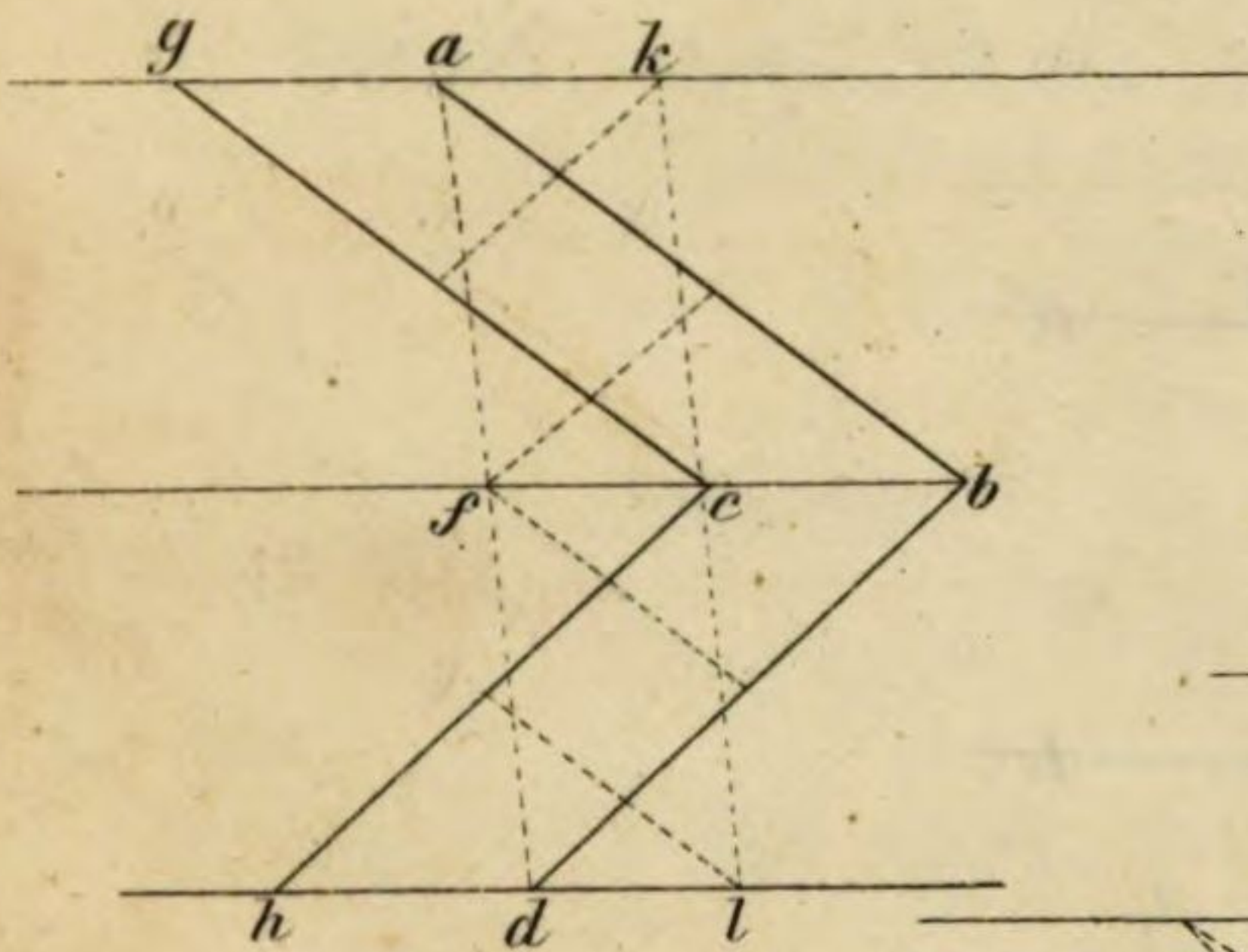
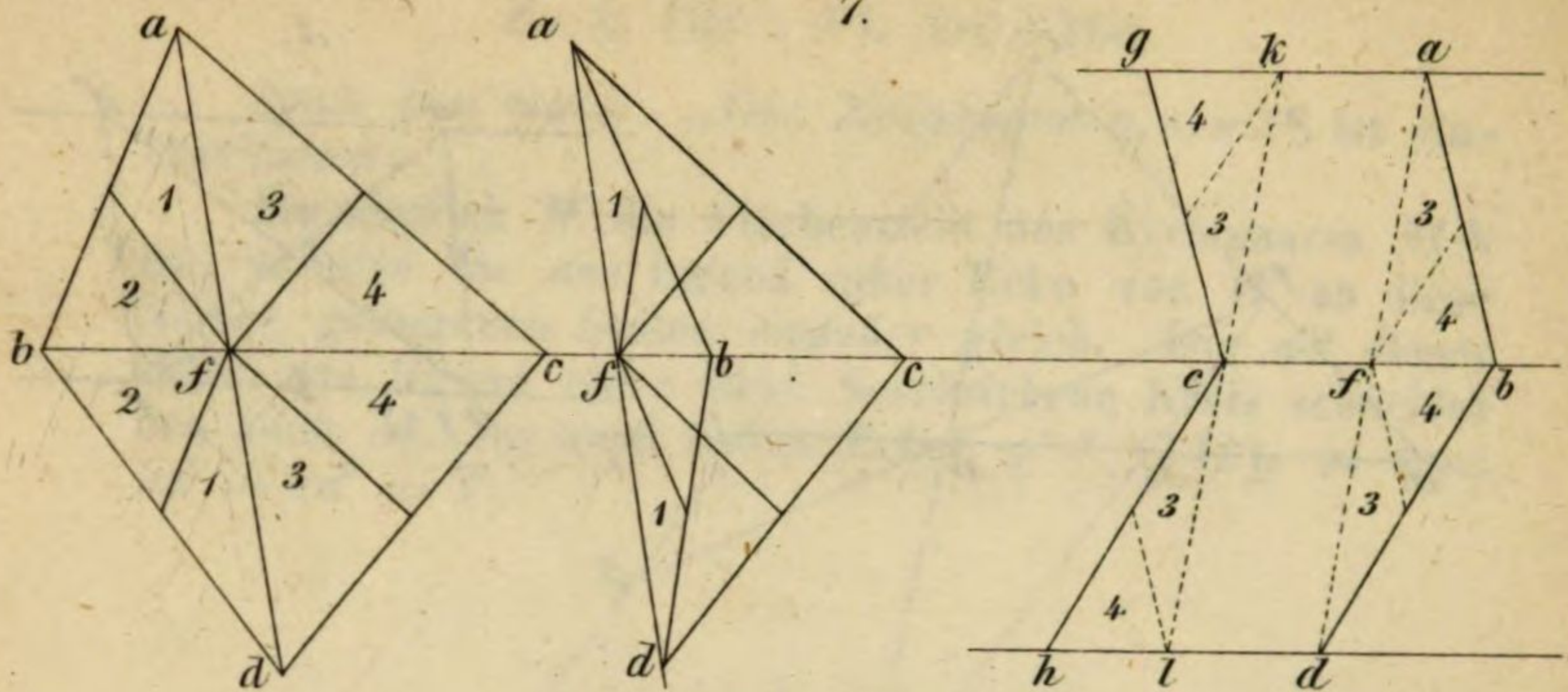
$$\text{also } an = ho = hp = \frac{1}{2} \cdot \frac{13 \cdot 24}{ab}; \quad an' = ho' = hp' = \frac{1}{2} \cdot \frac{23 \cdot 14}{ab},$$

$$\text{also wie oben } 4ab^2 \cdot H^2 = 13 \cdot 14 \cdot 23 \cdot 24.$$

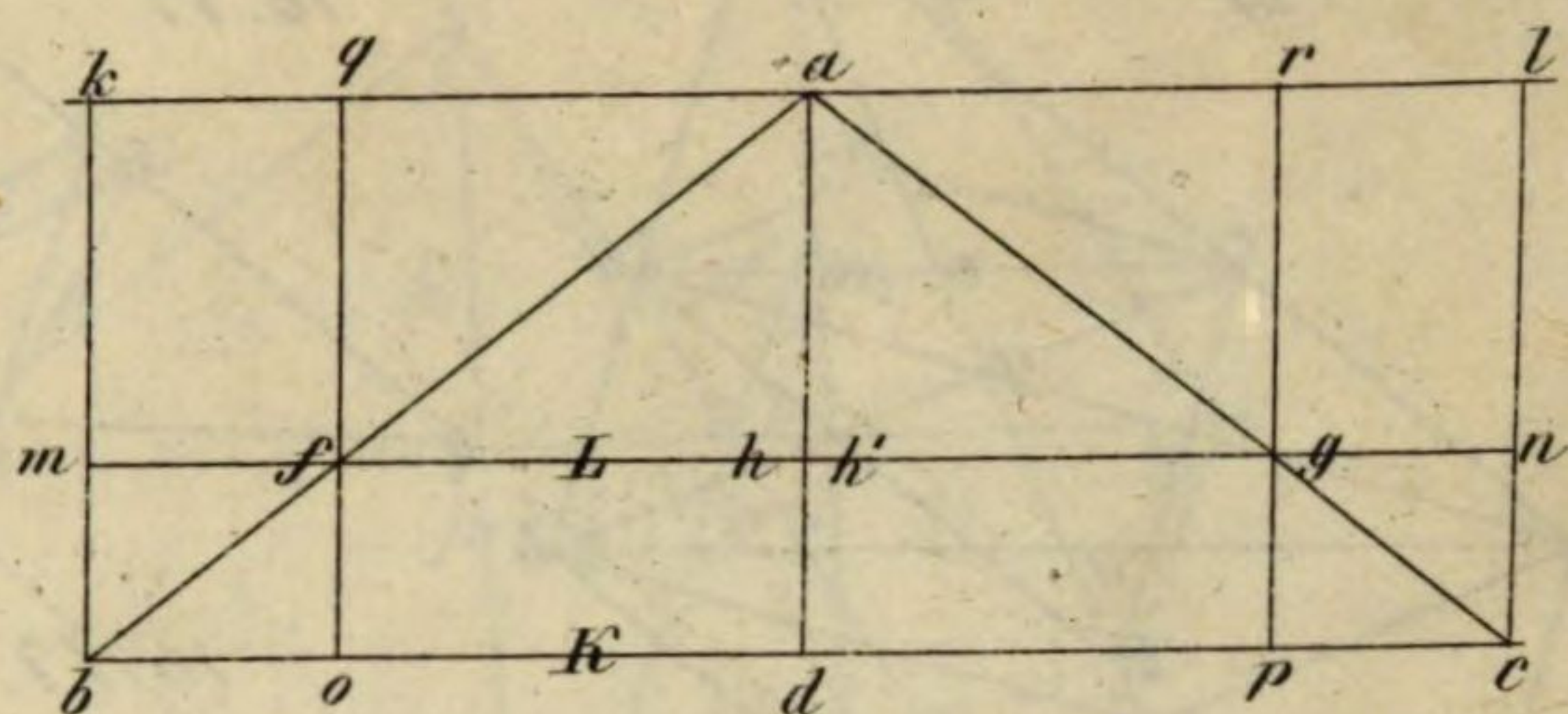
Nach dem Satze: „*Die Neigungen u. s. w.*“ ist einzuschieben:

Da nämlich W die Flächenricht des Kreispaares MN ist, so sind die aus irgend einer Ecke von W an diese Kreise gezogenen Seiten einander gleich. Der mit dieser Seite aus irgend einer Ecke beschriebene Kreis schneidet den Stab MN in zwei festen Ecken $n'n''$ (142), so dass $hn' = hn'' = T$.

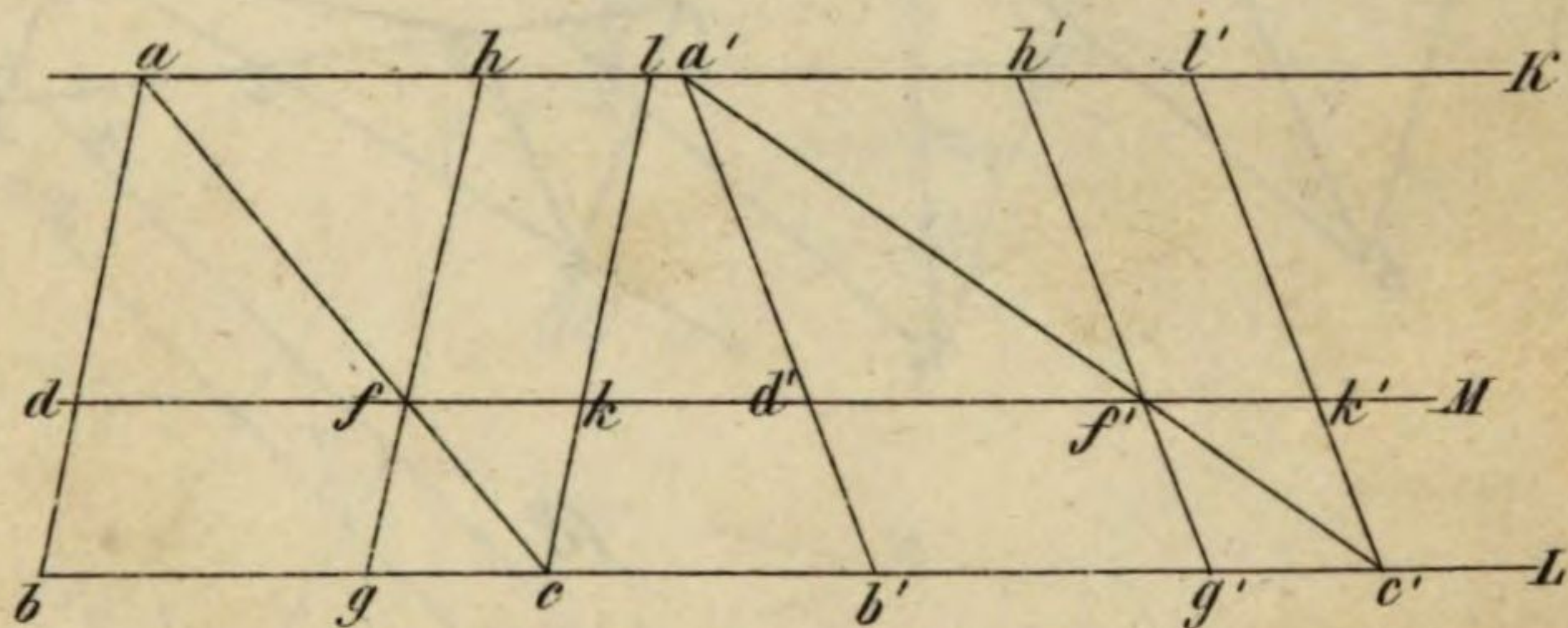




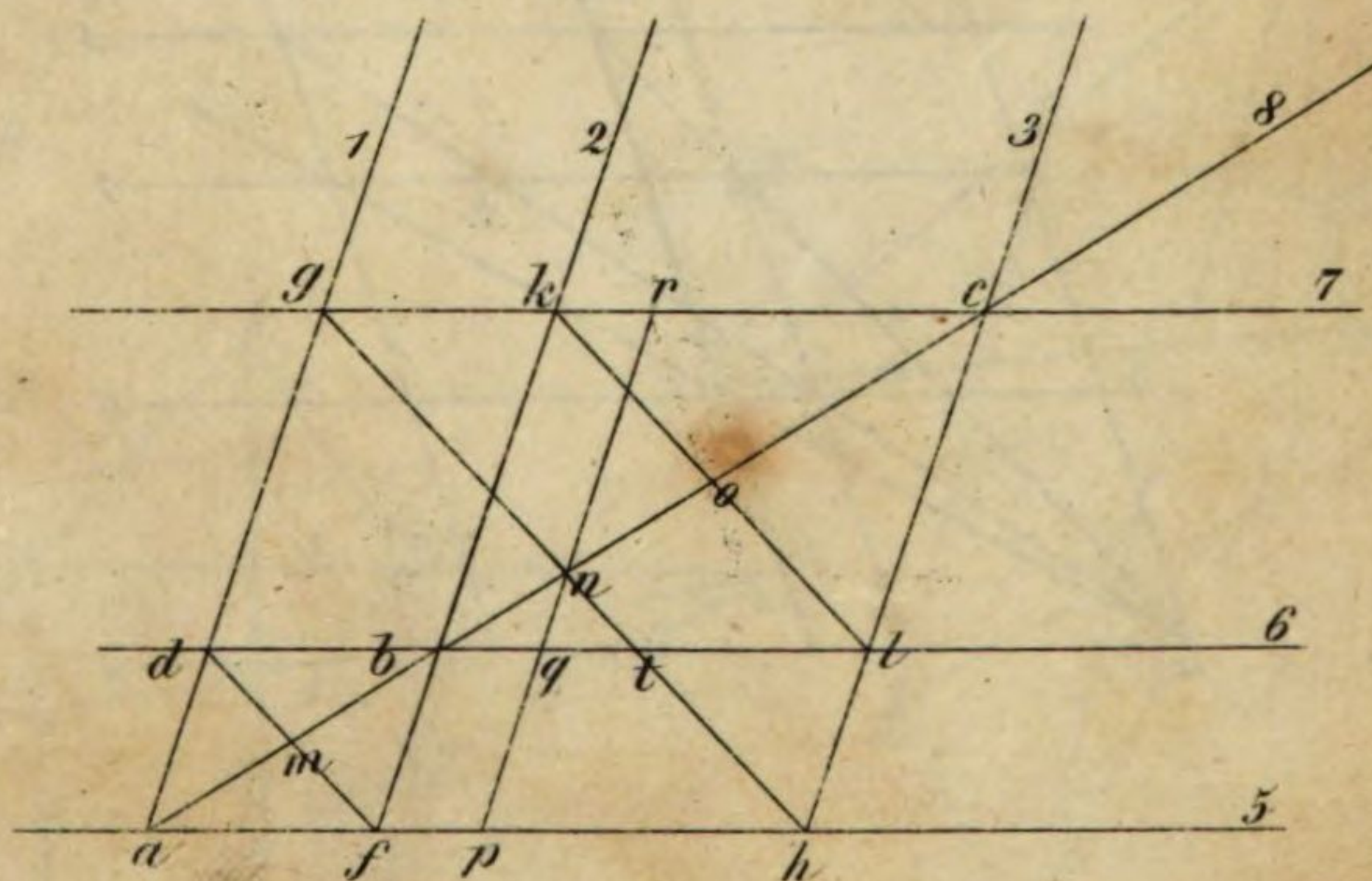
8. 9.

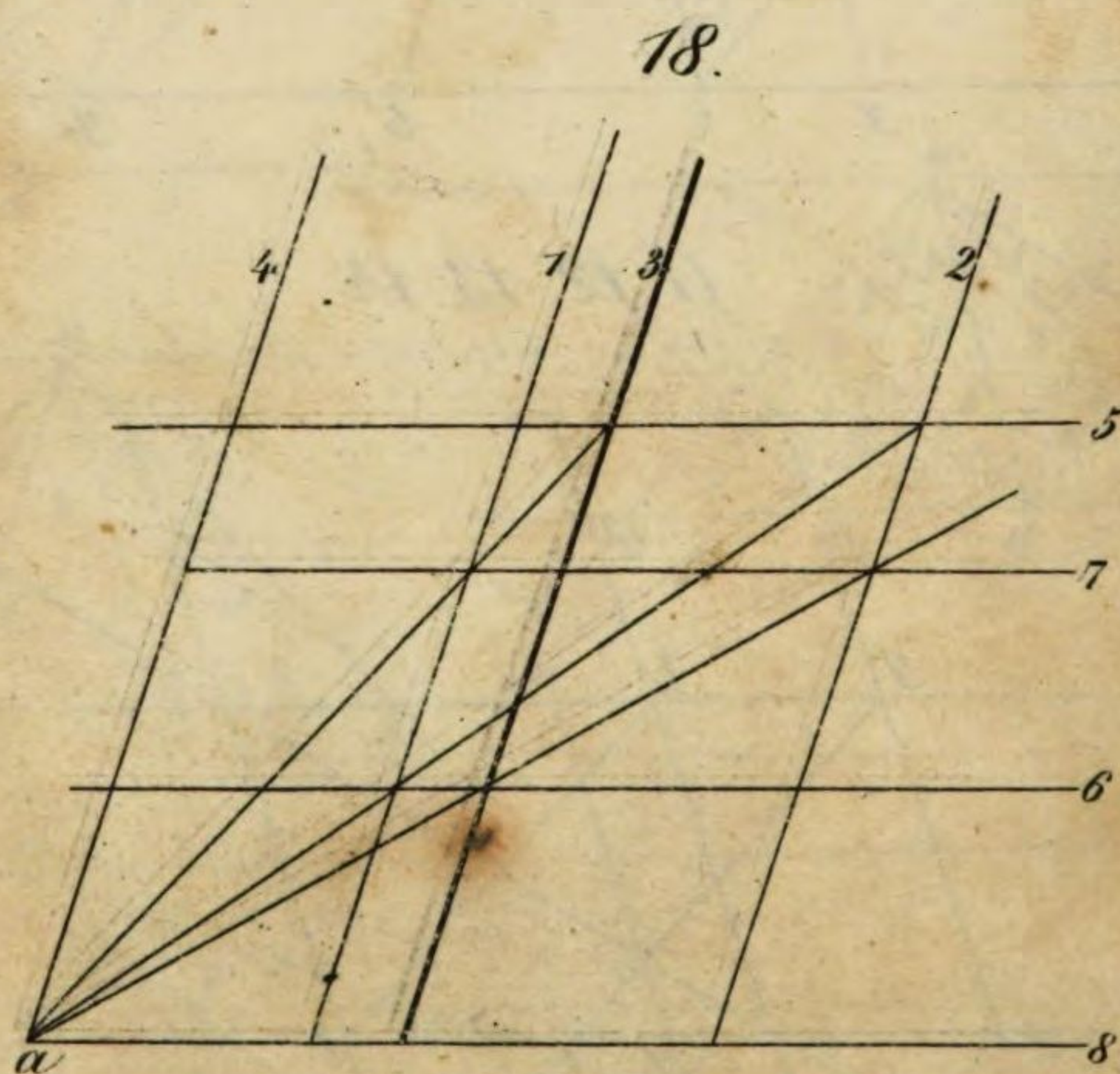
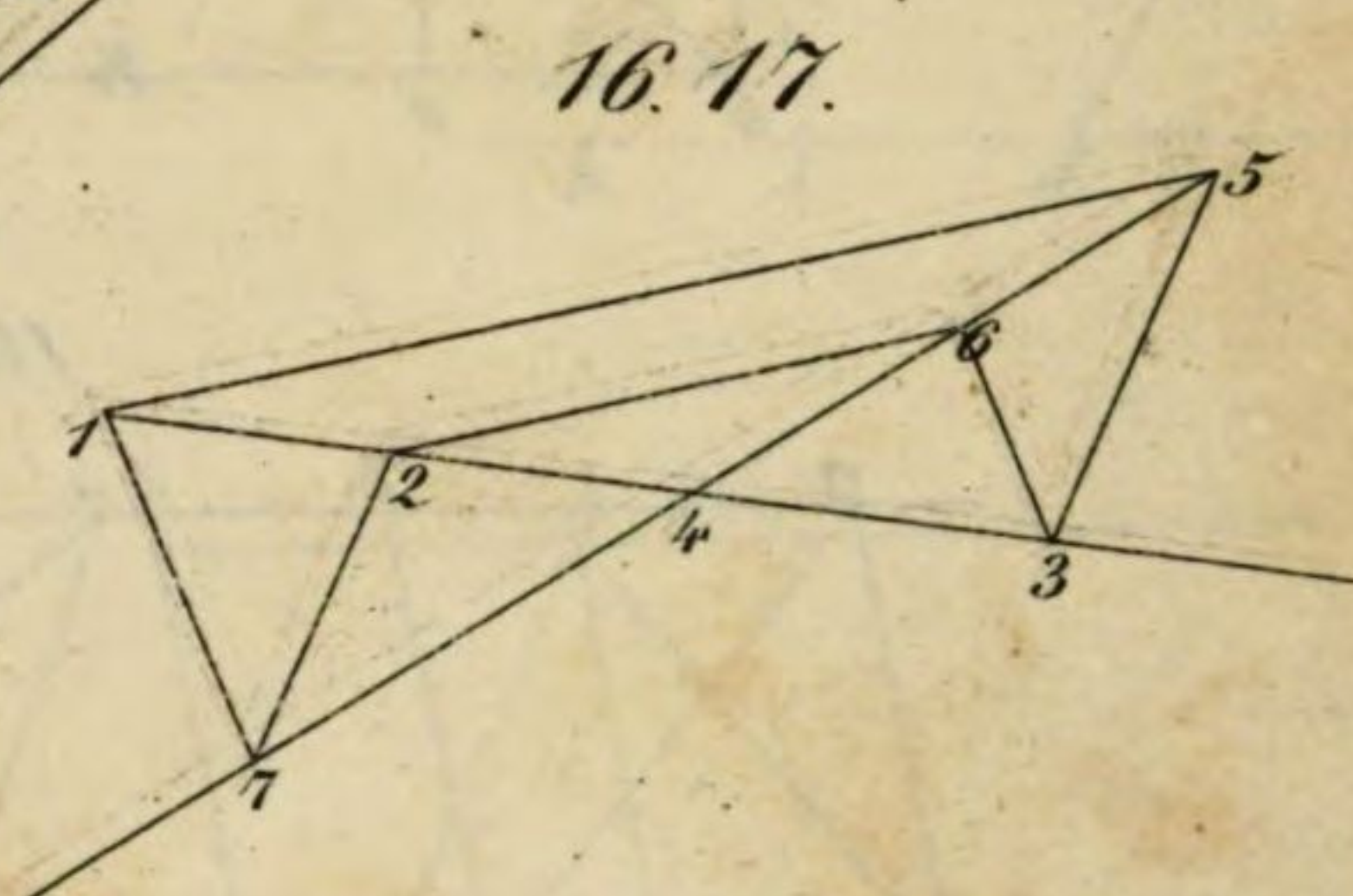
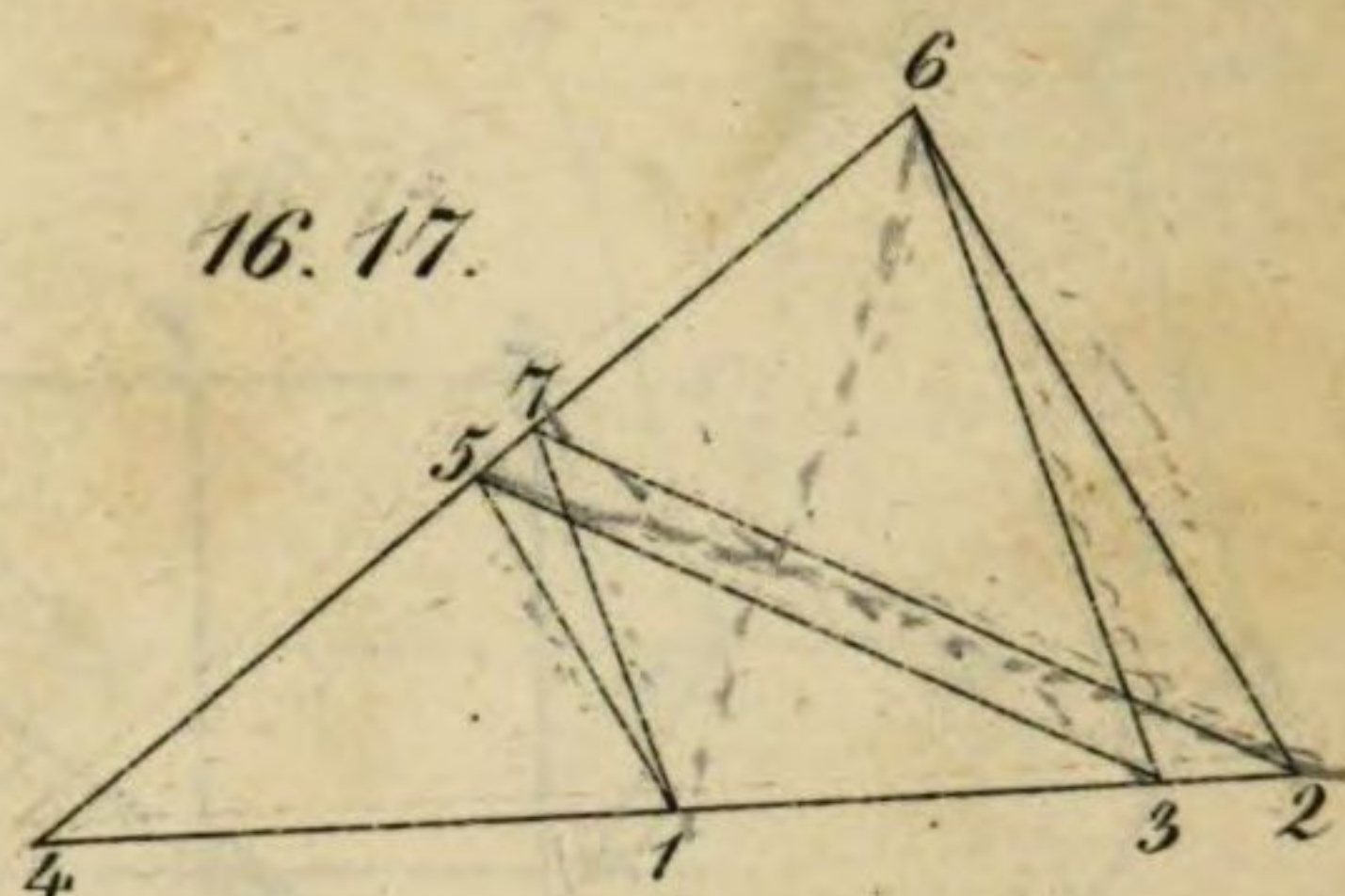
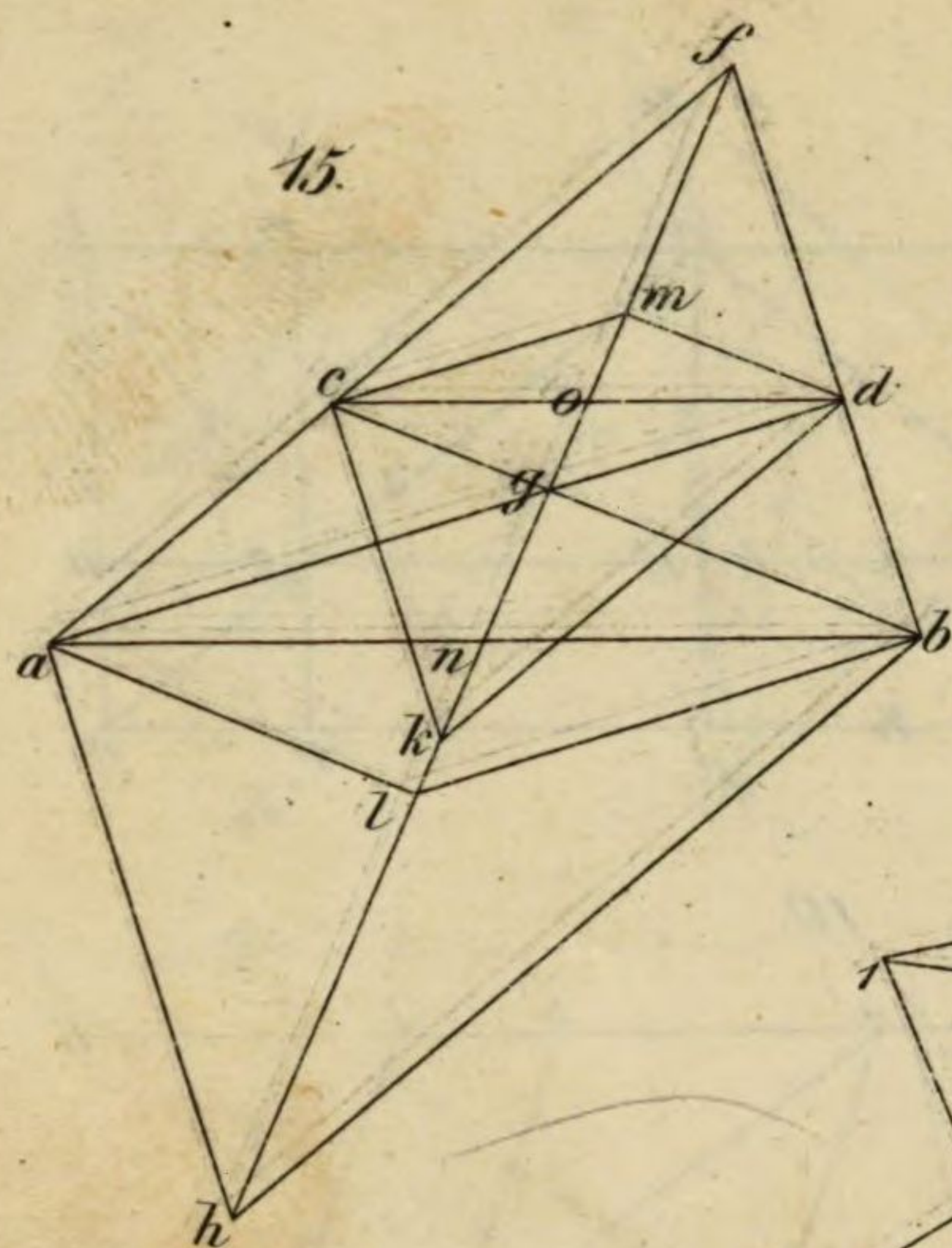


10.

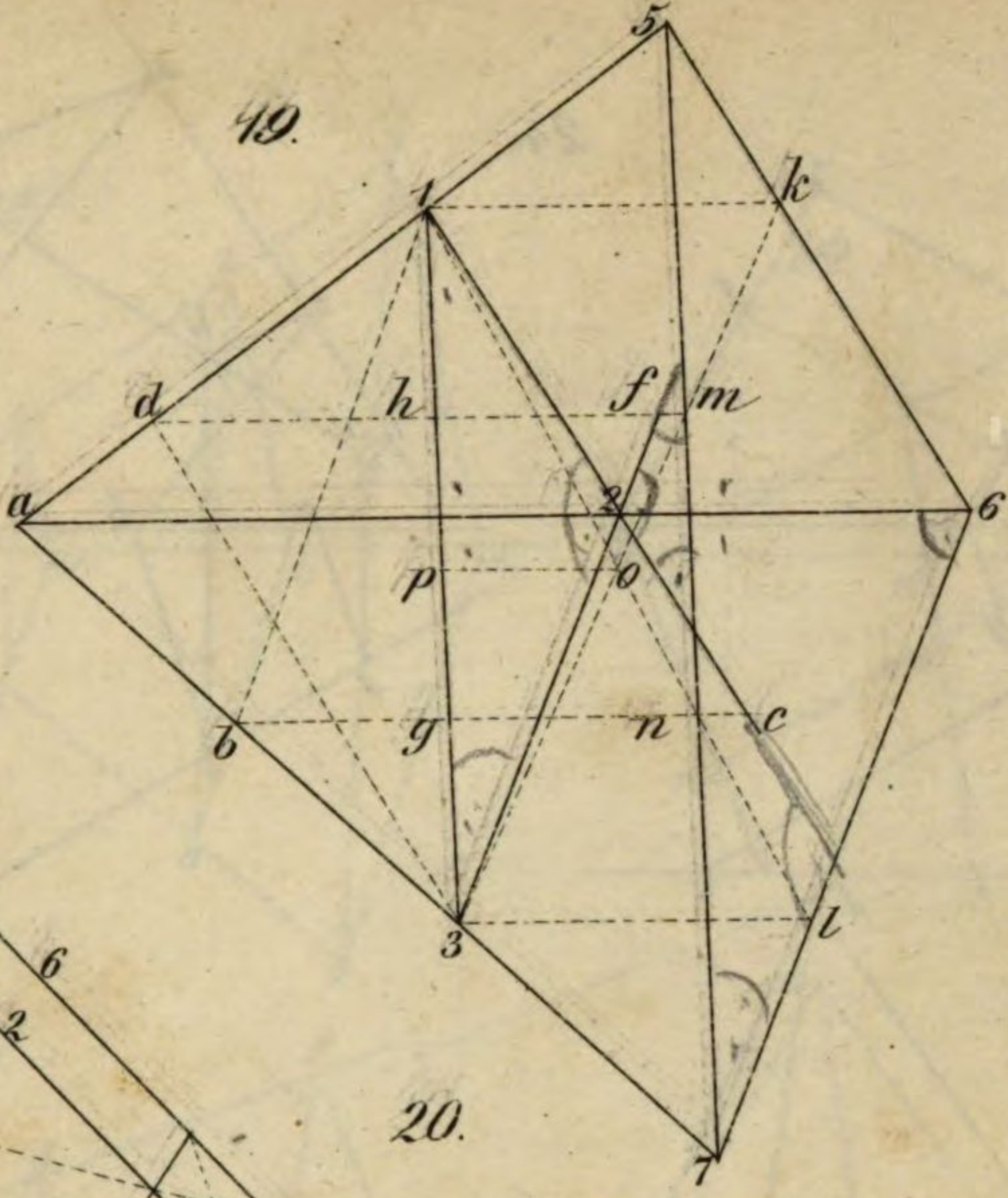


11. 12. 13. 14.

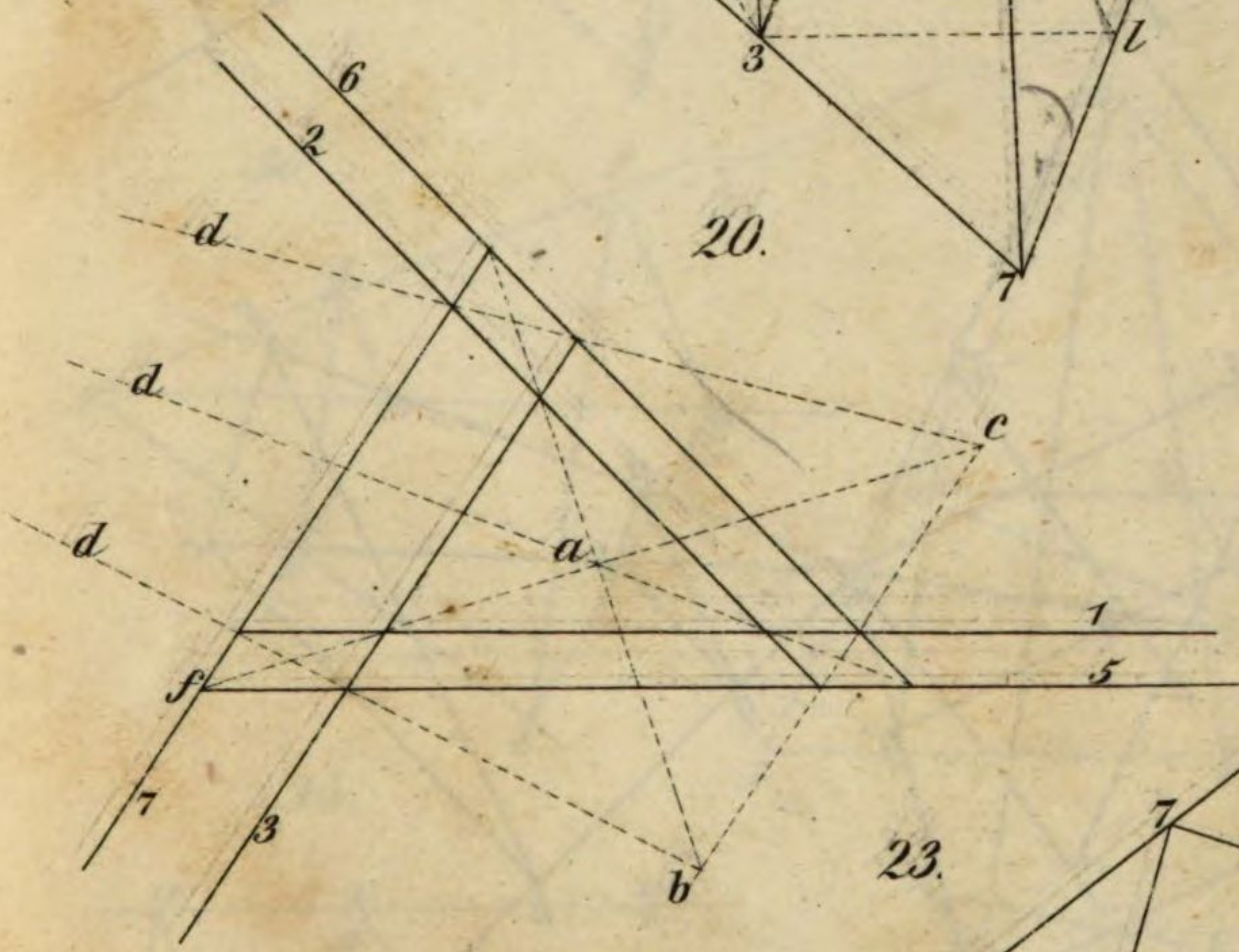




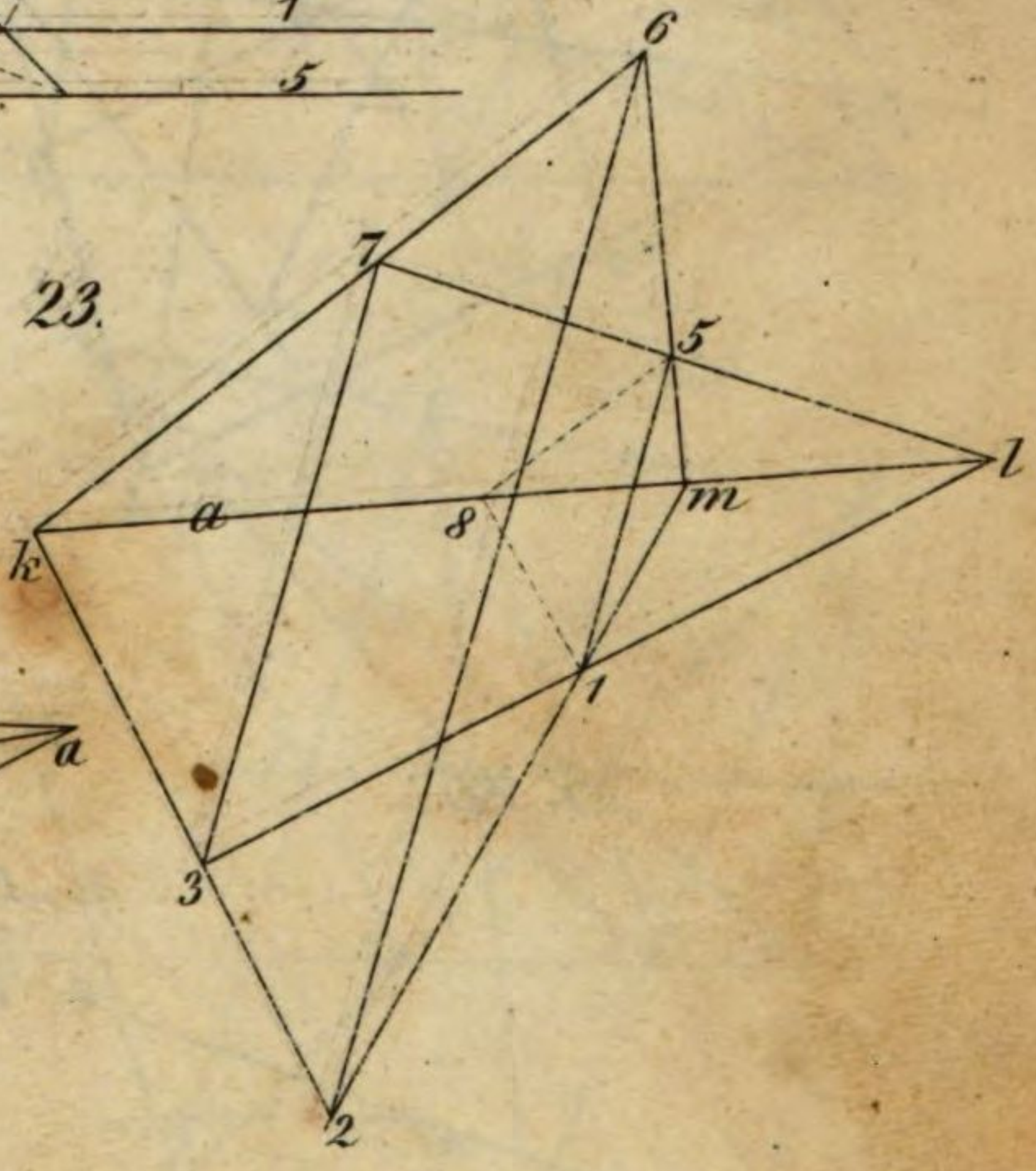
19.



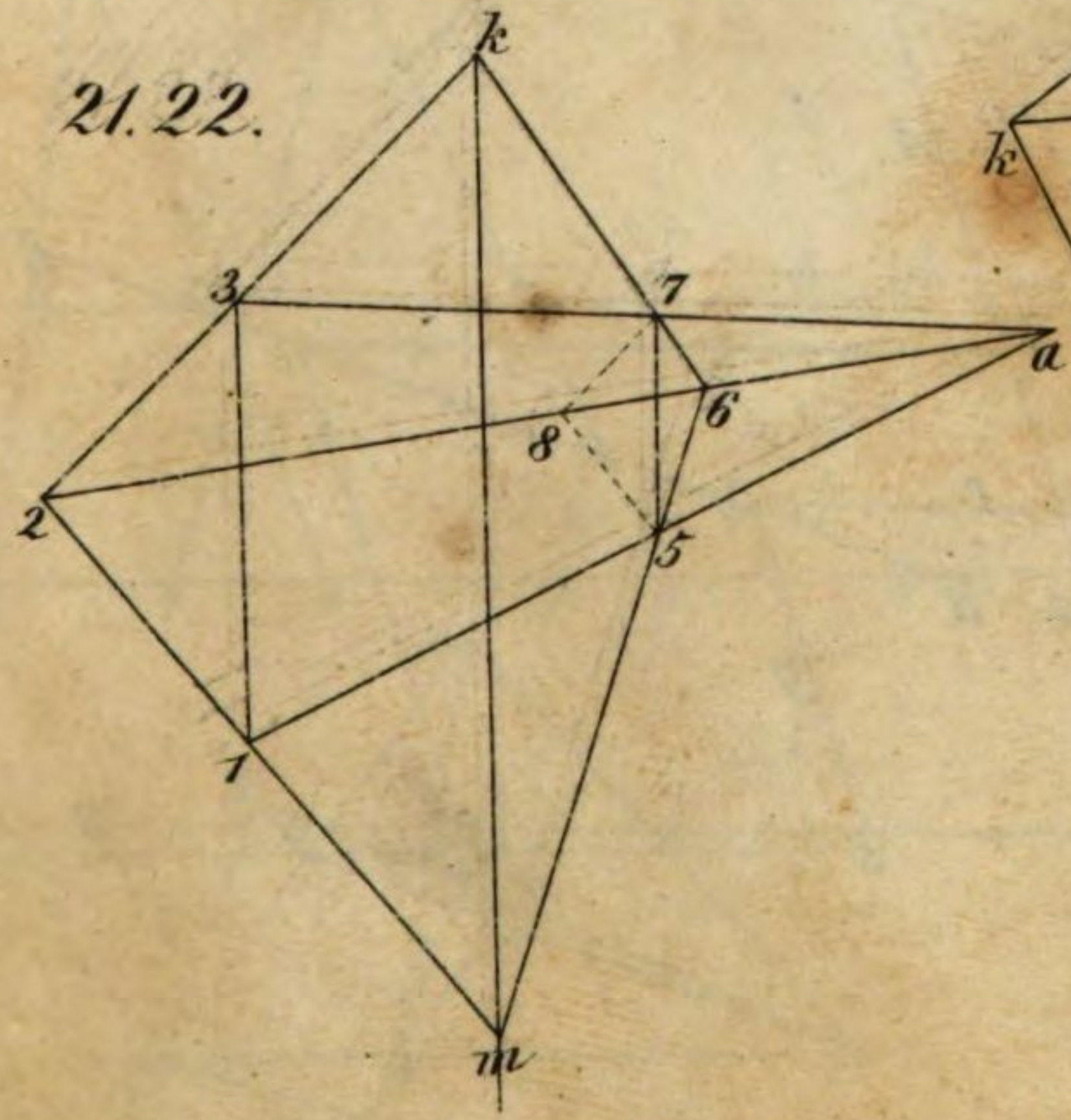
20.



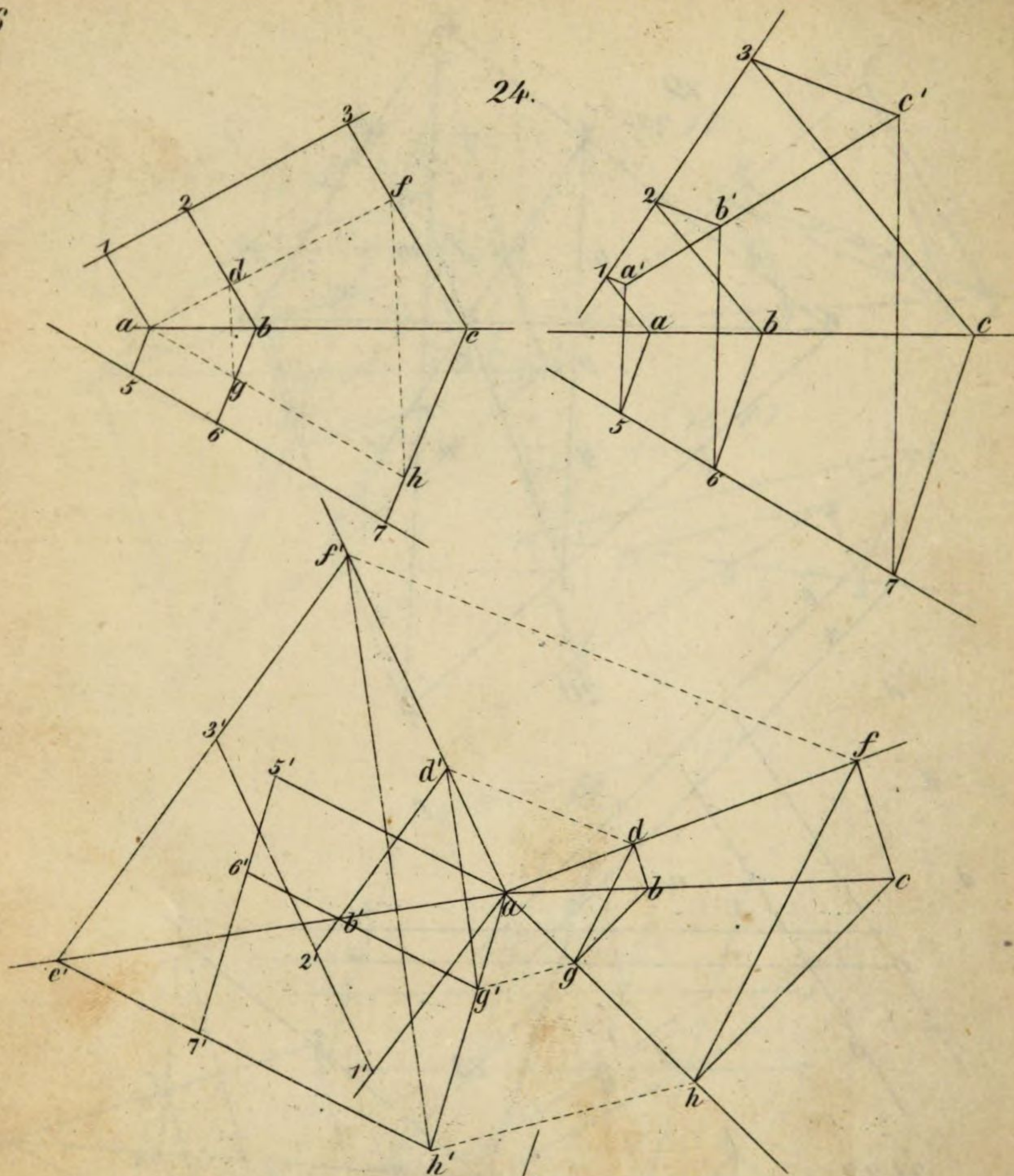
23.



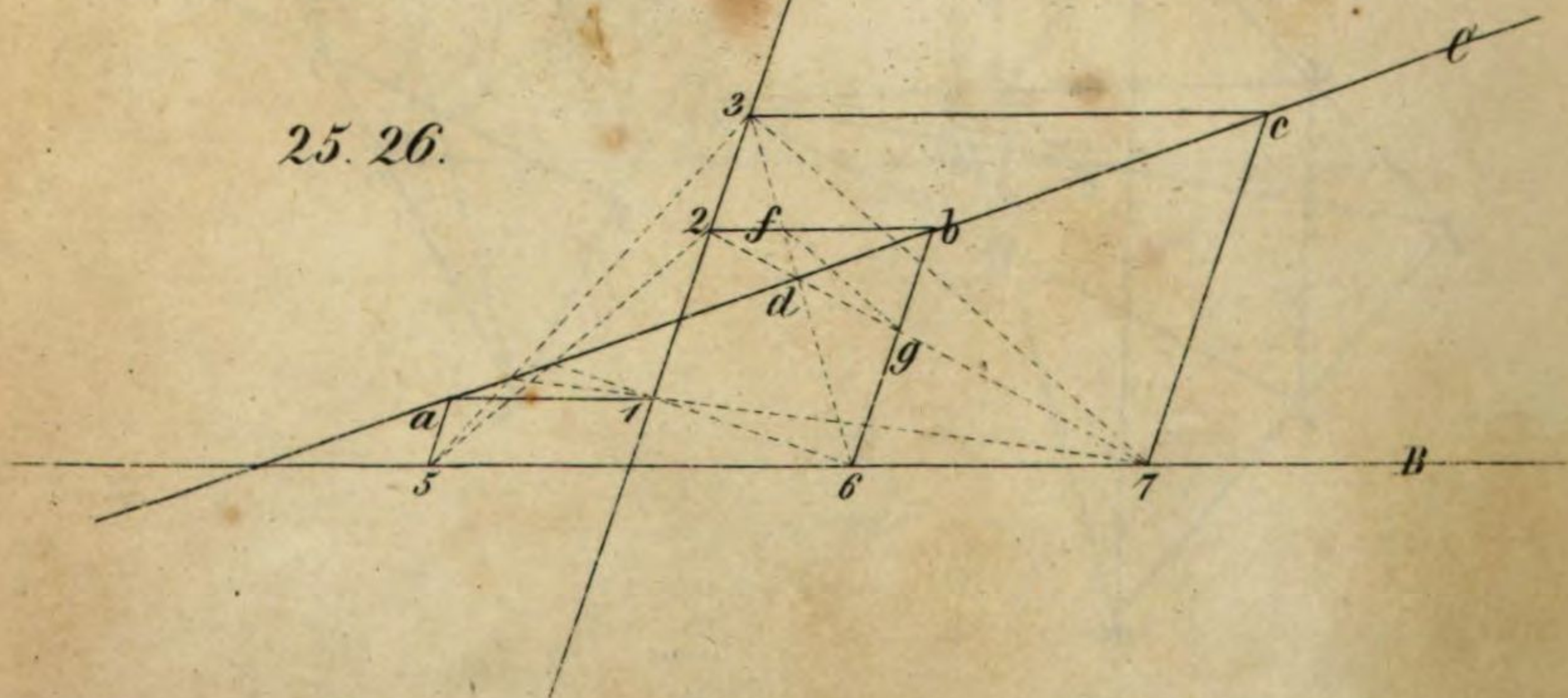
21. 22.



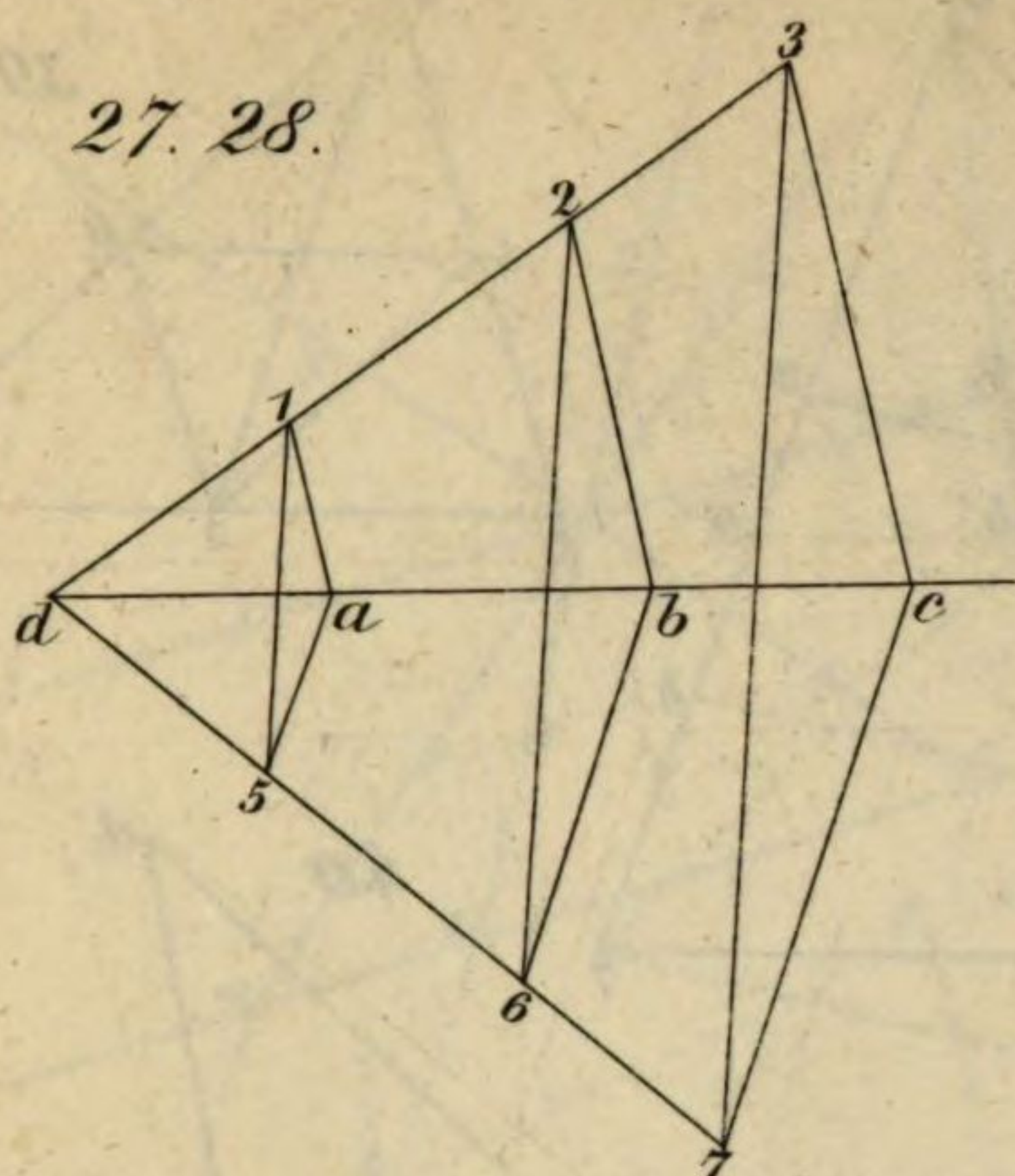
24.



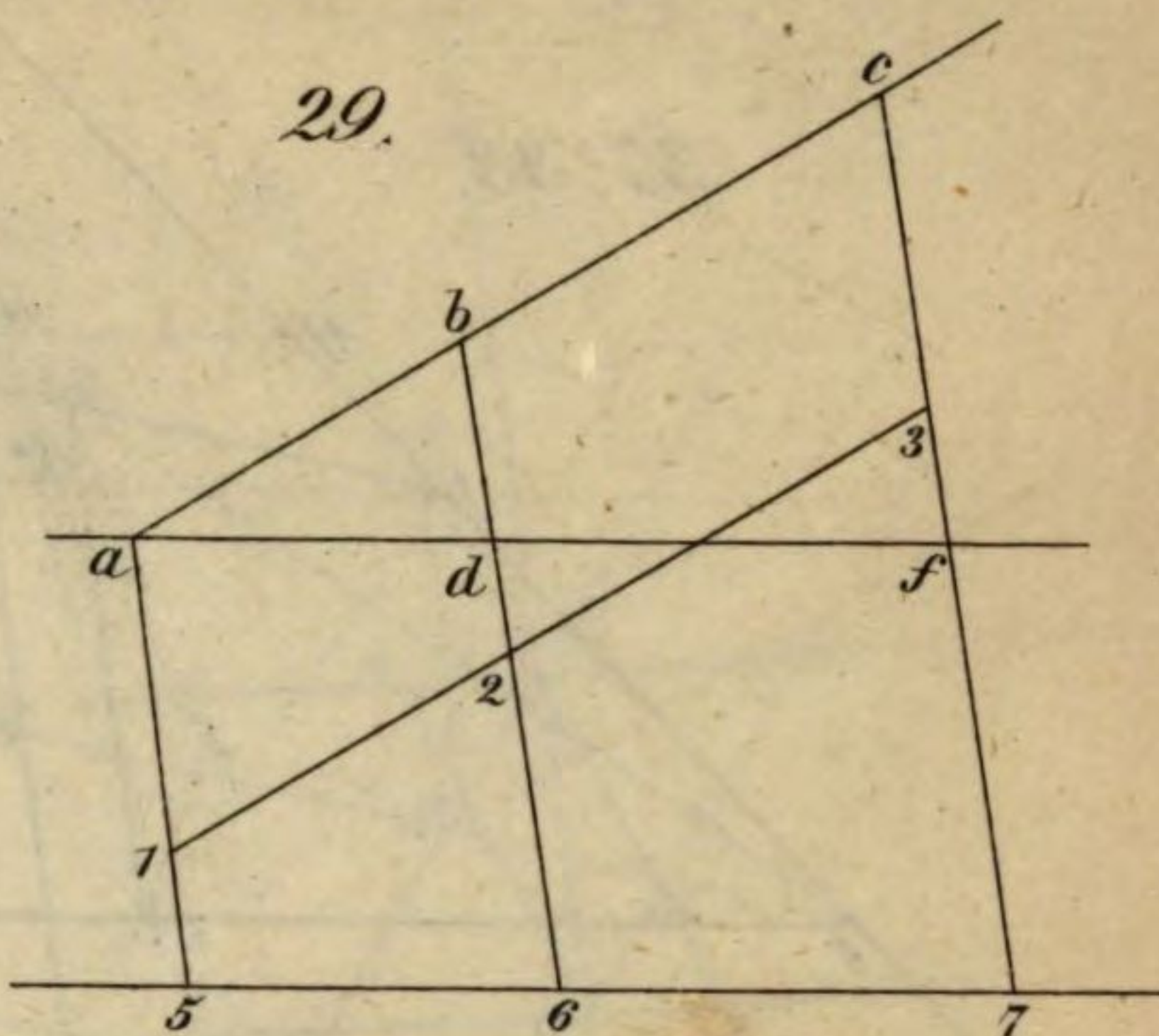
25. 26.



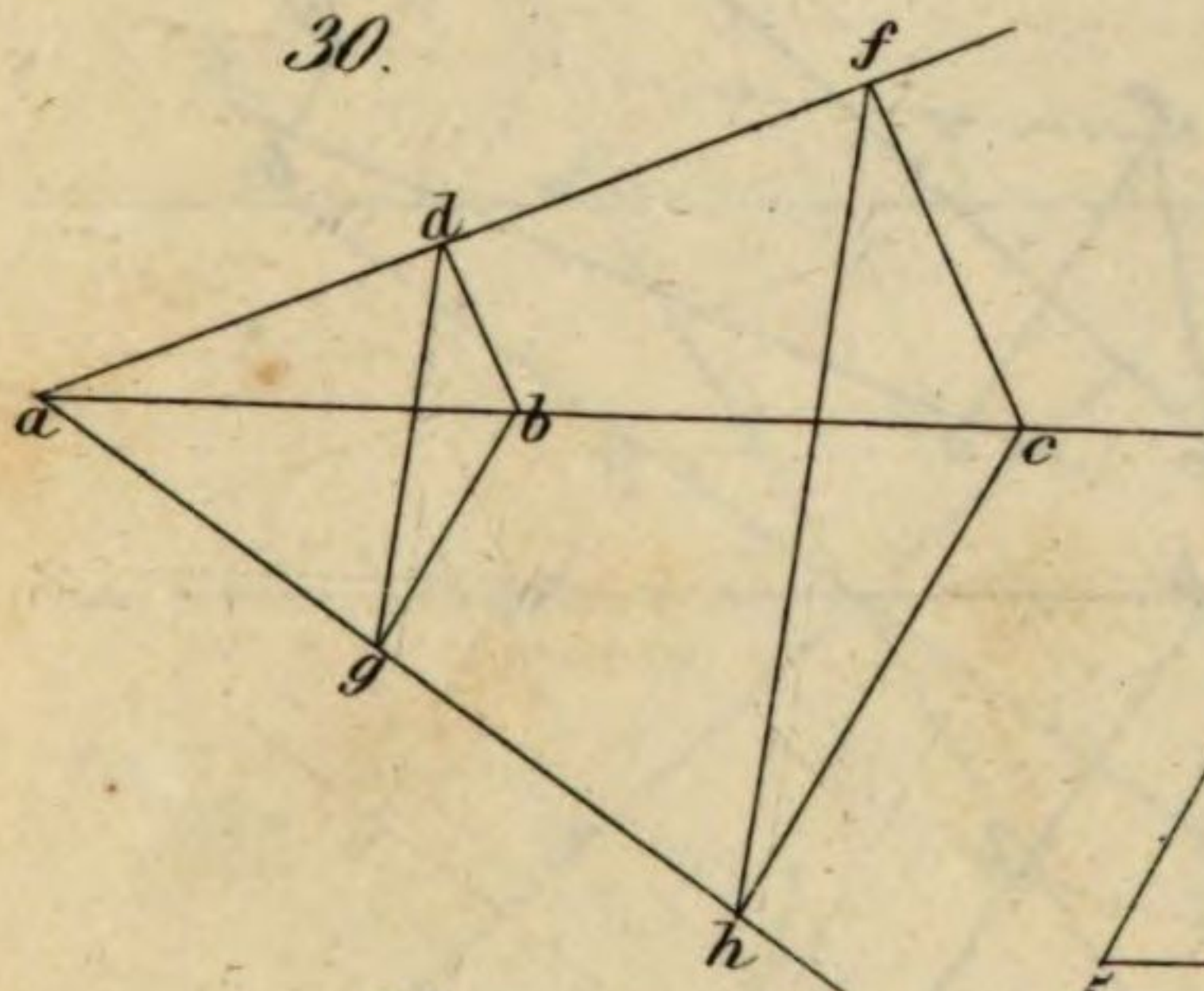
27. 28.



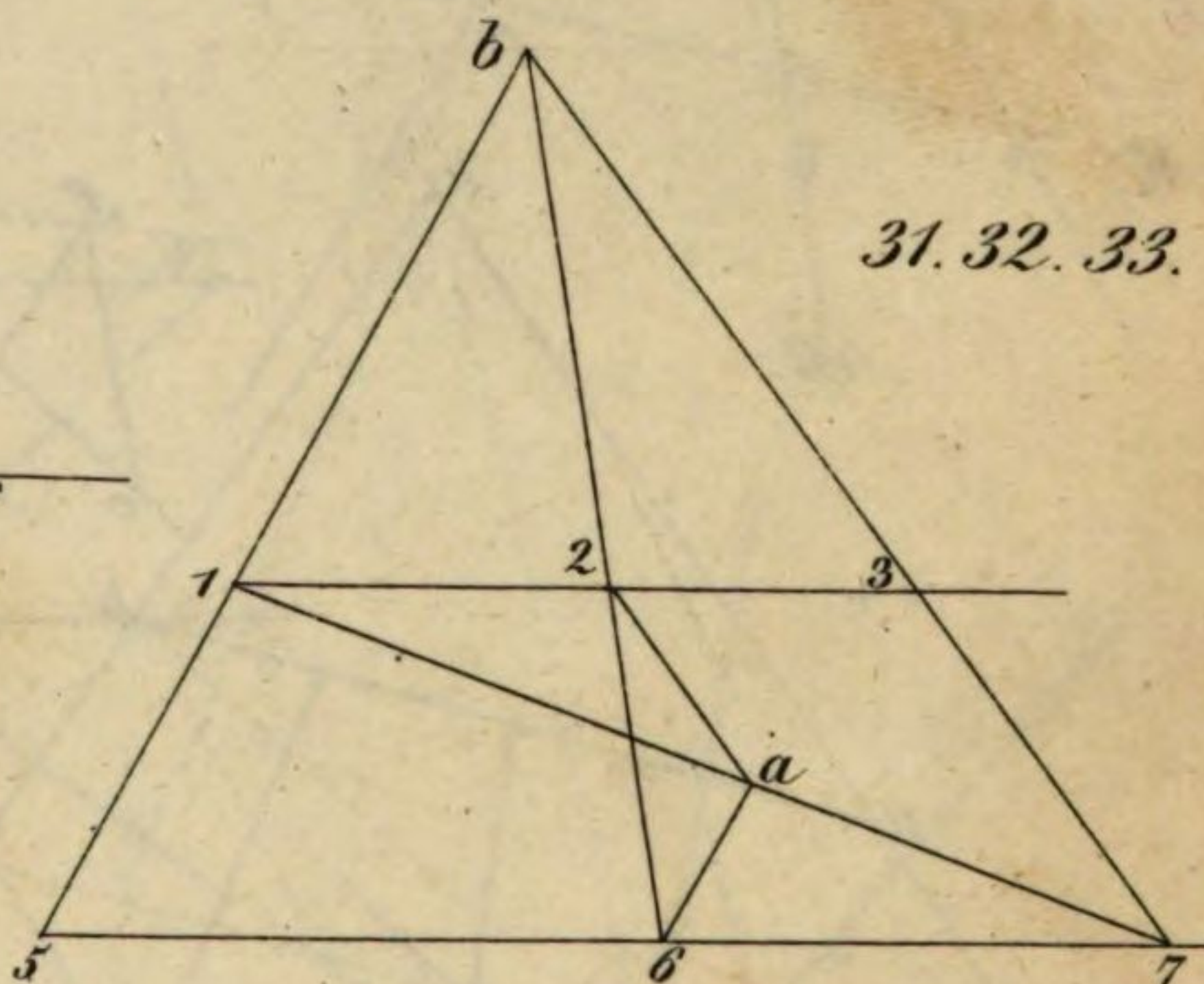
29.



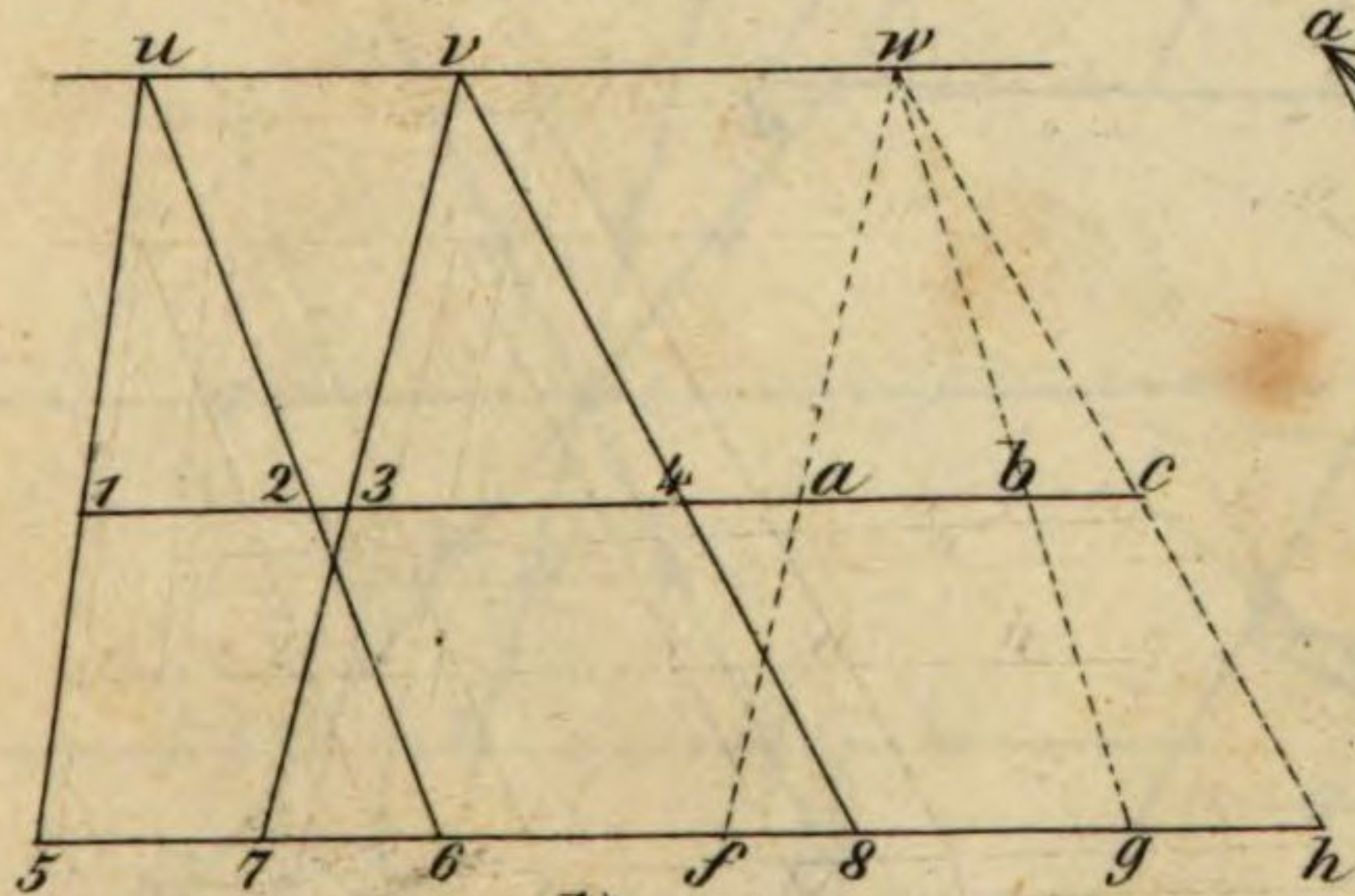
30.



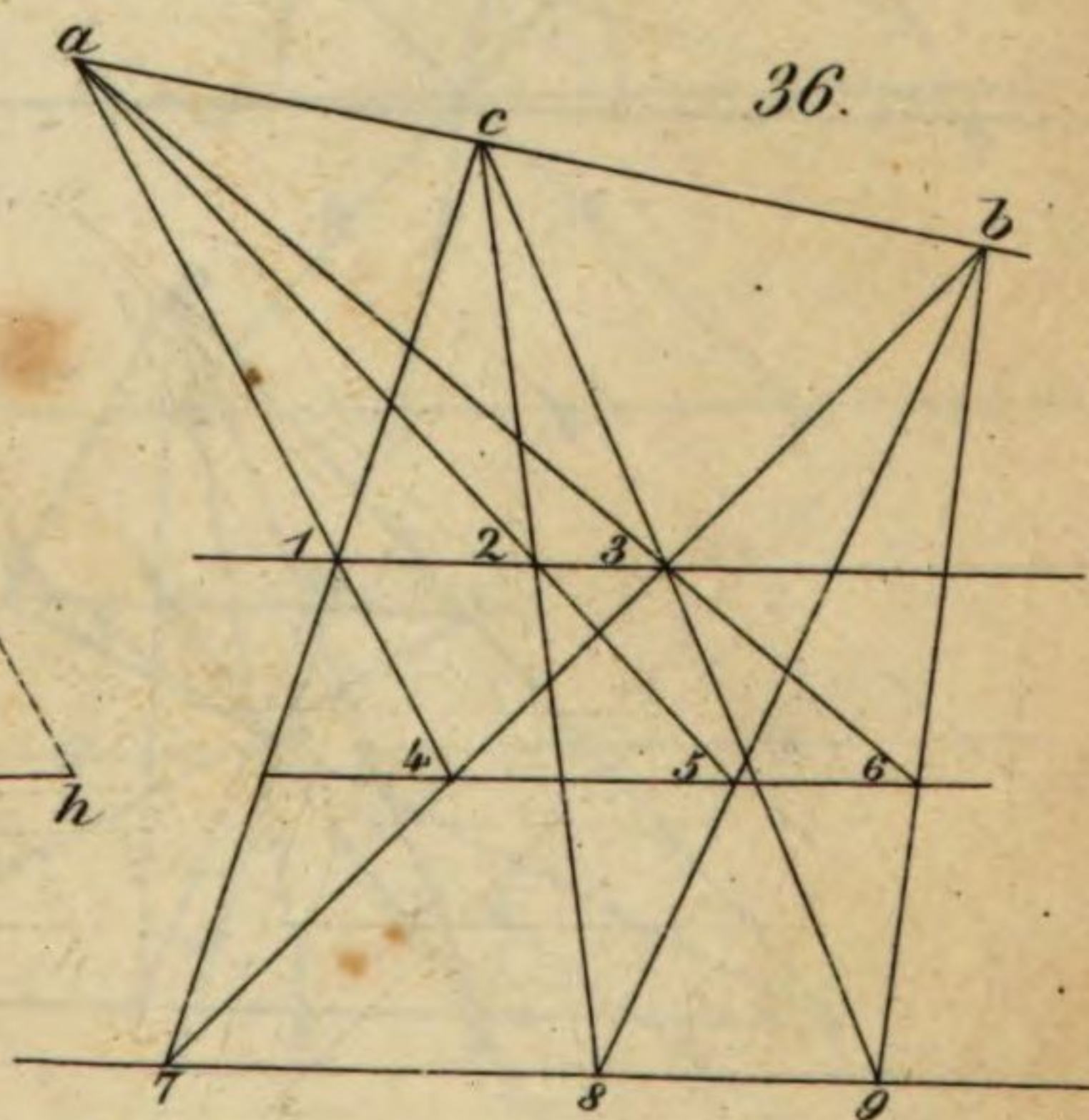
31. 32. 33.



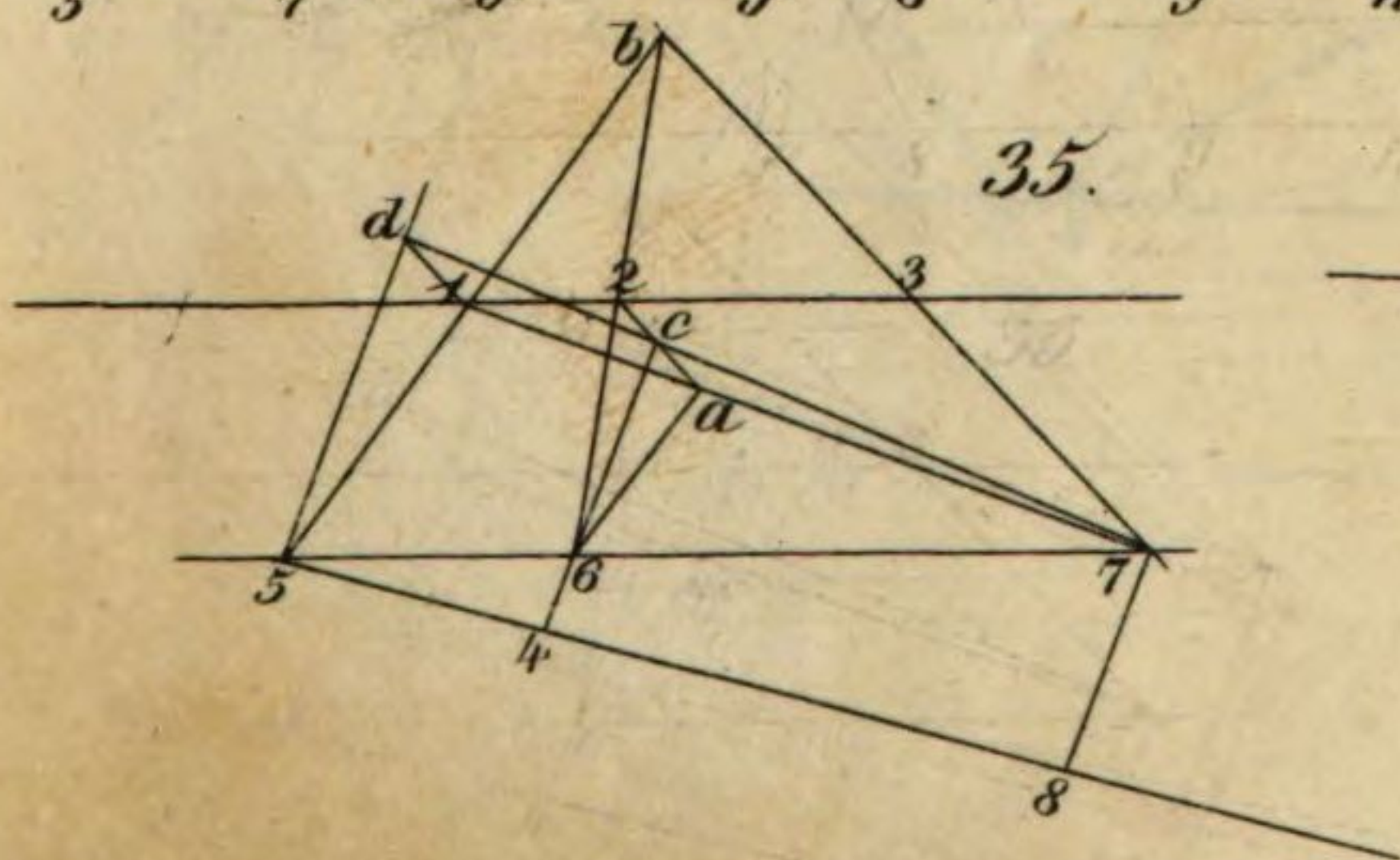
34.

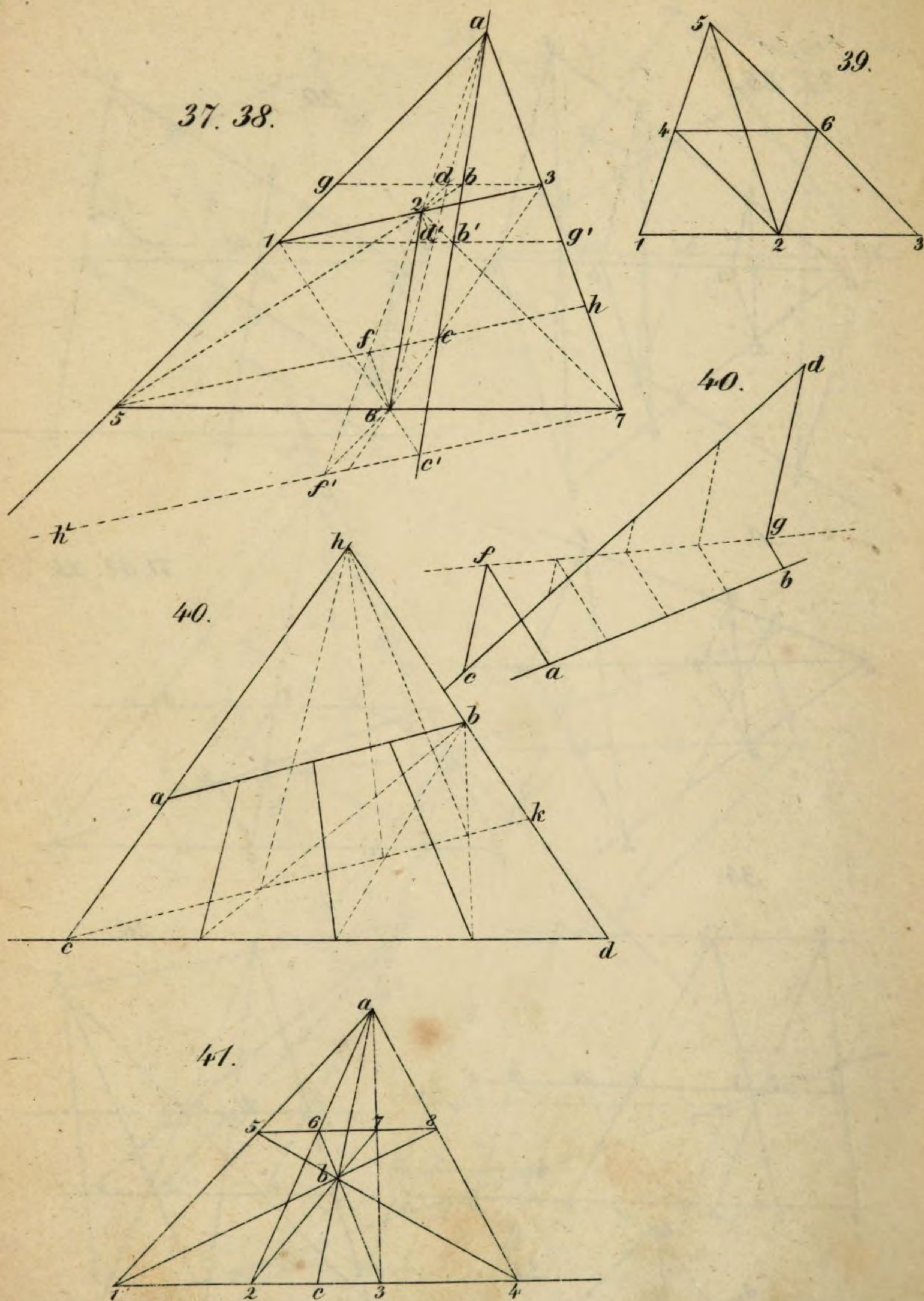


36.



35.

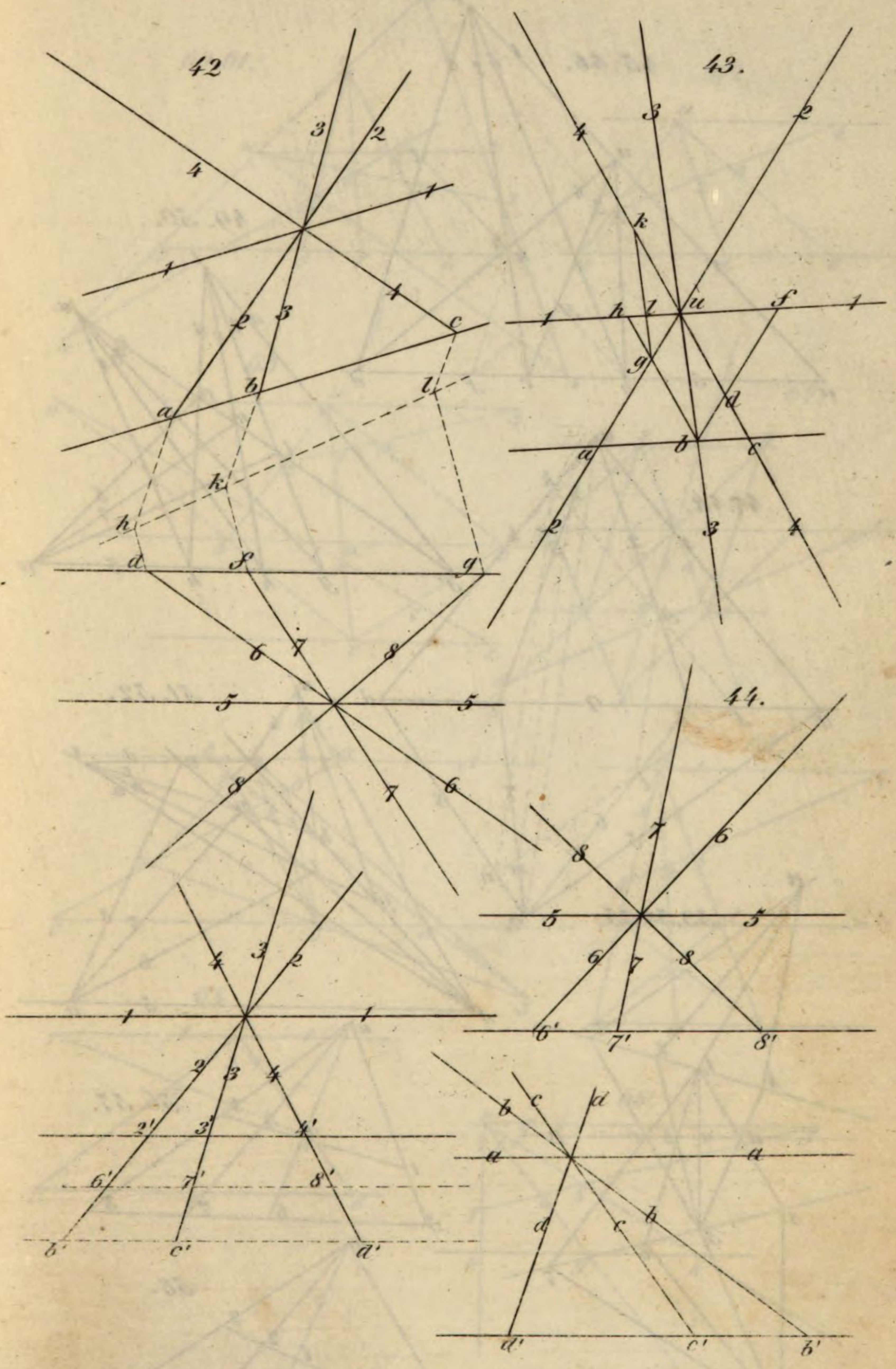


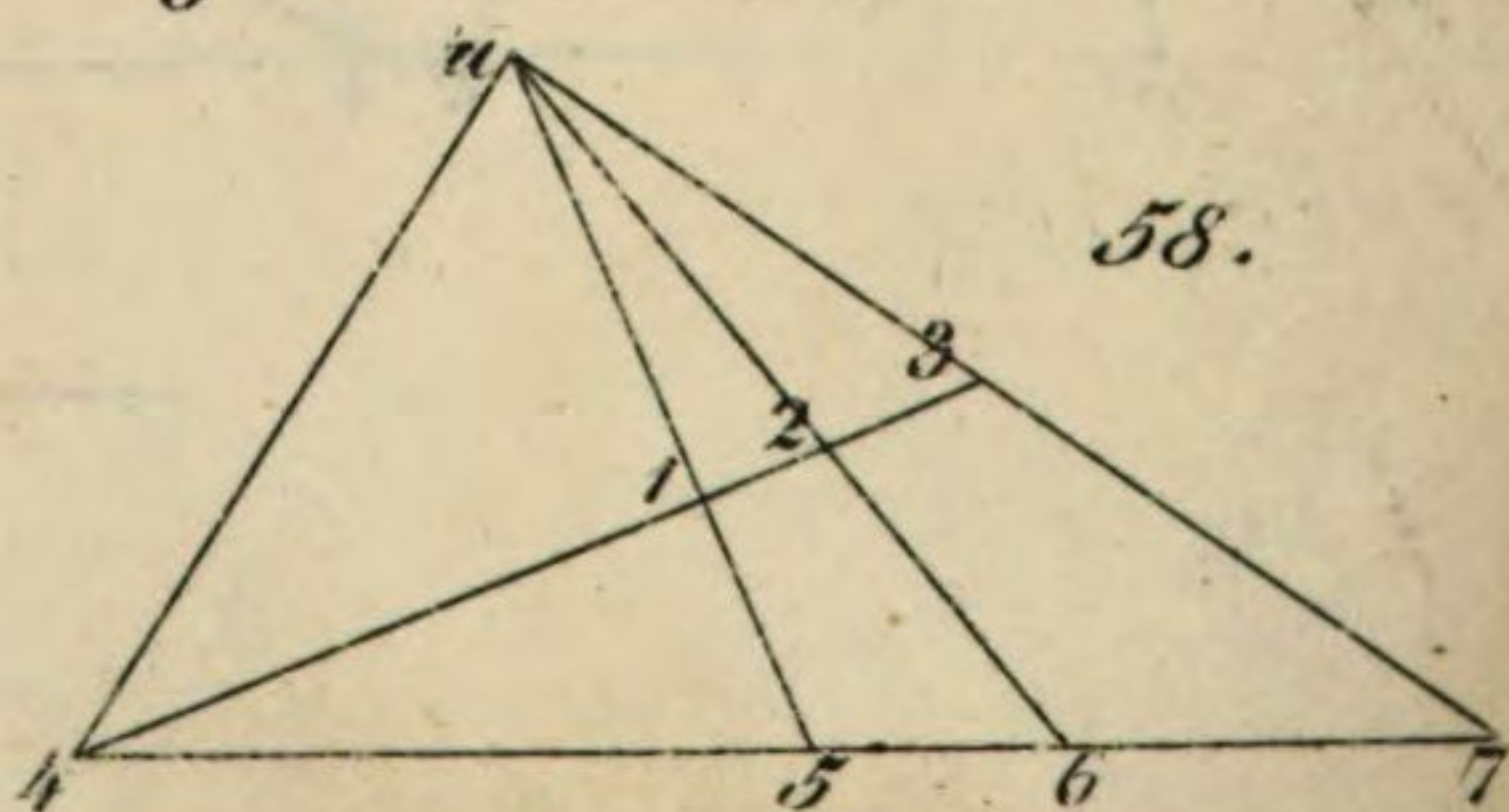
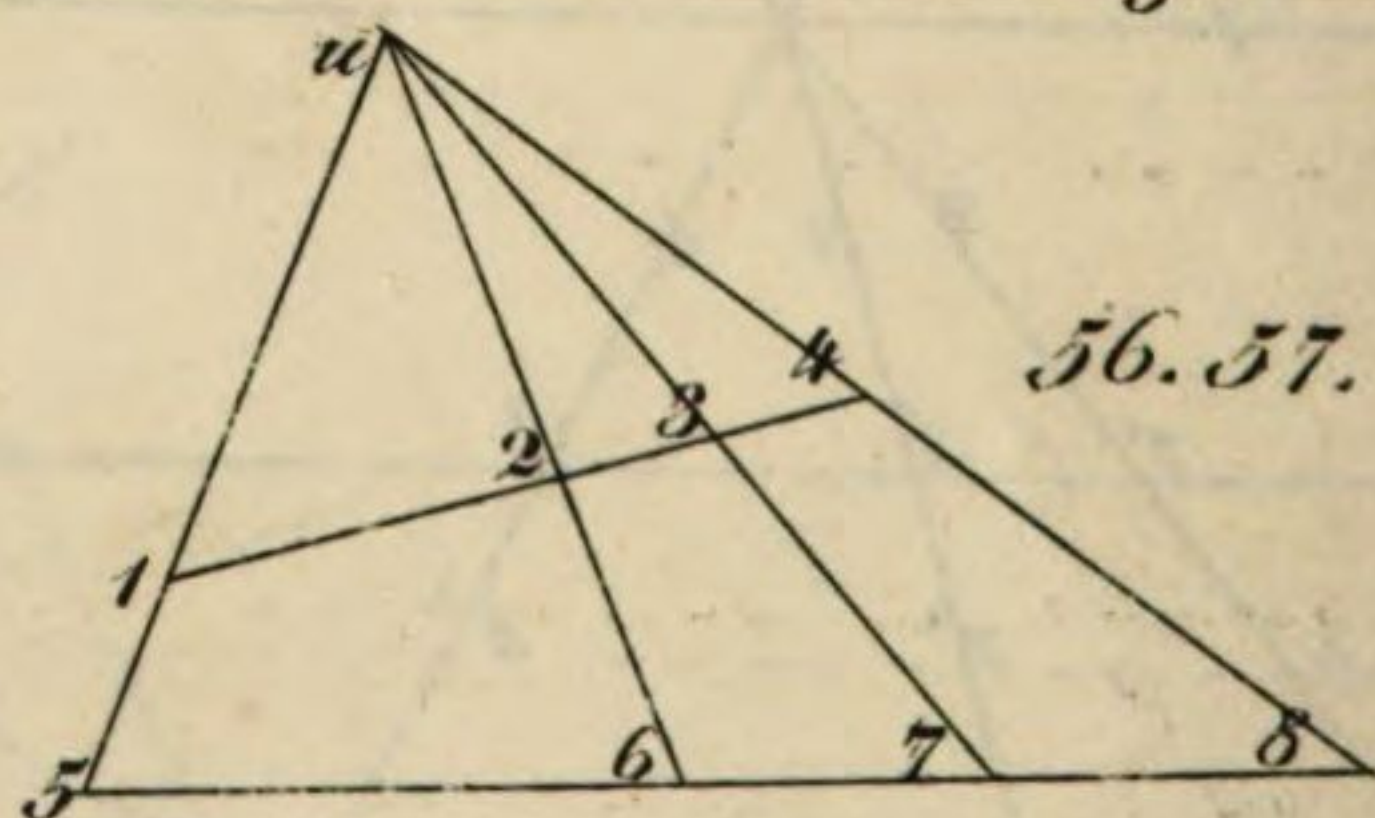
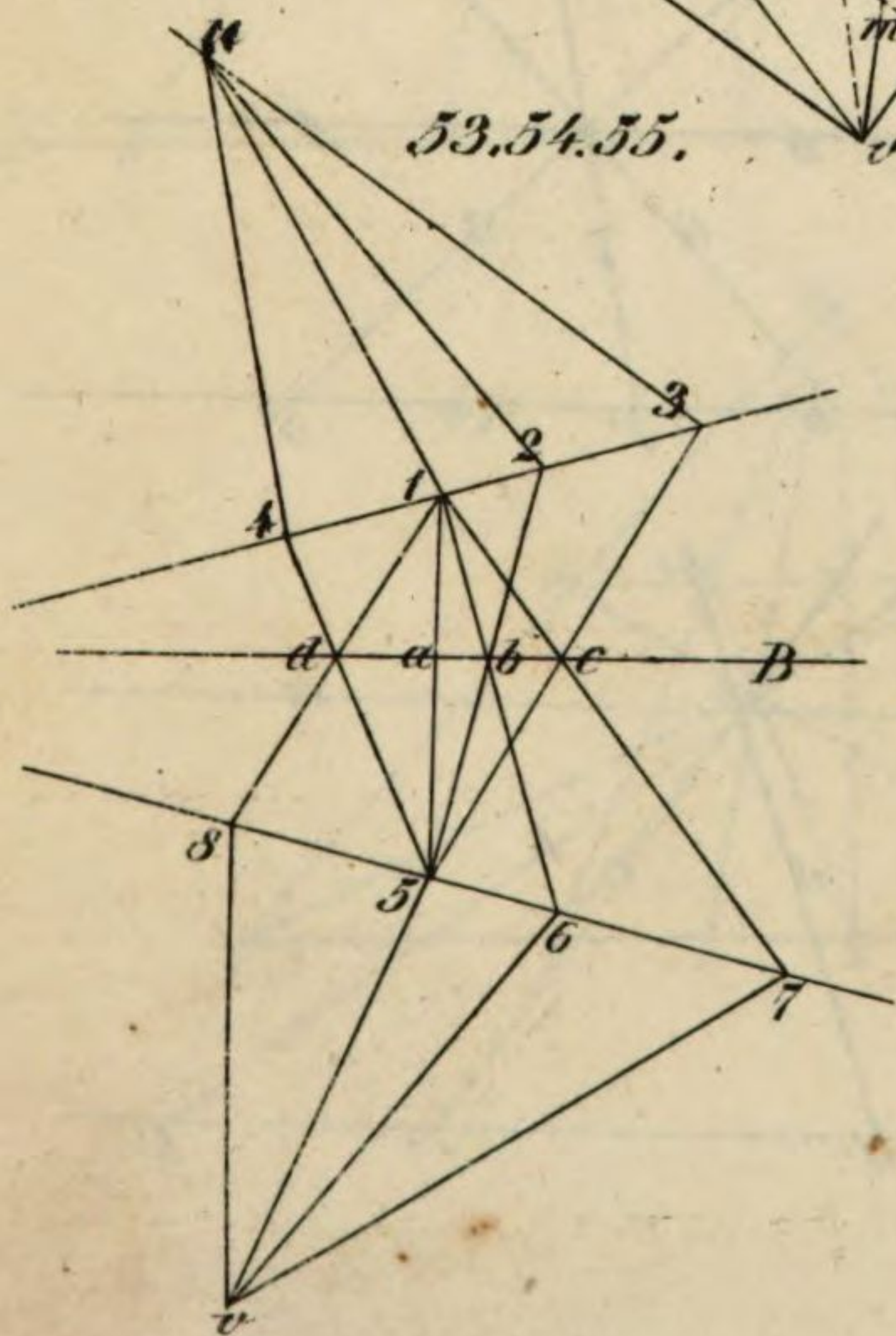
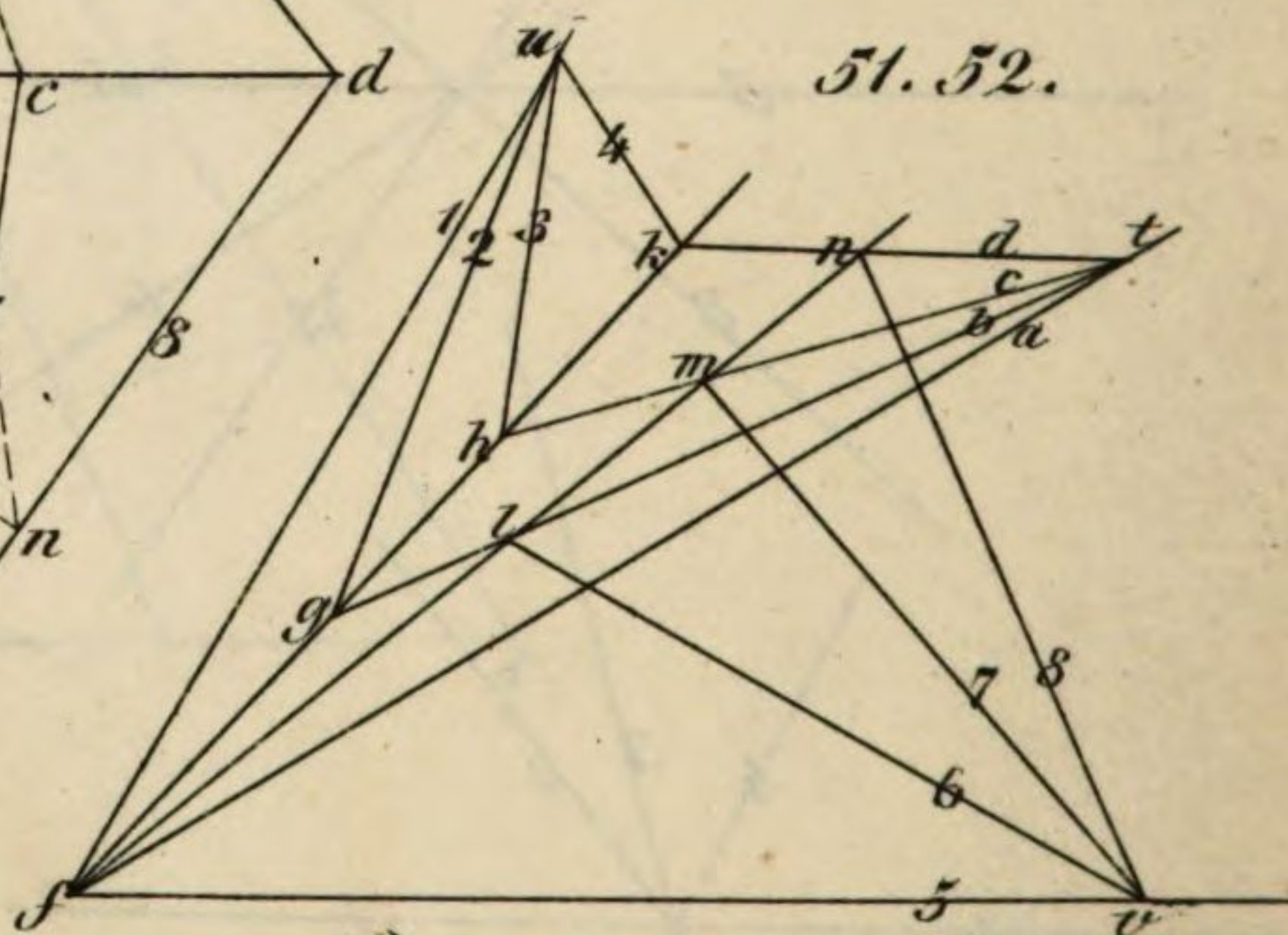
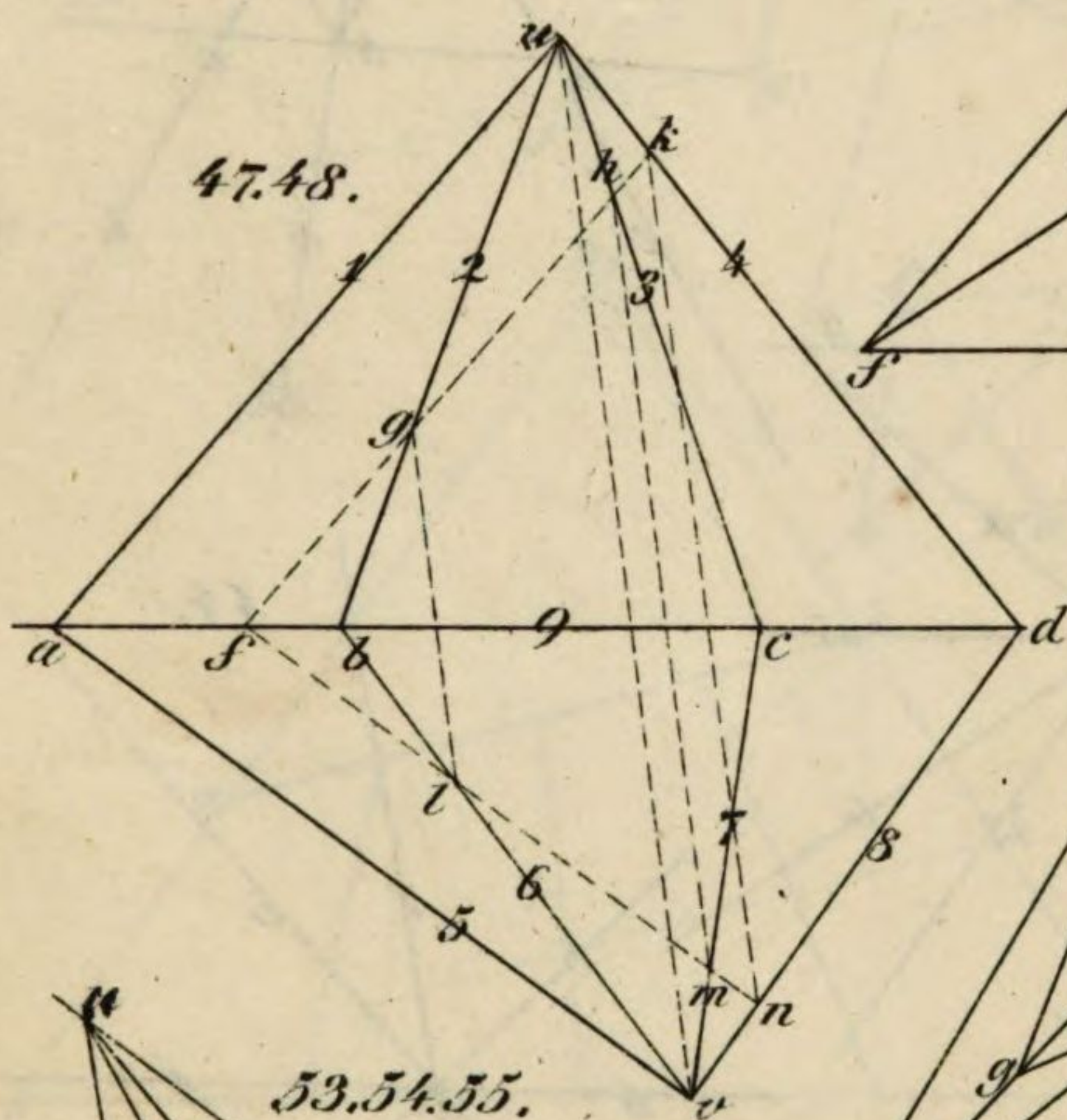
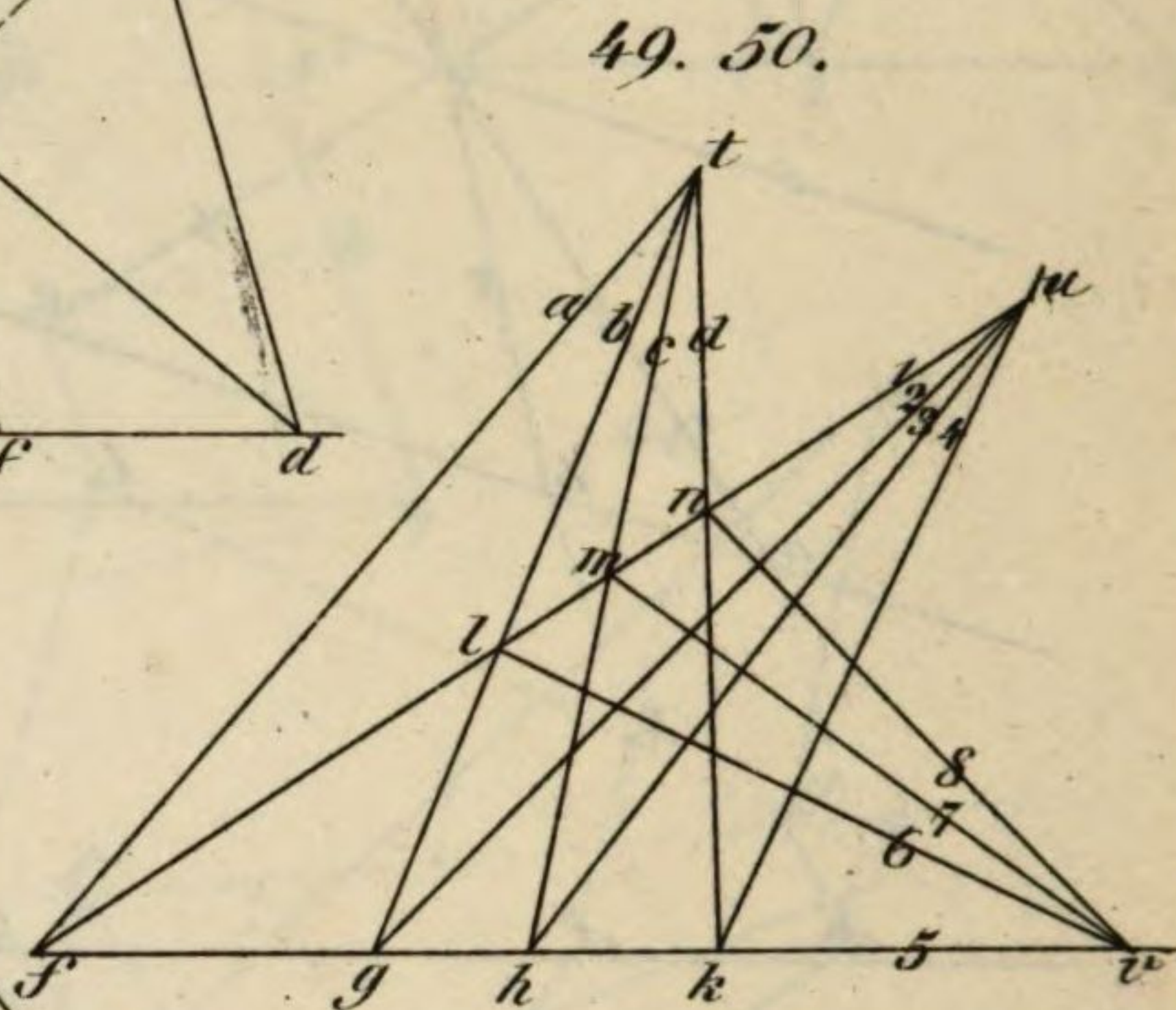
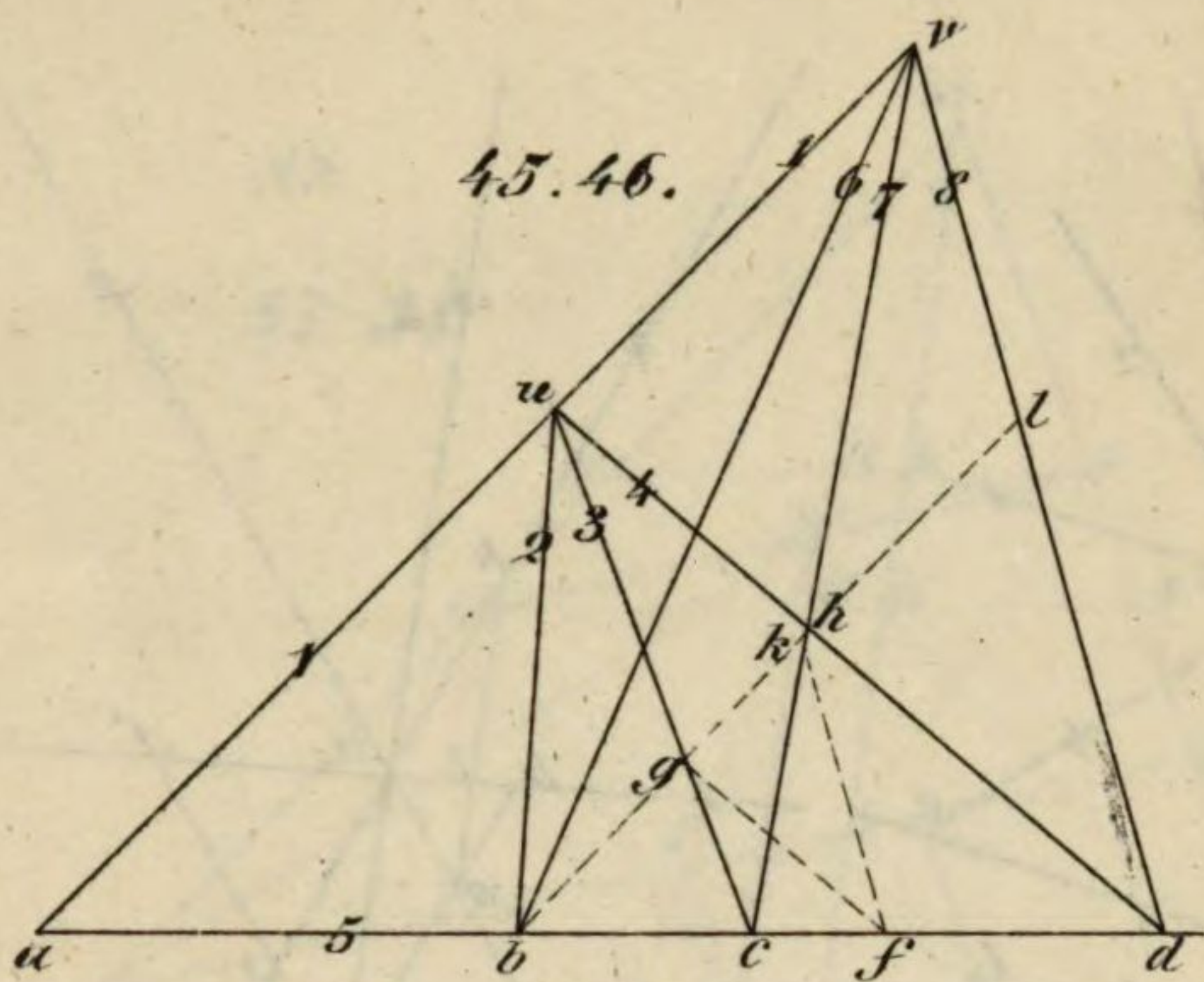


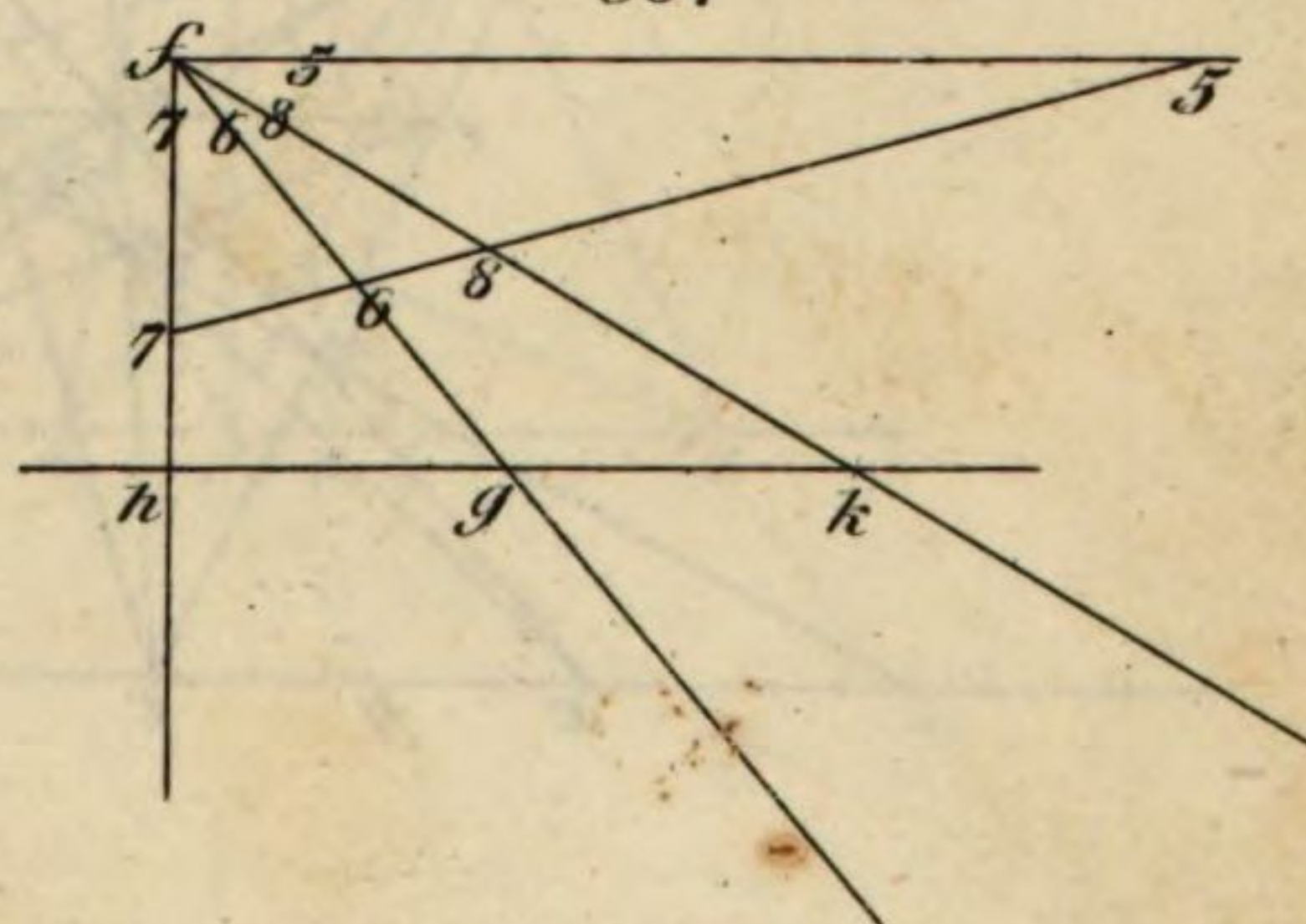
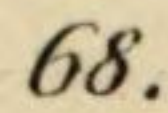
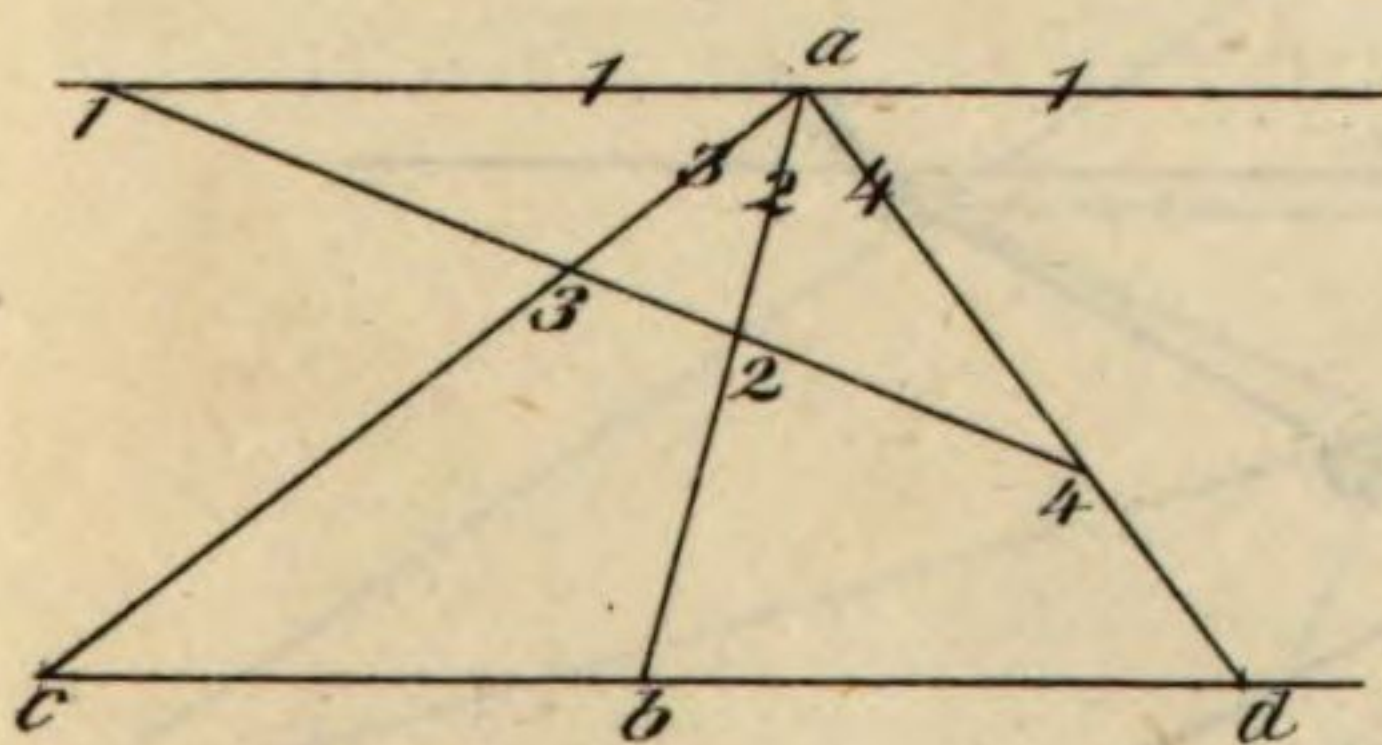
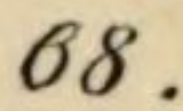
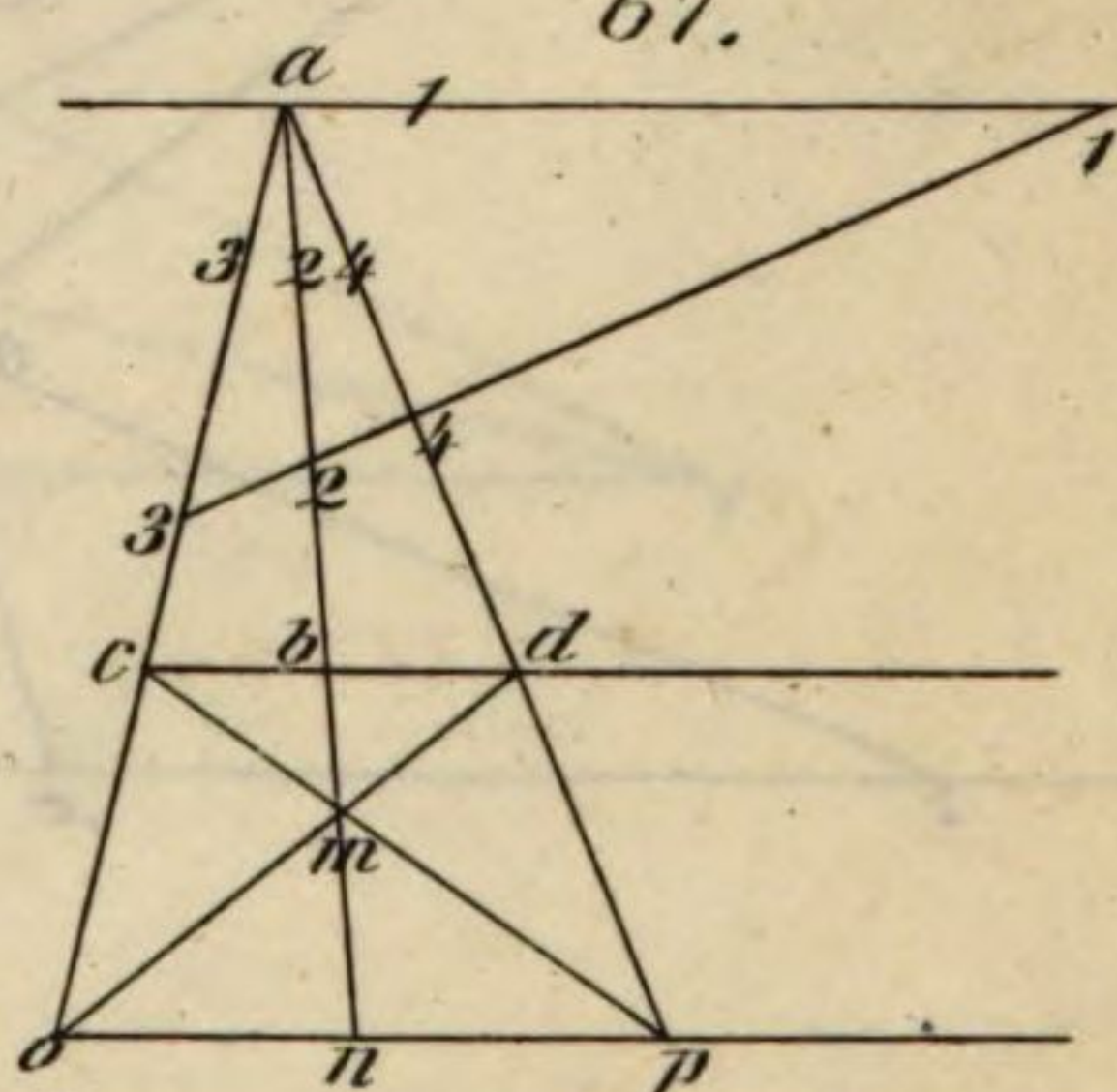
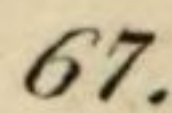
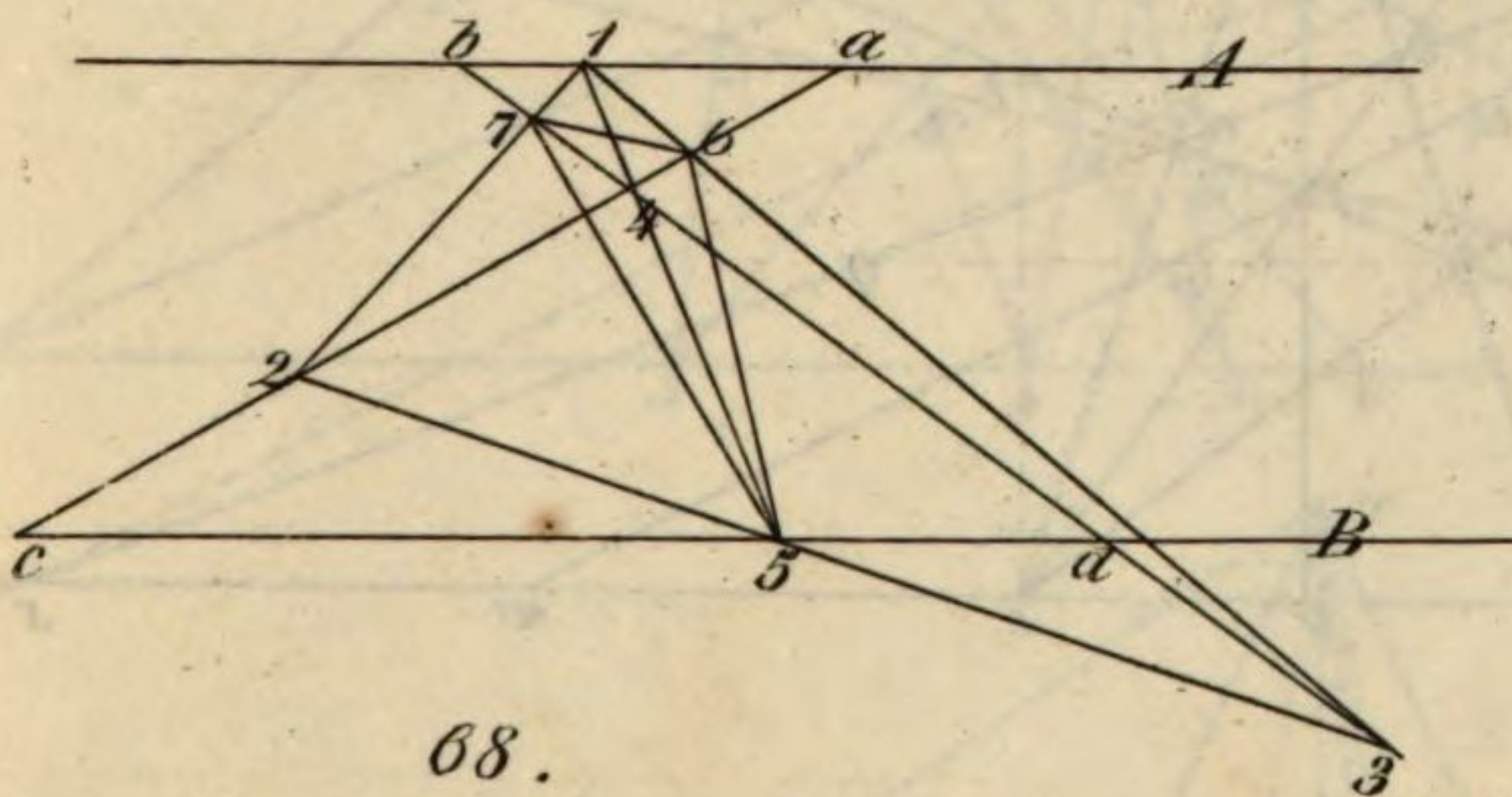
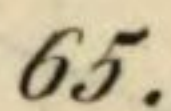
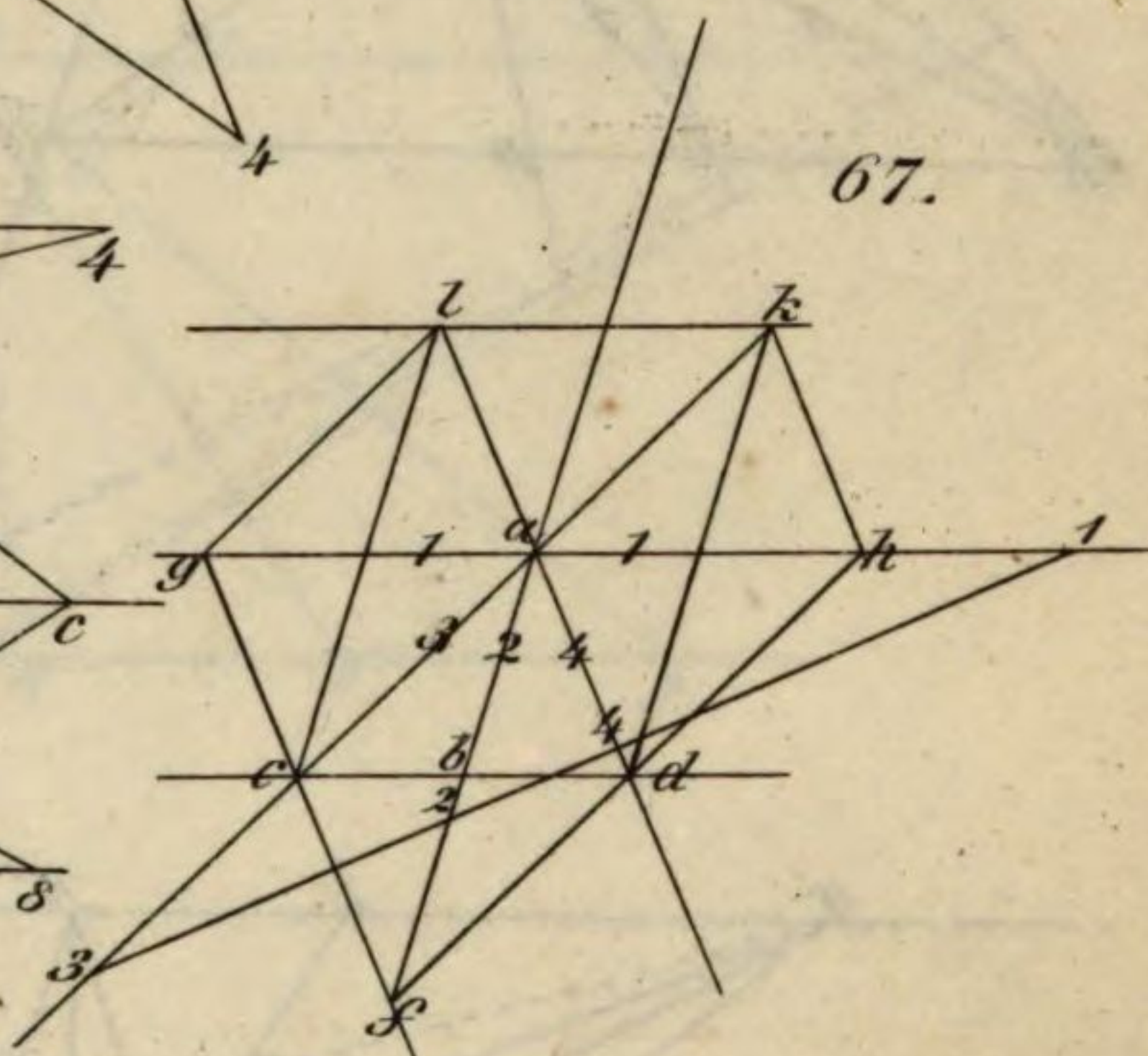
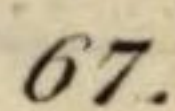
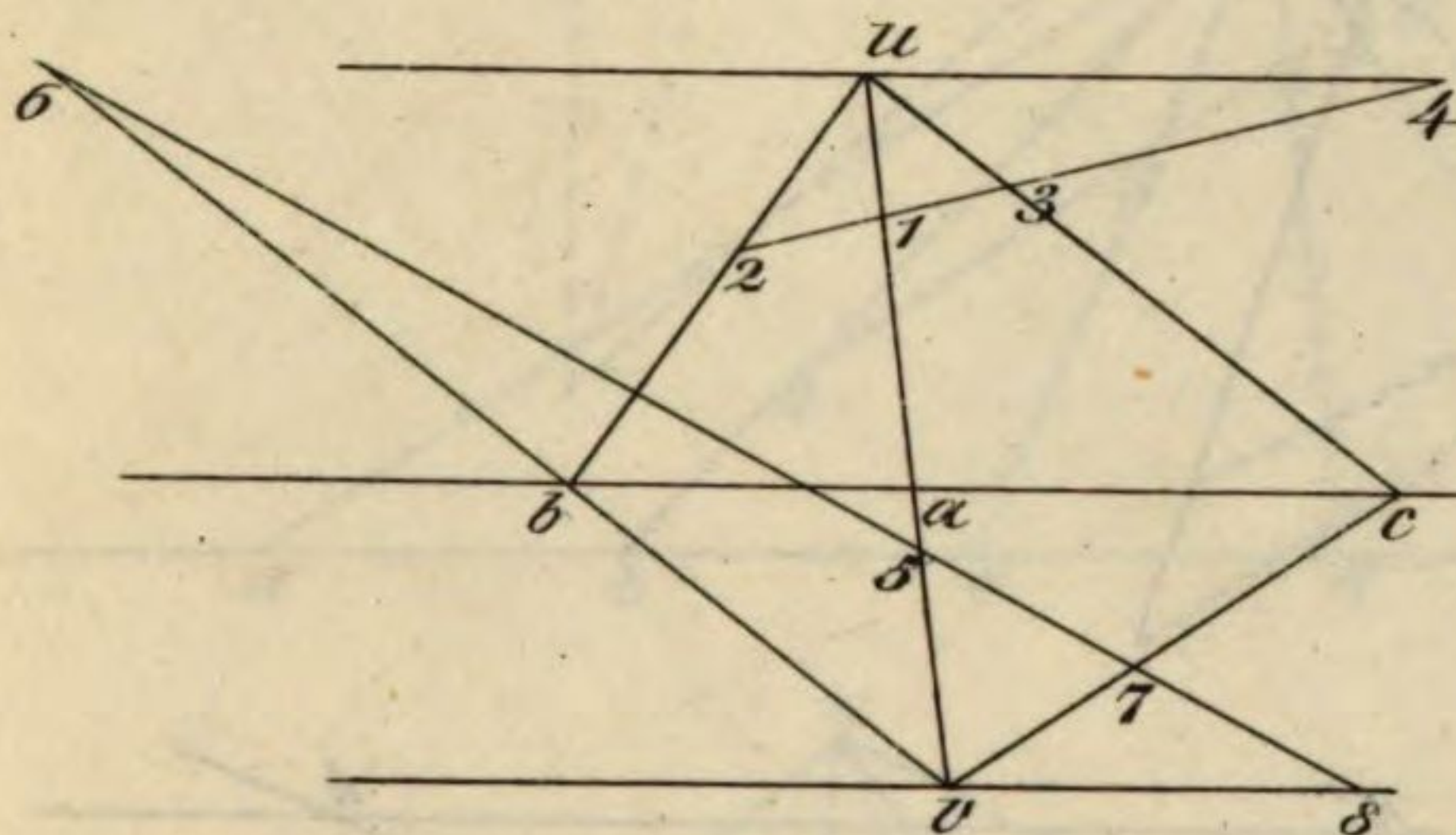
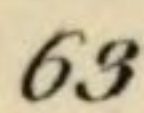
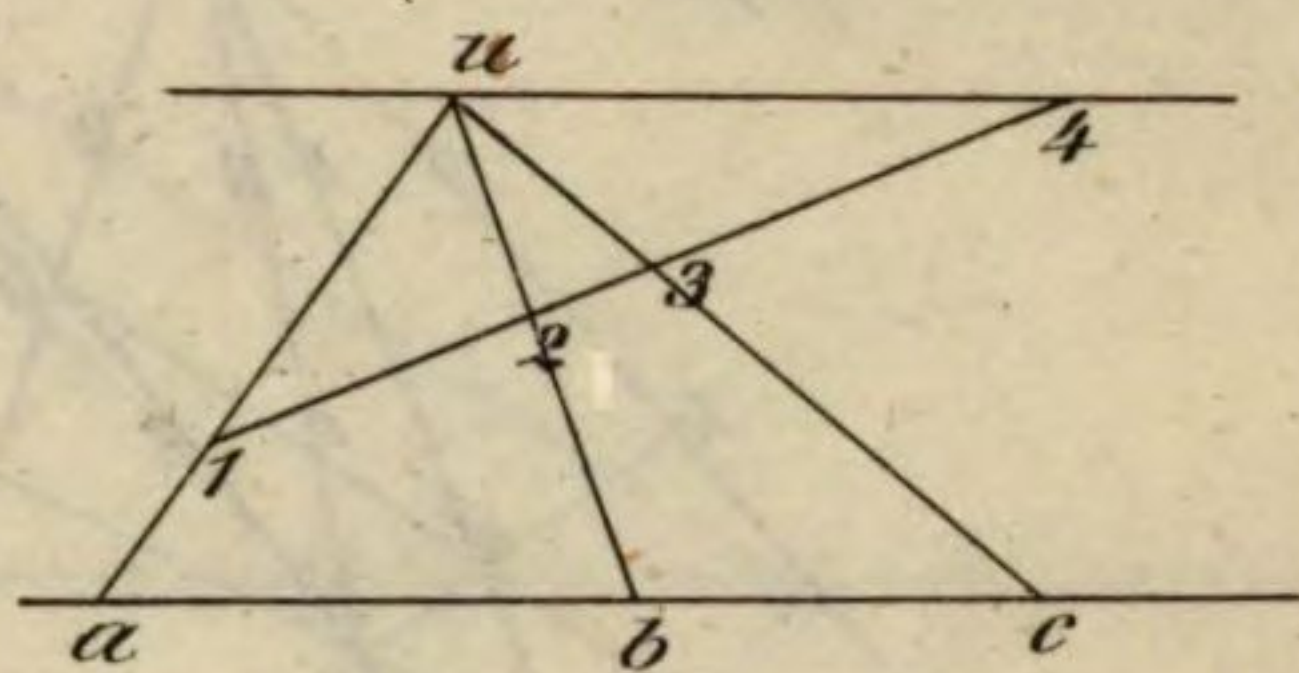
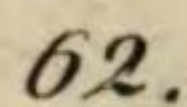
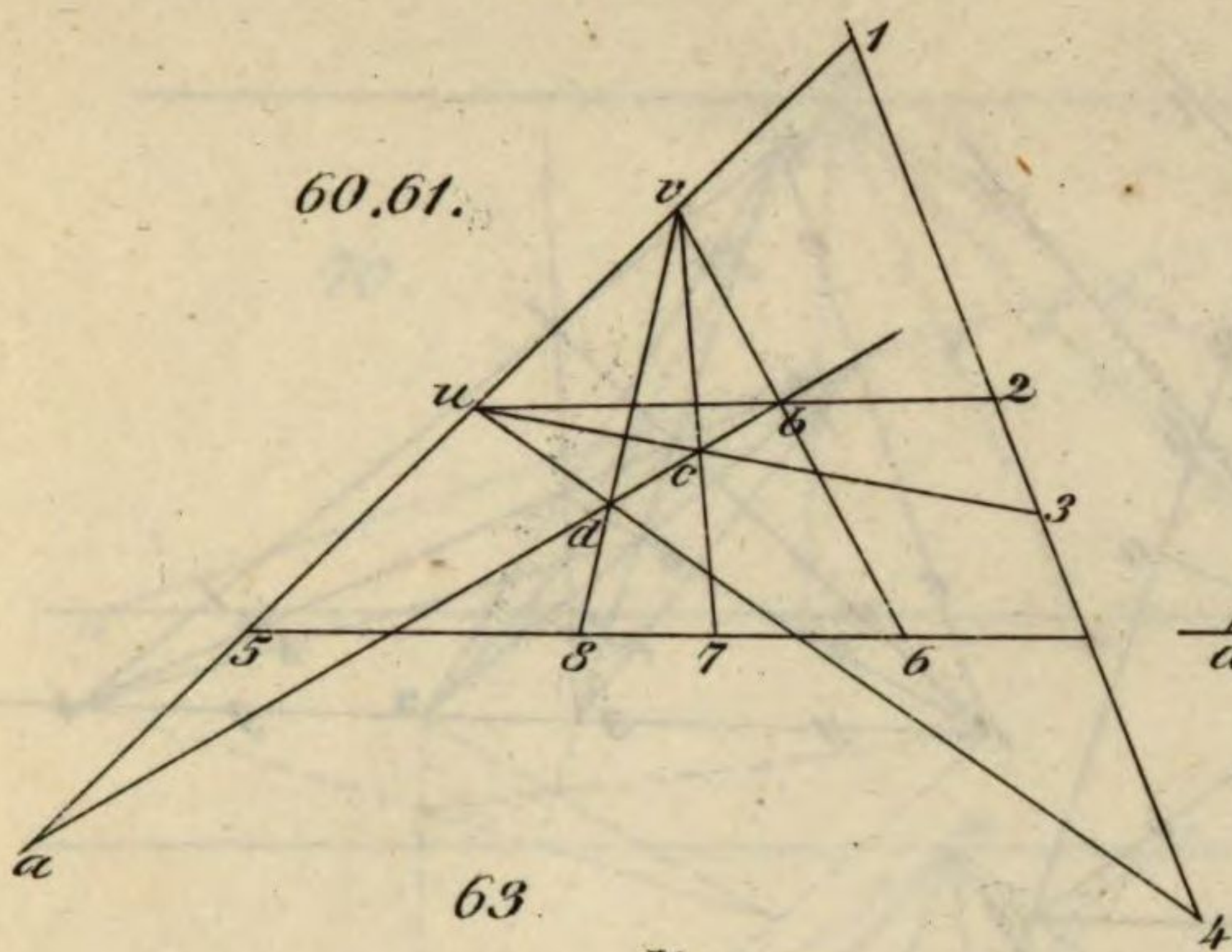
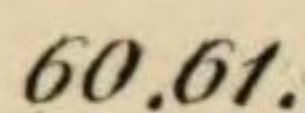
42

43.

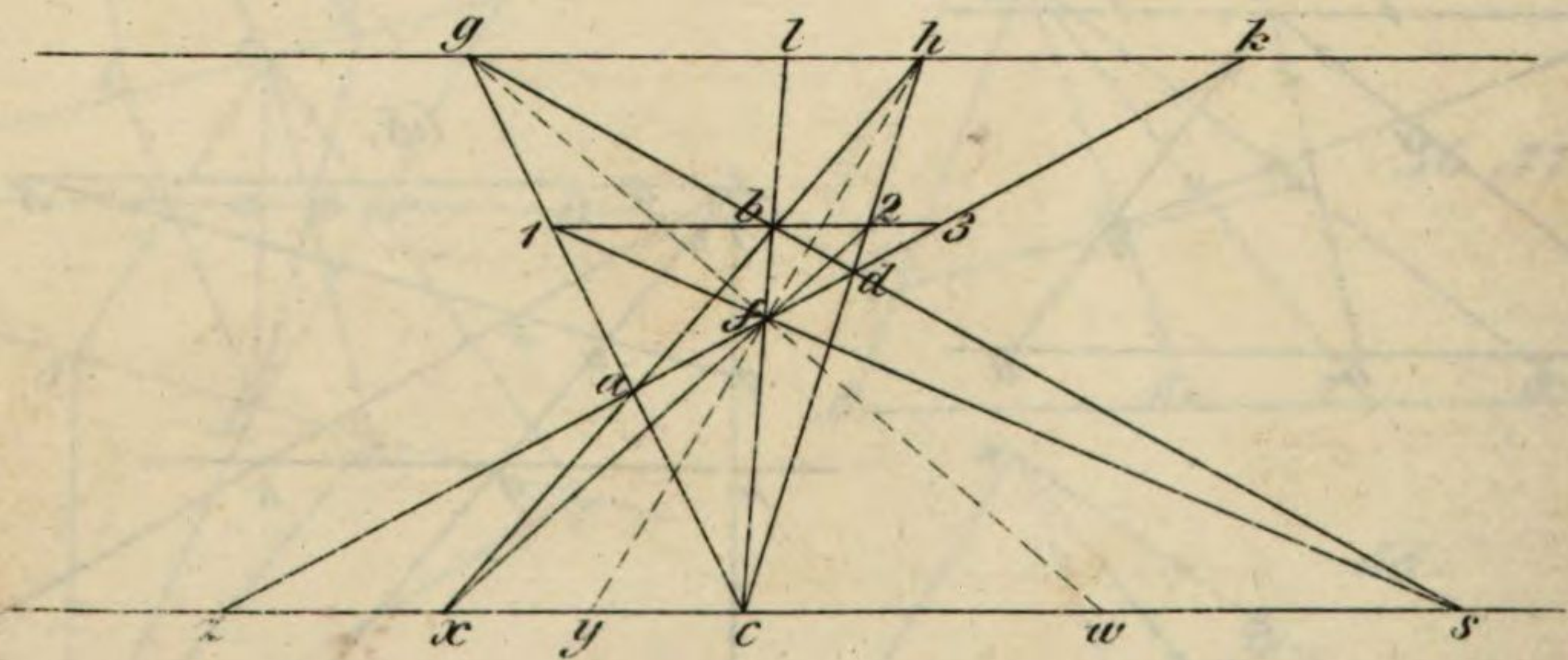
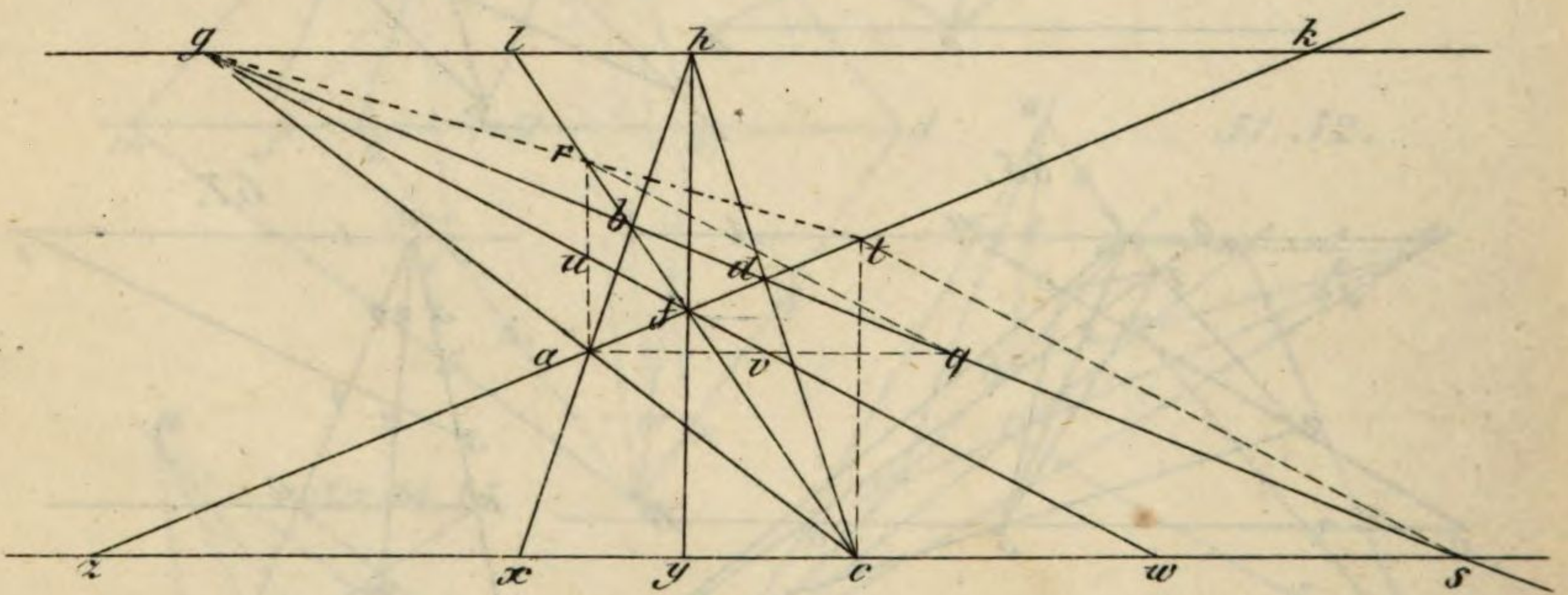
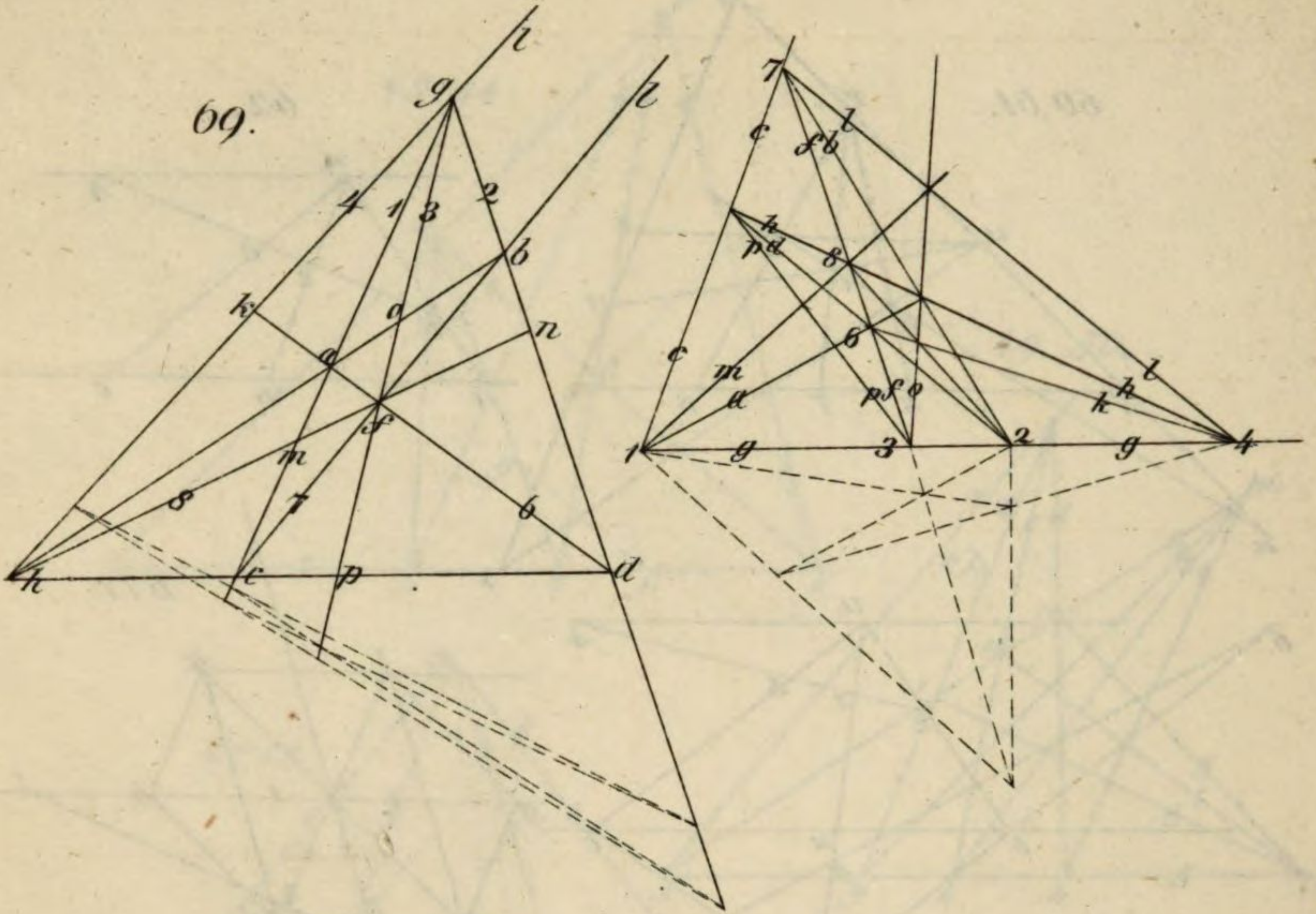
44.



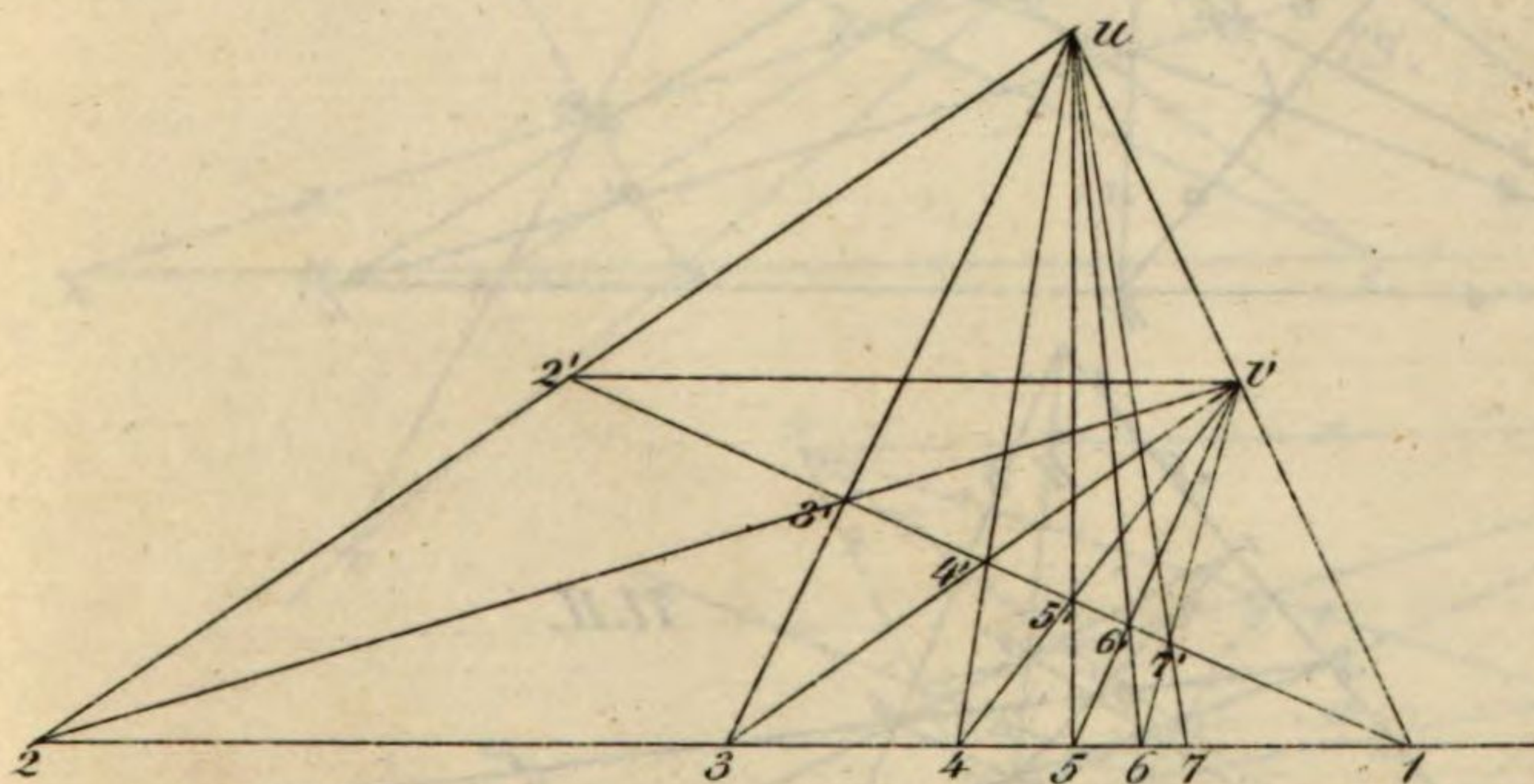
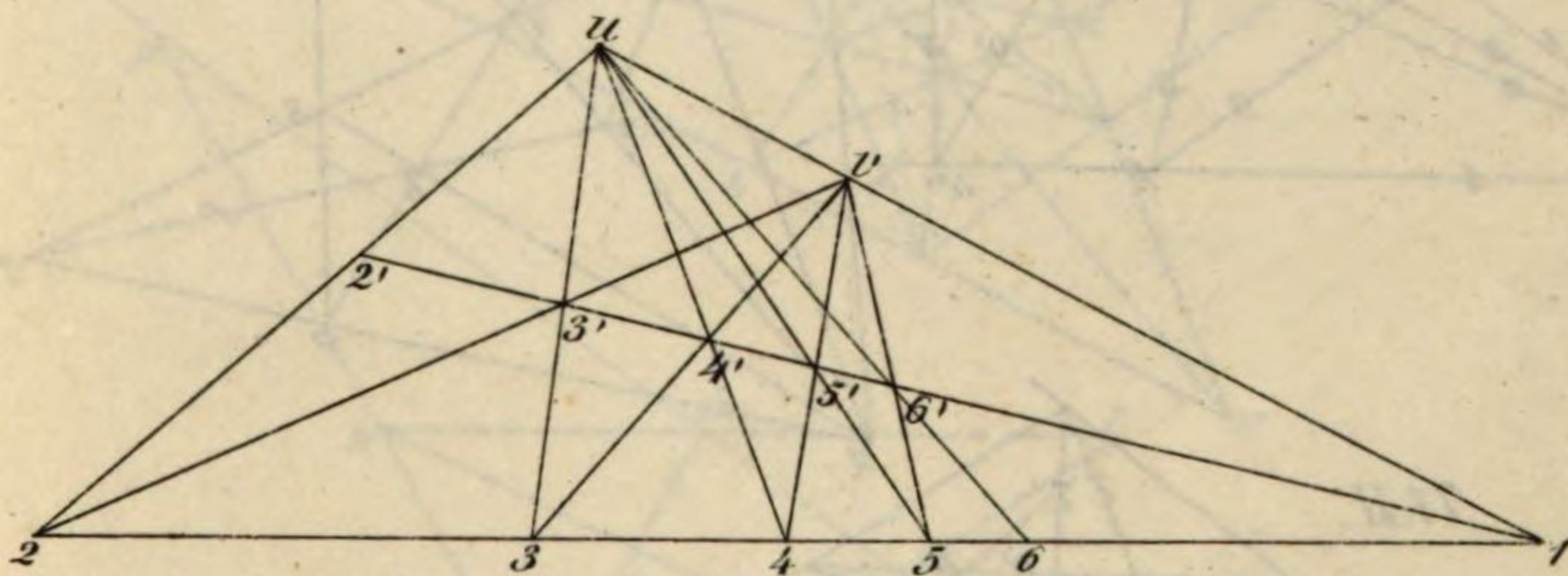
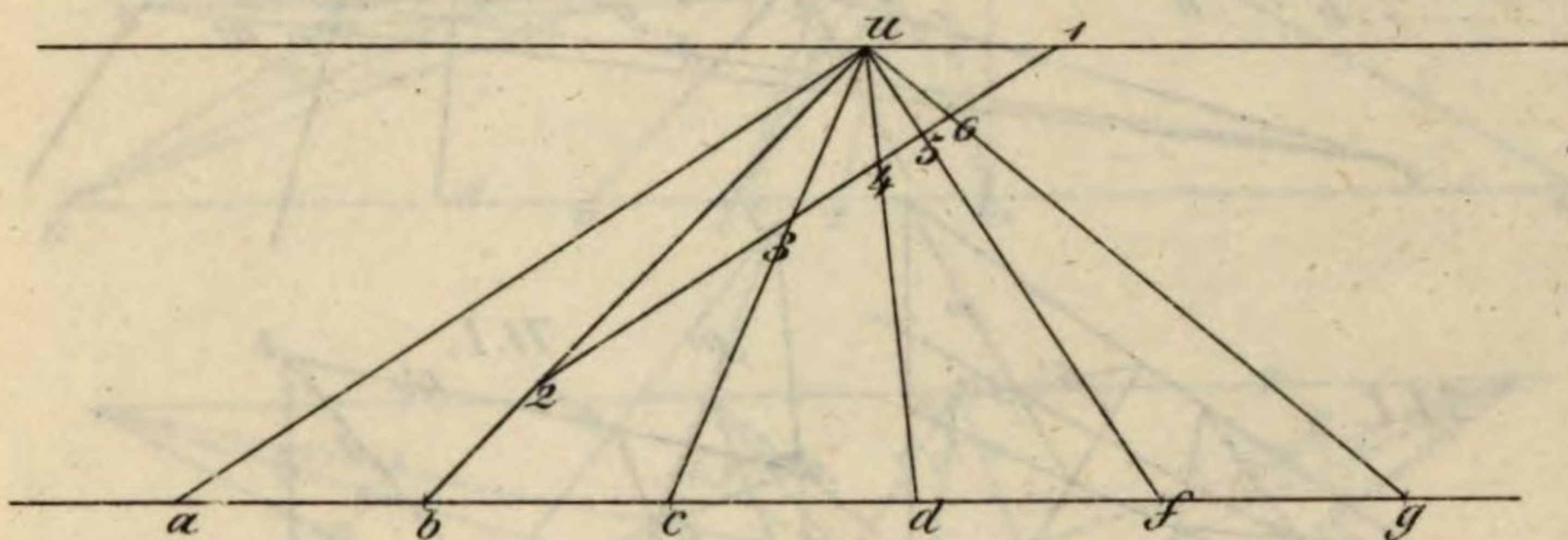
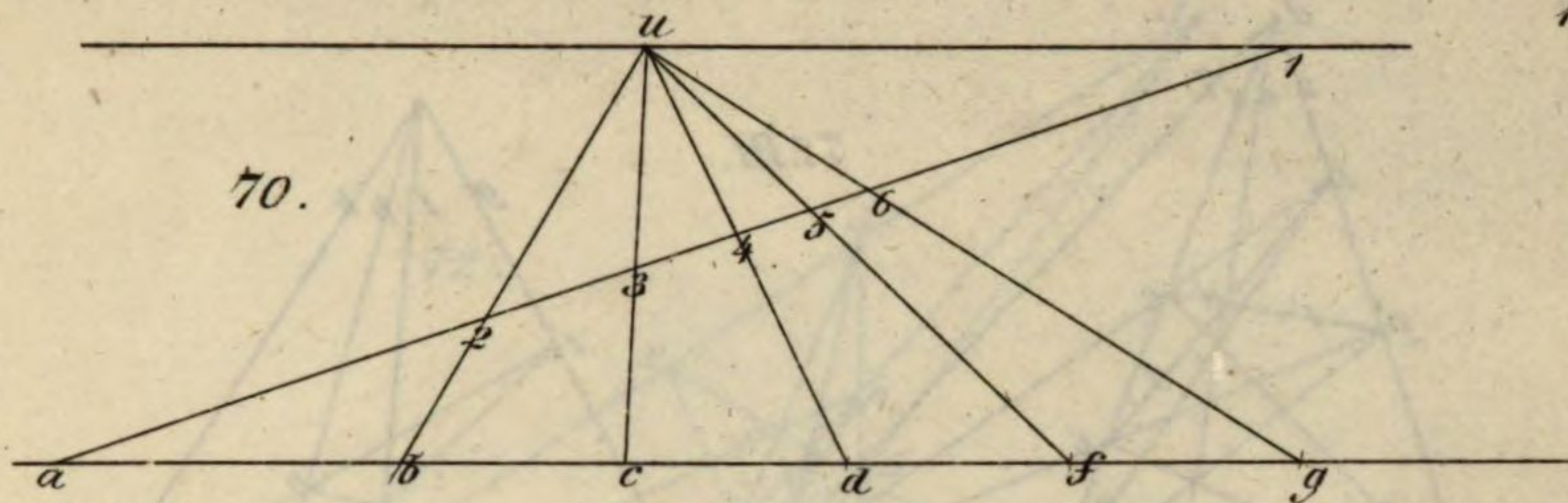


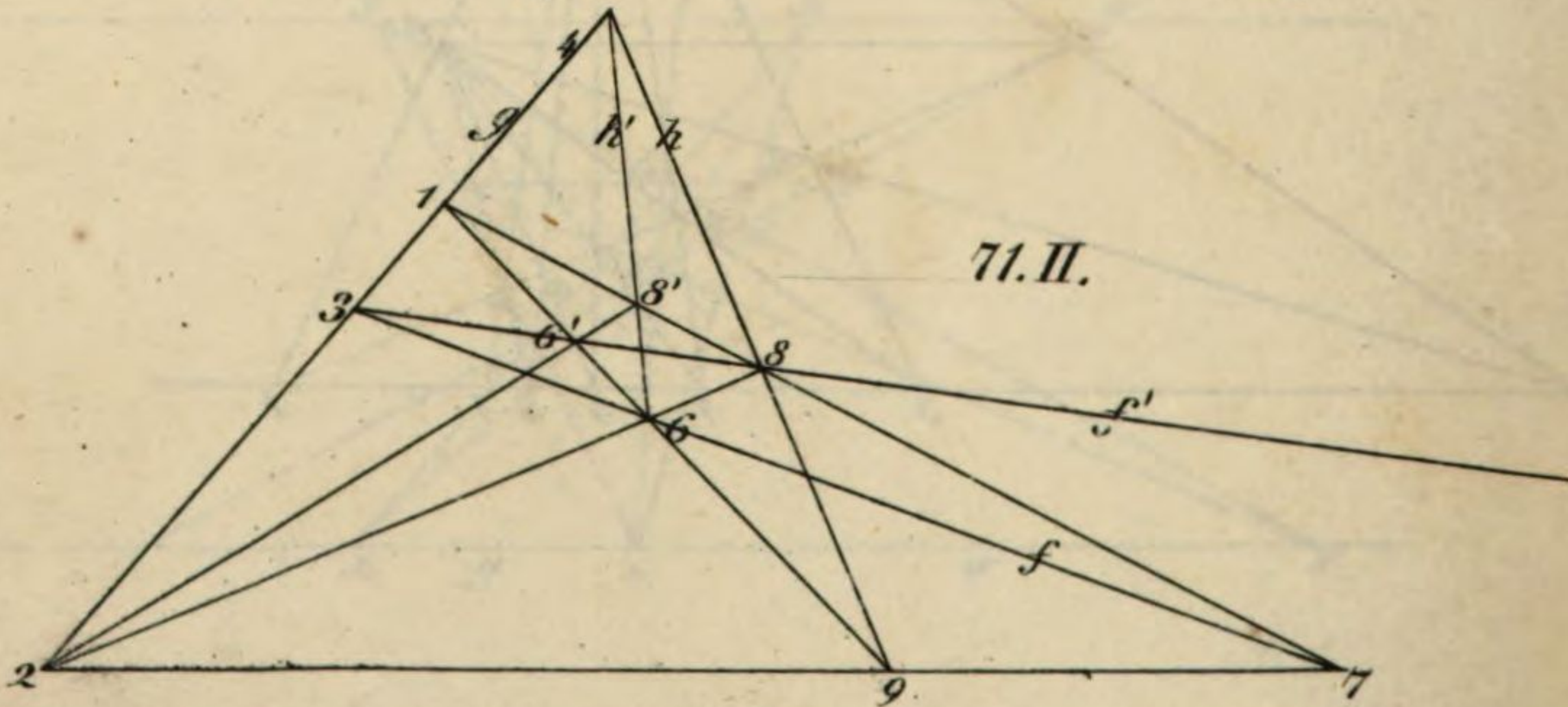
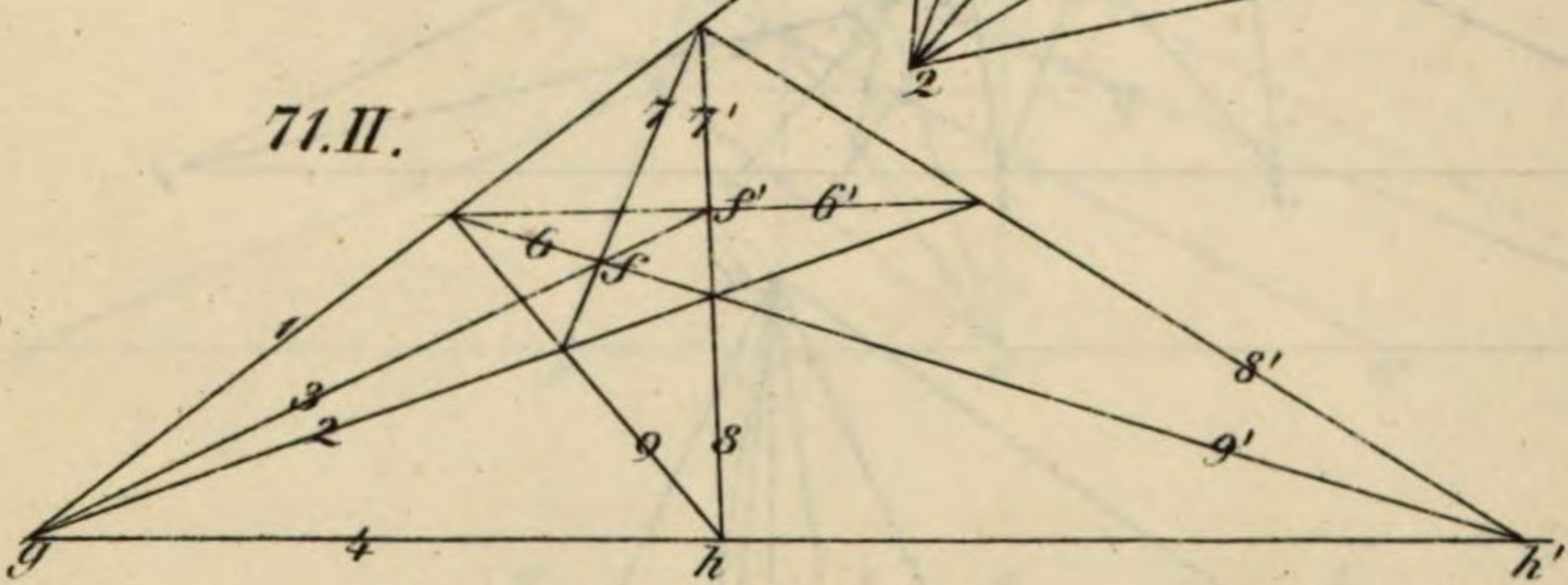
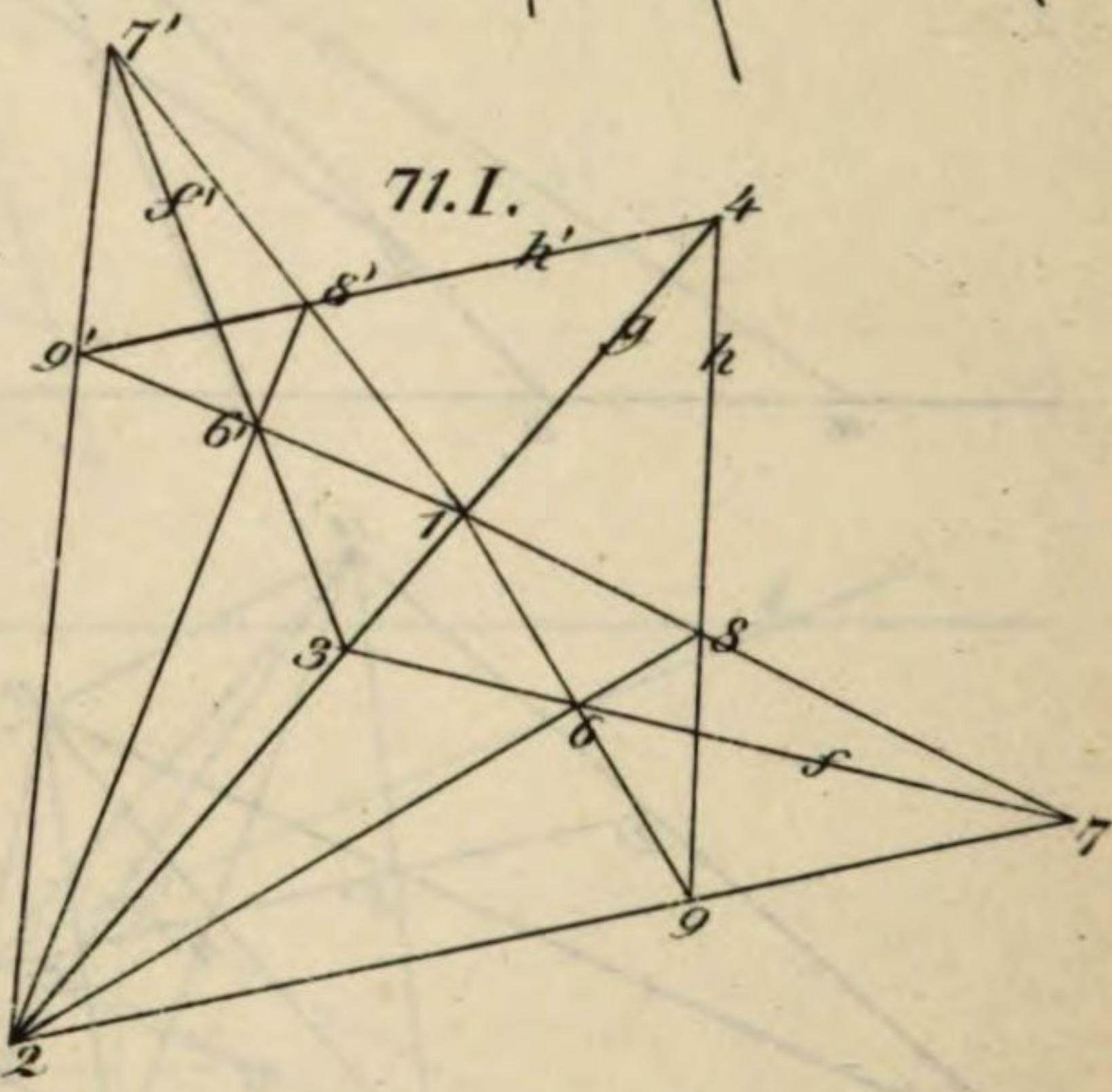
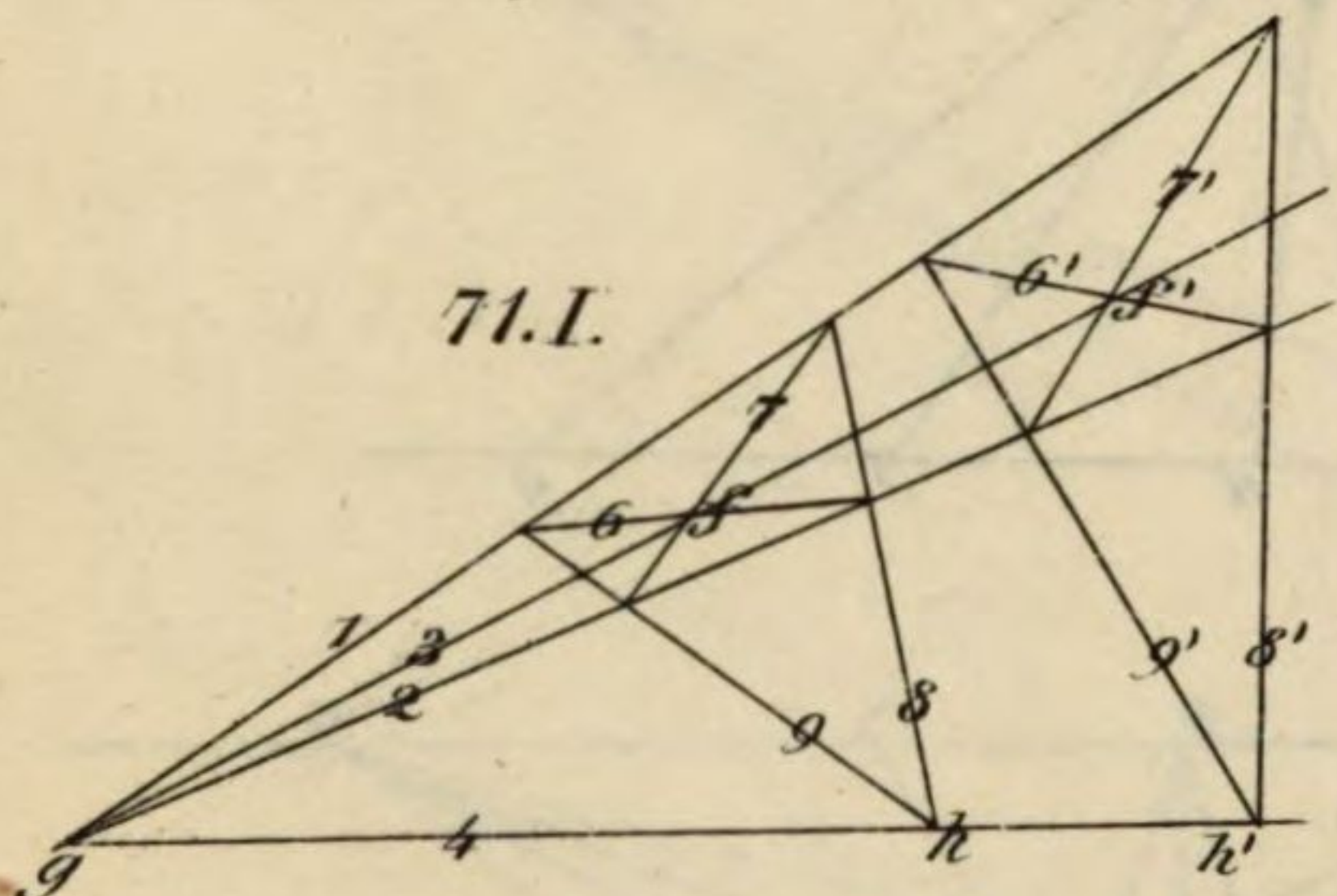
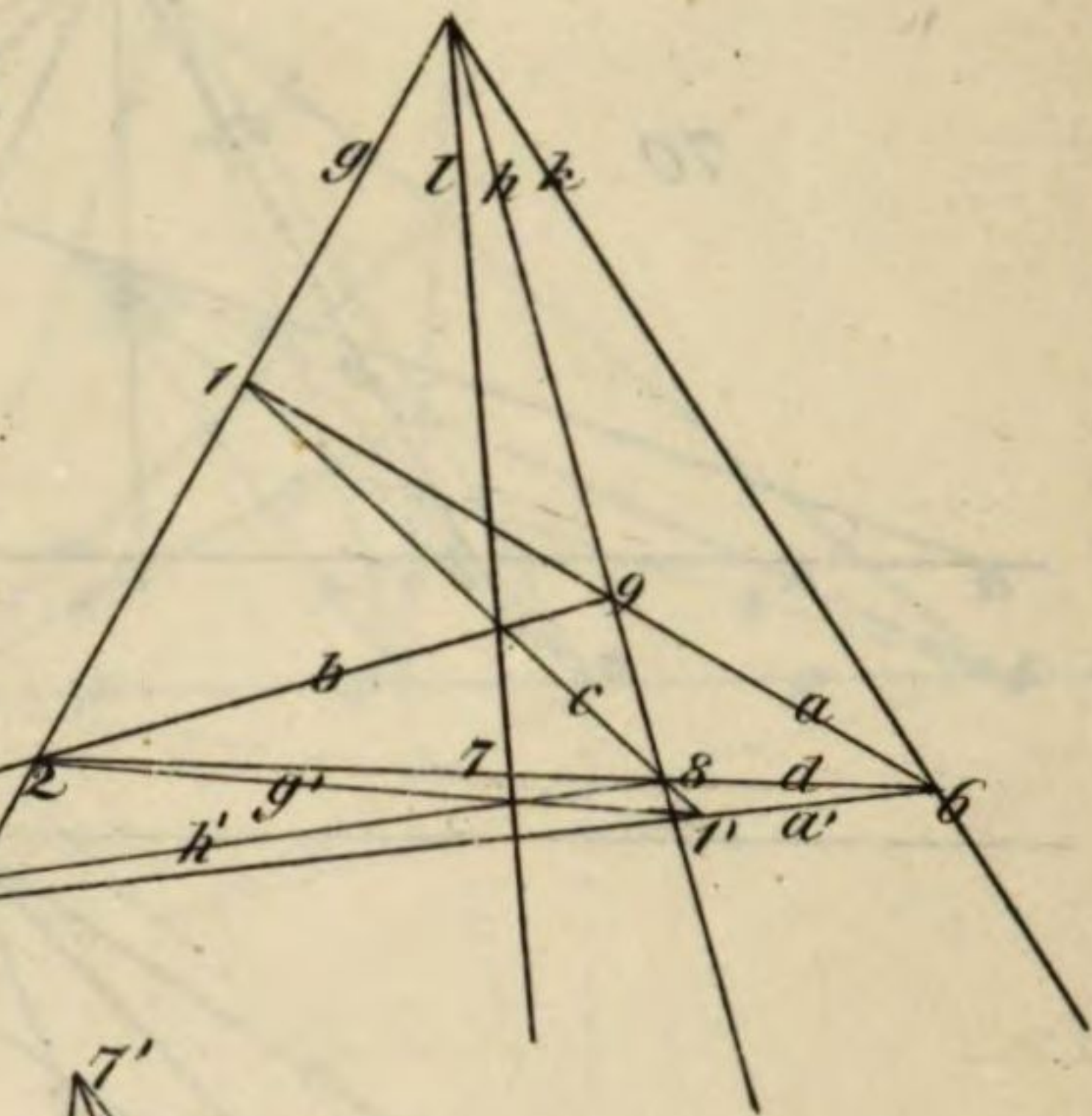
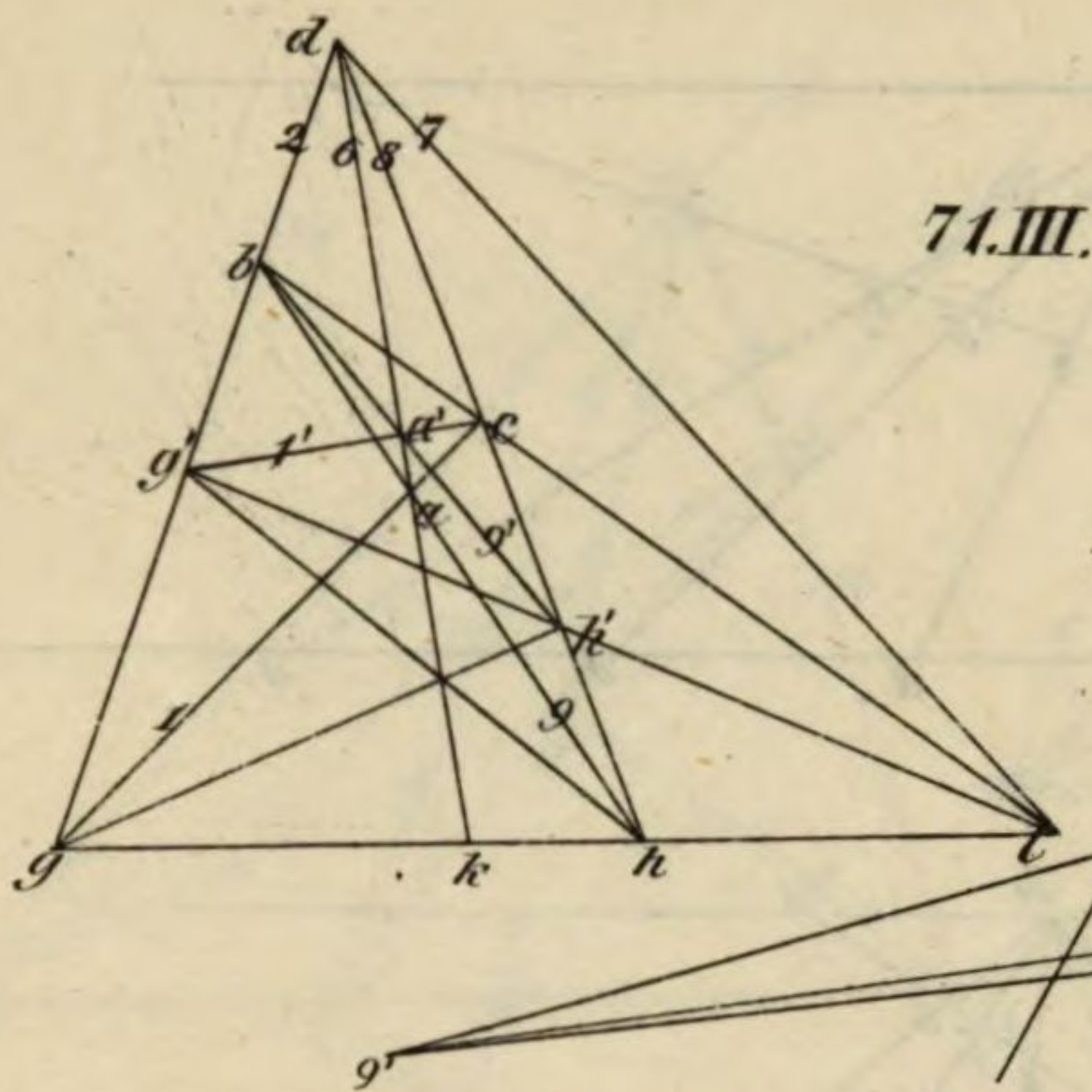


69.

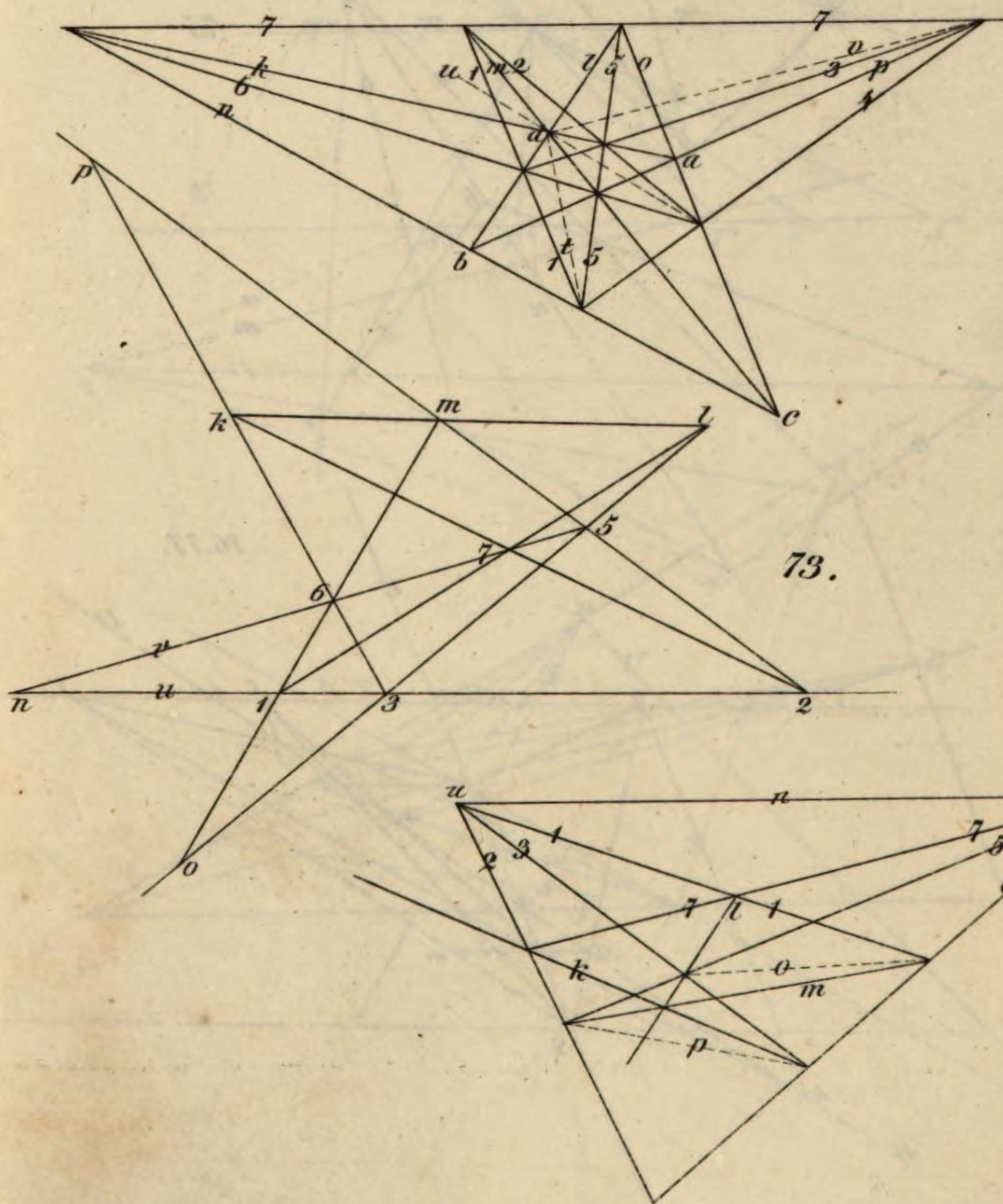
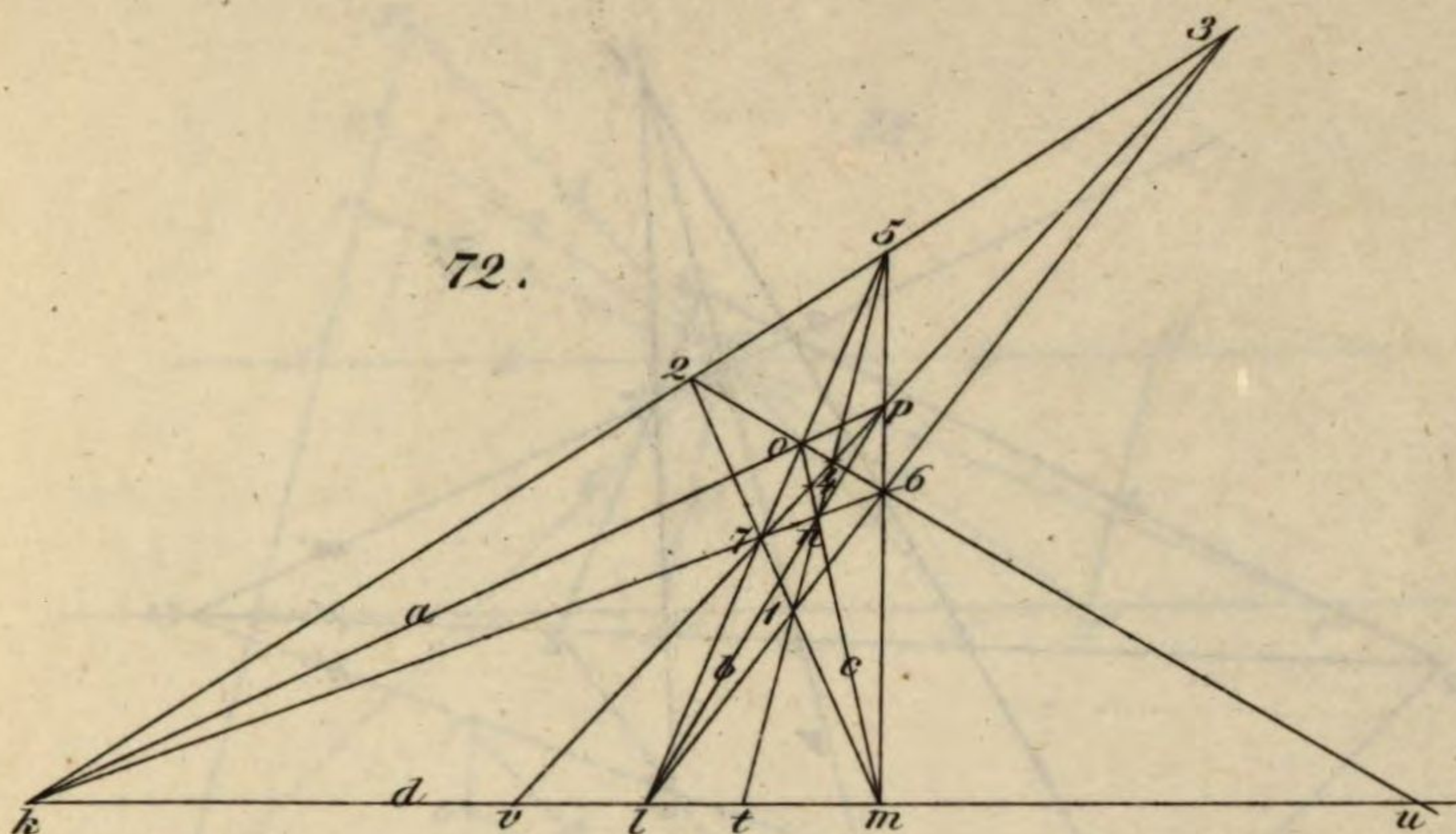


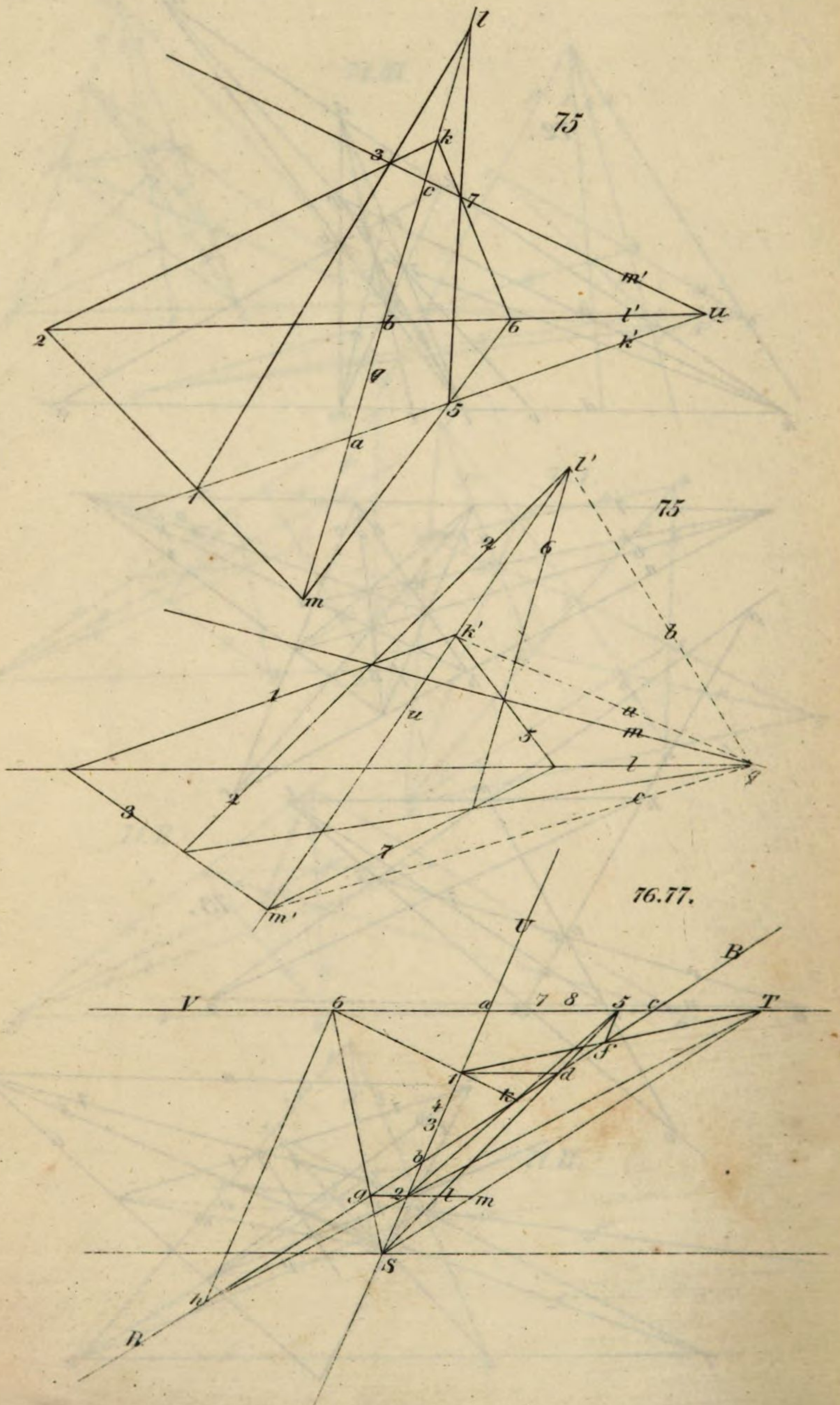
70.



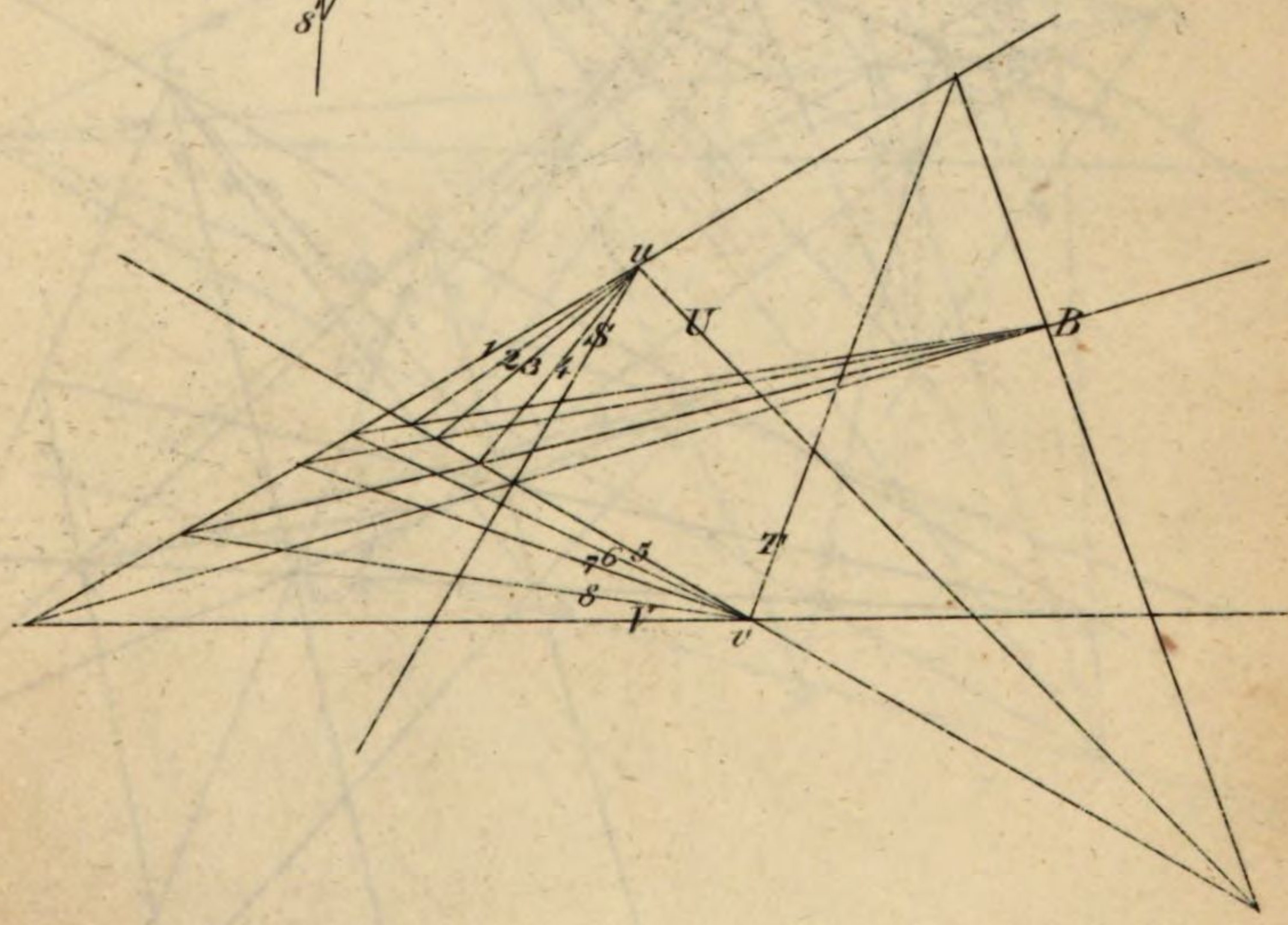
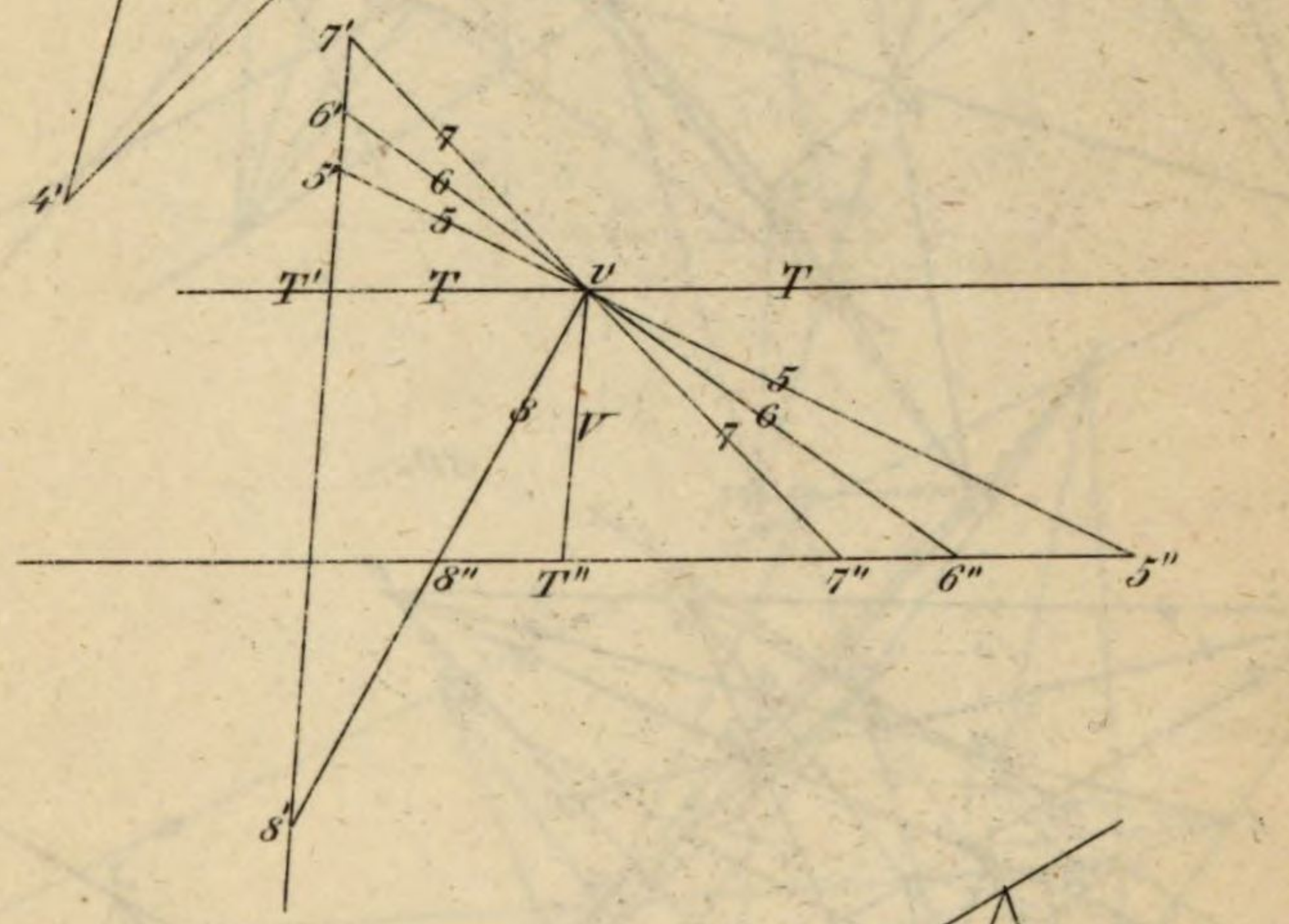
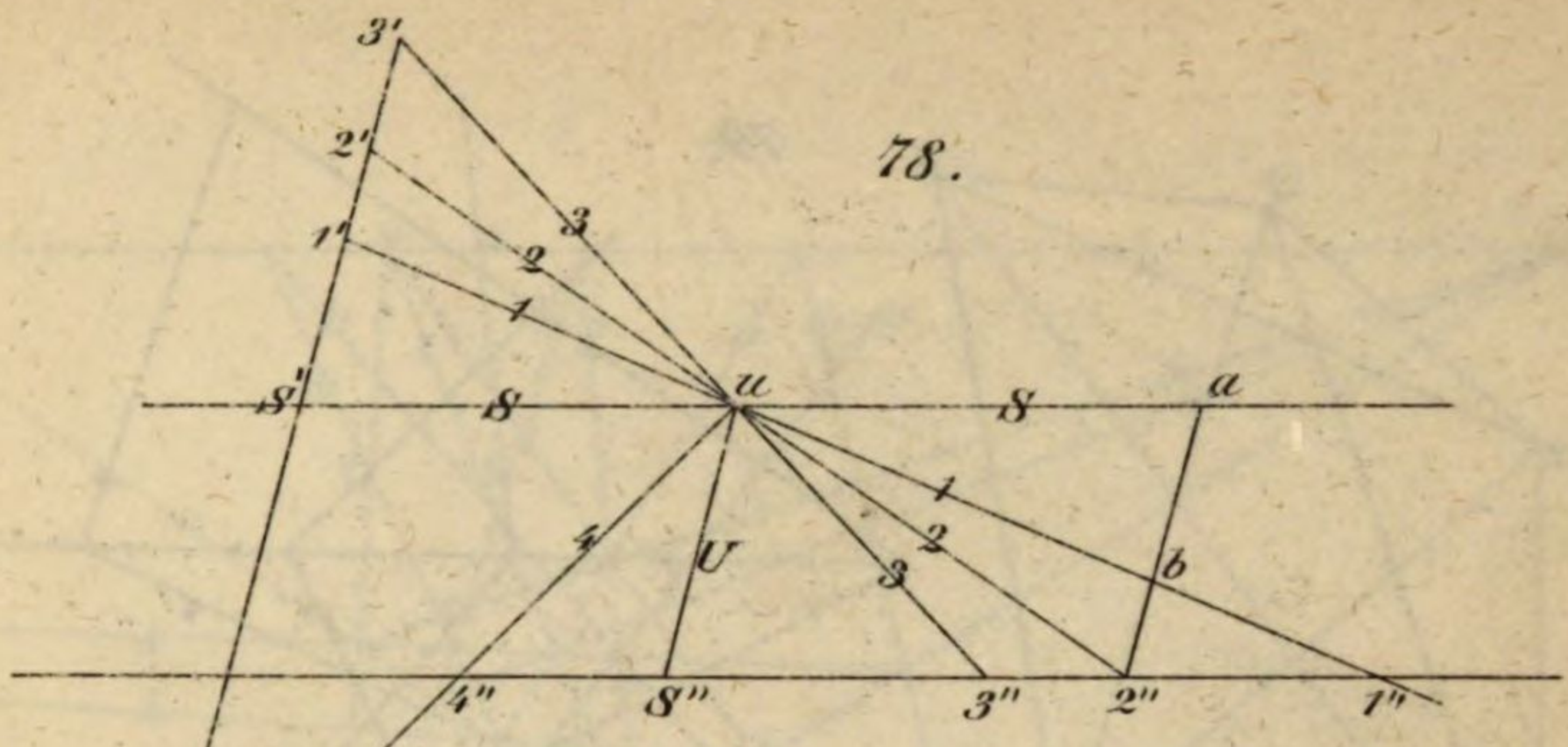


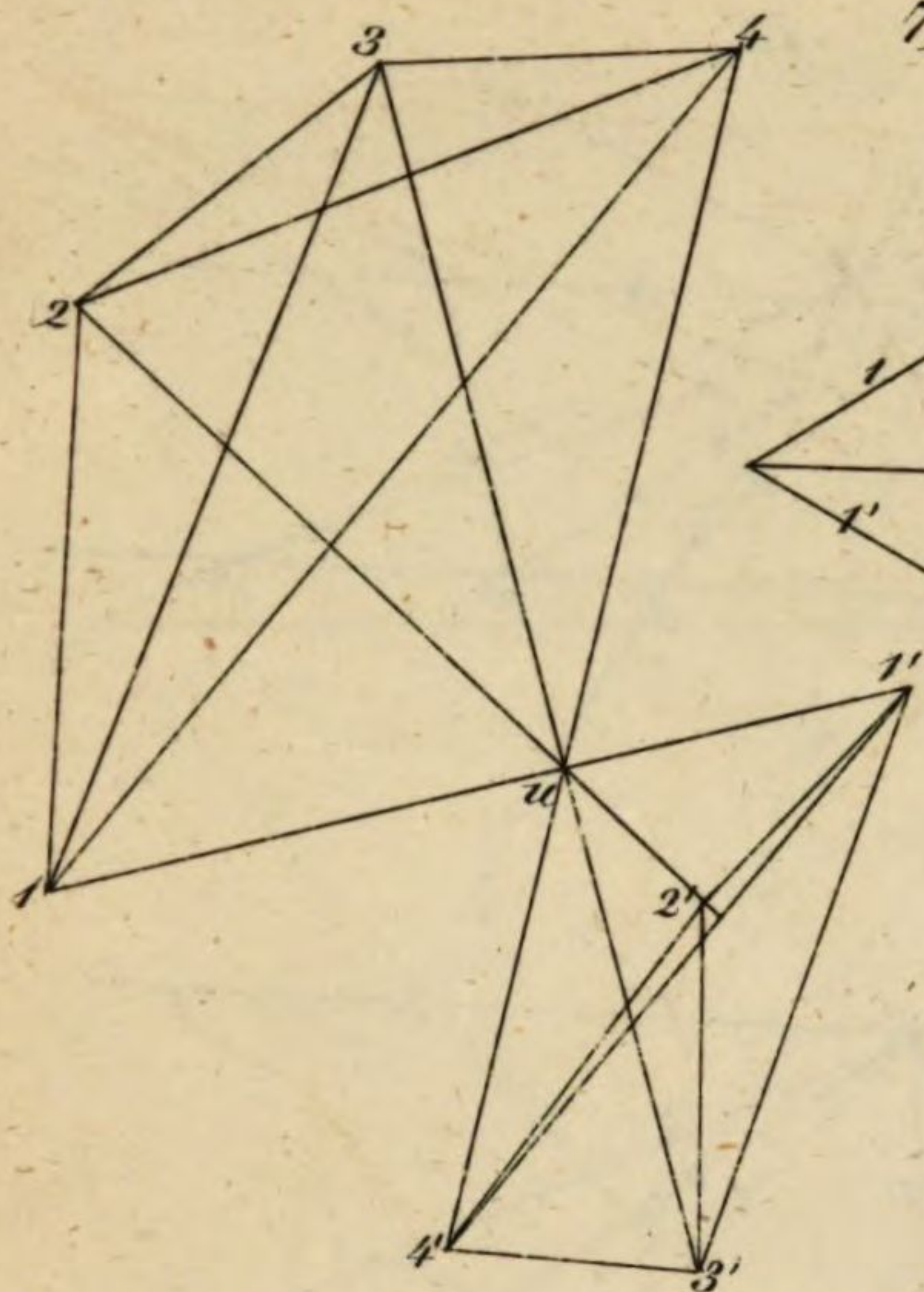
72.



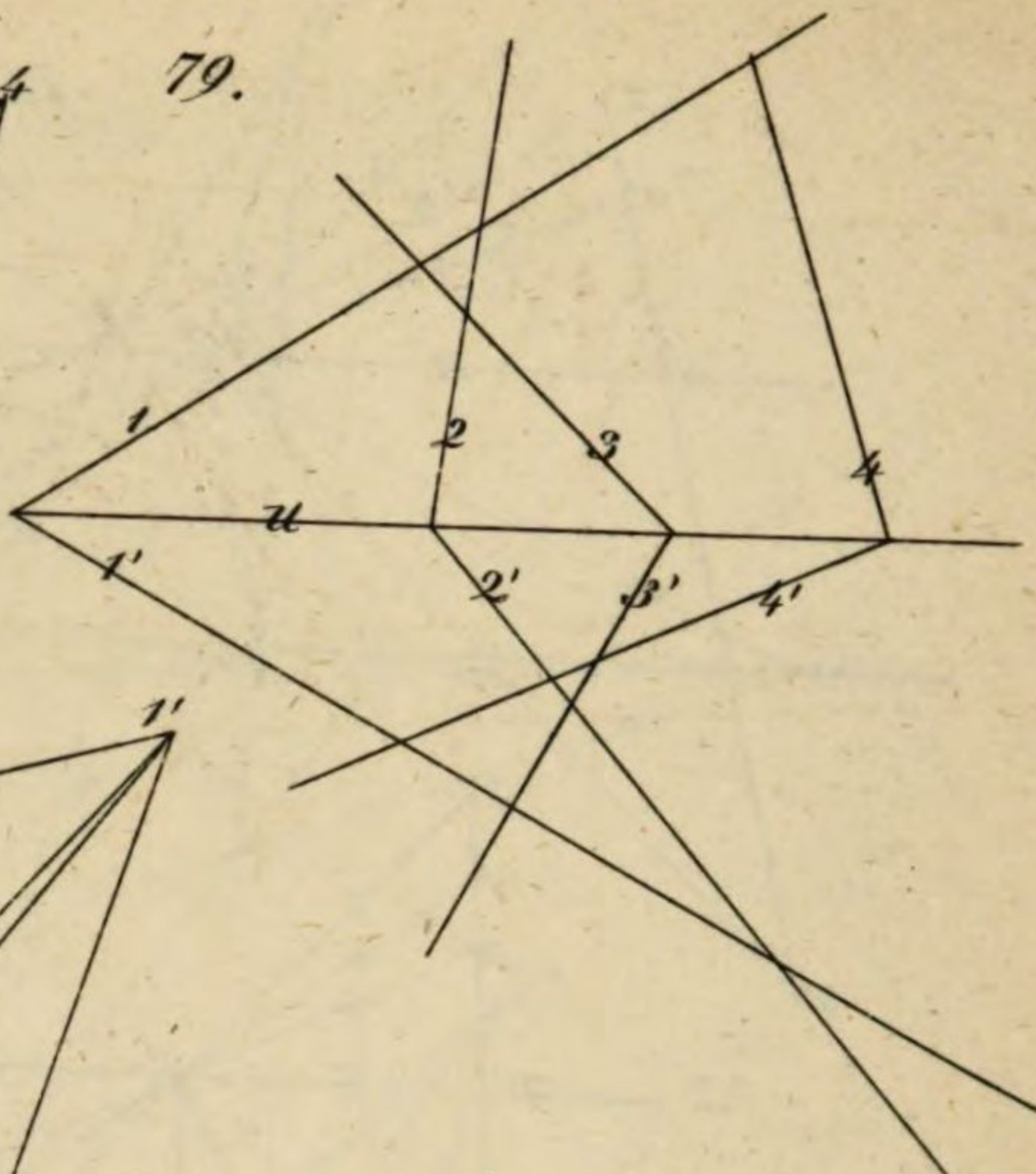


78.

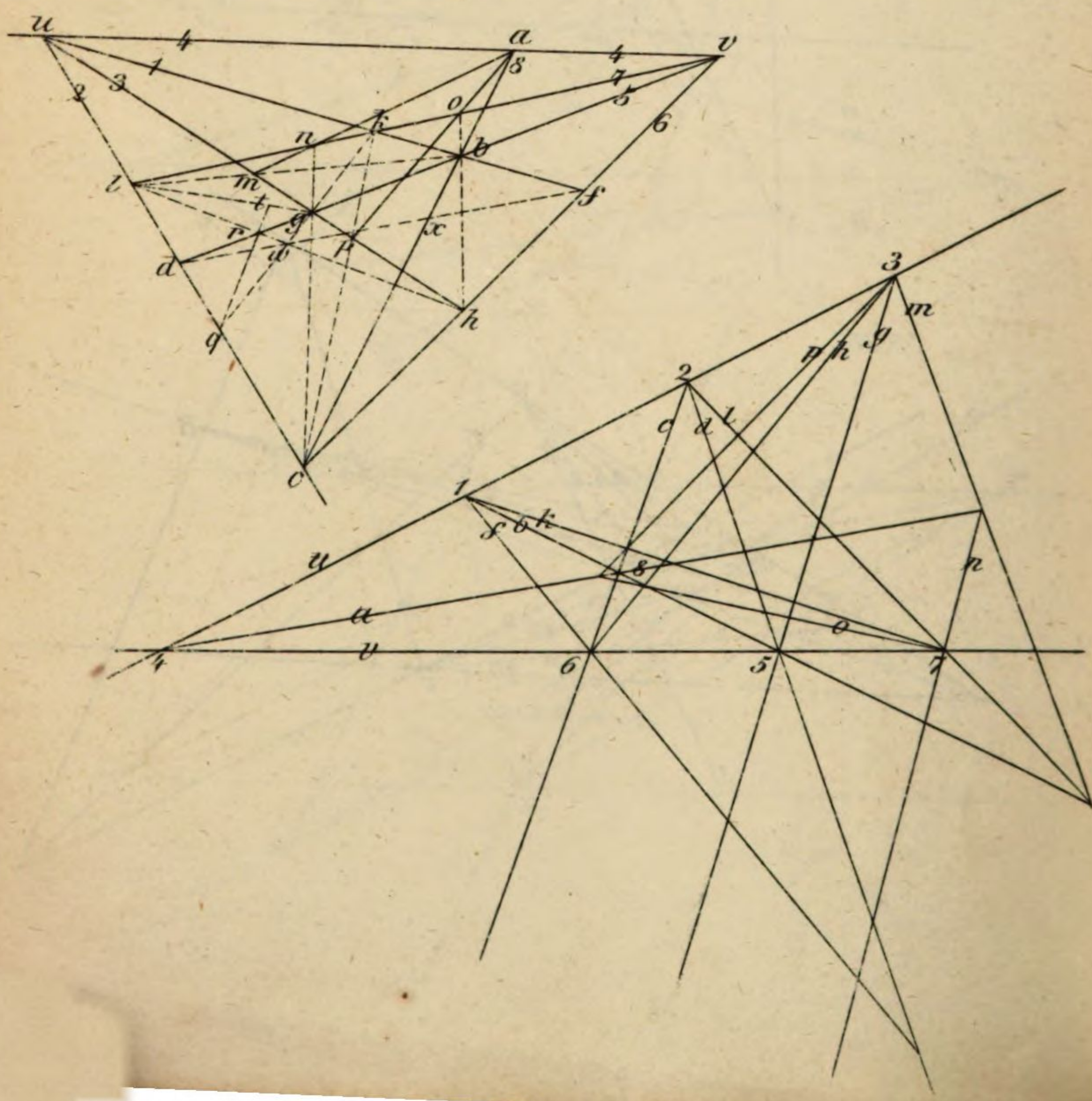




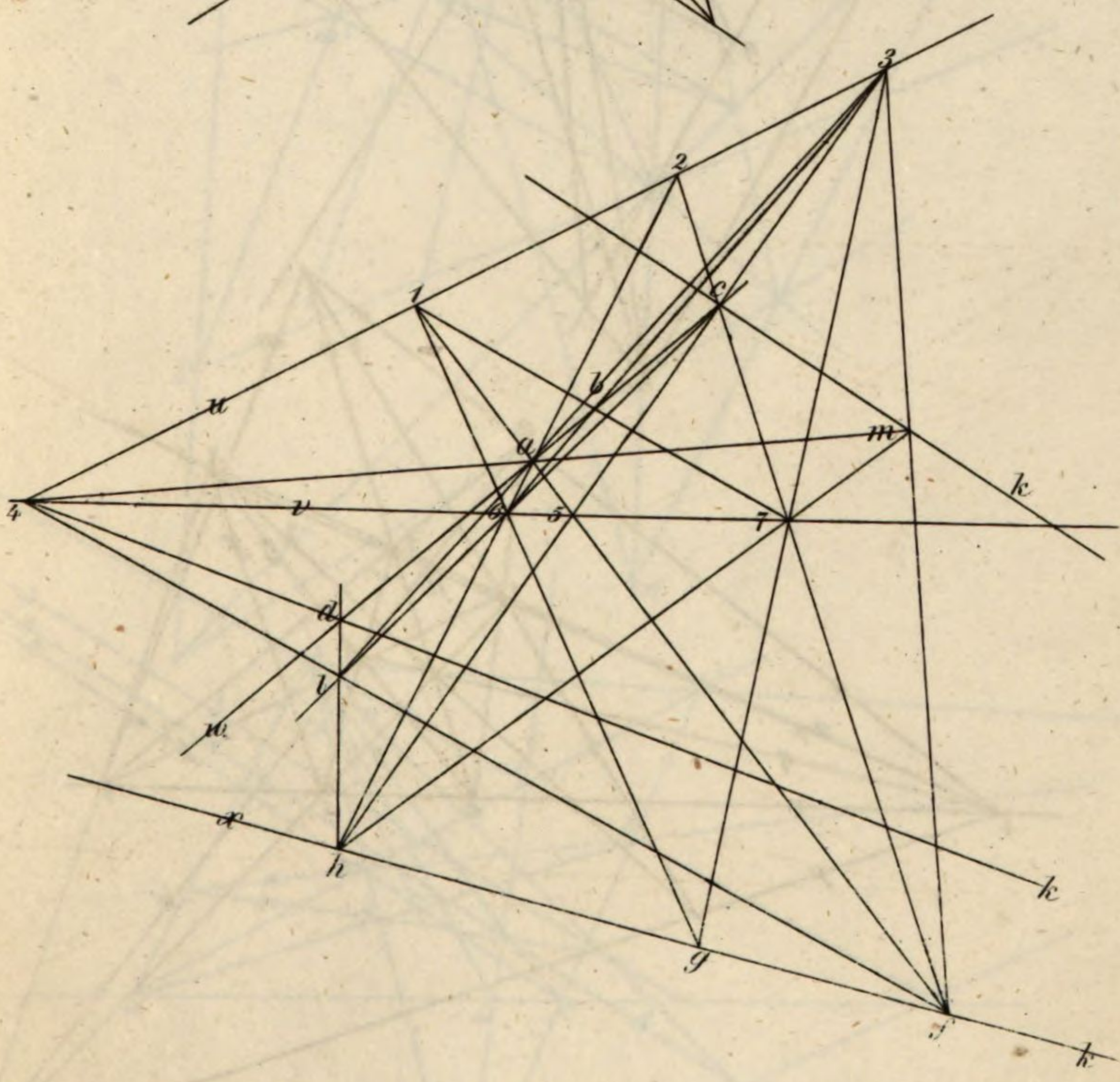
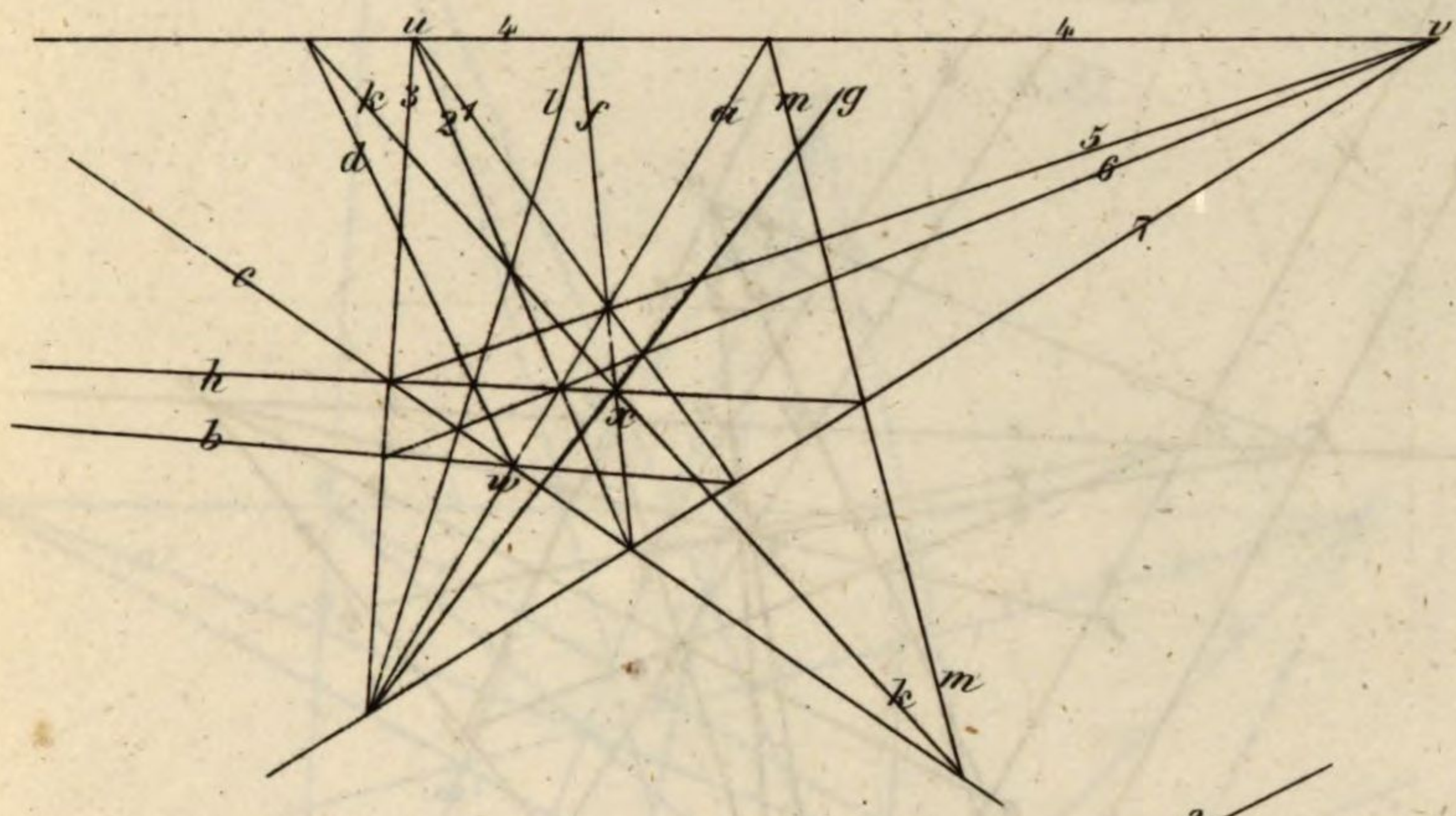
79.

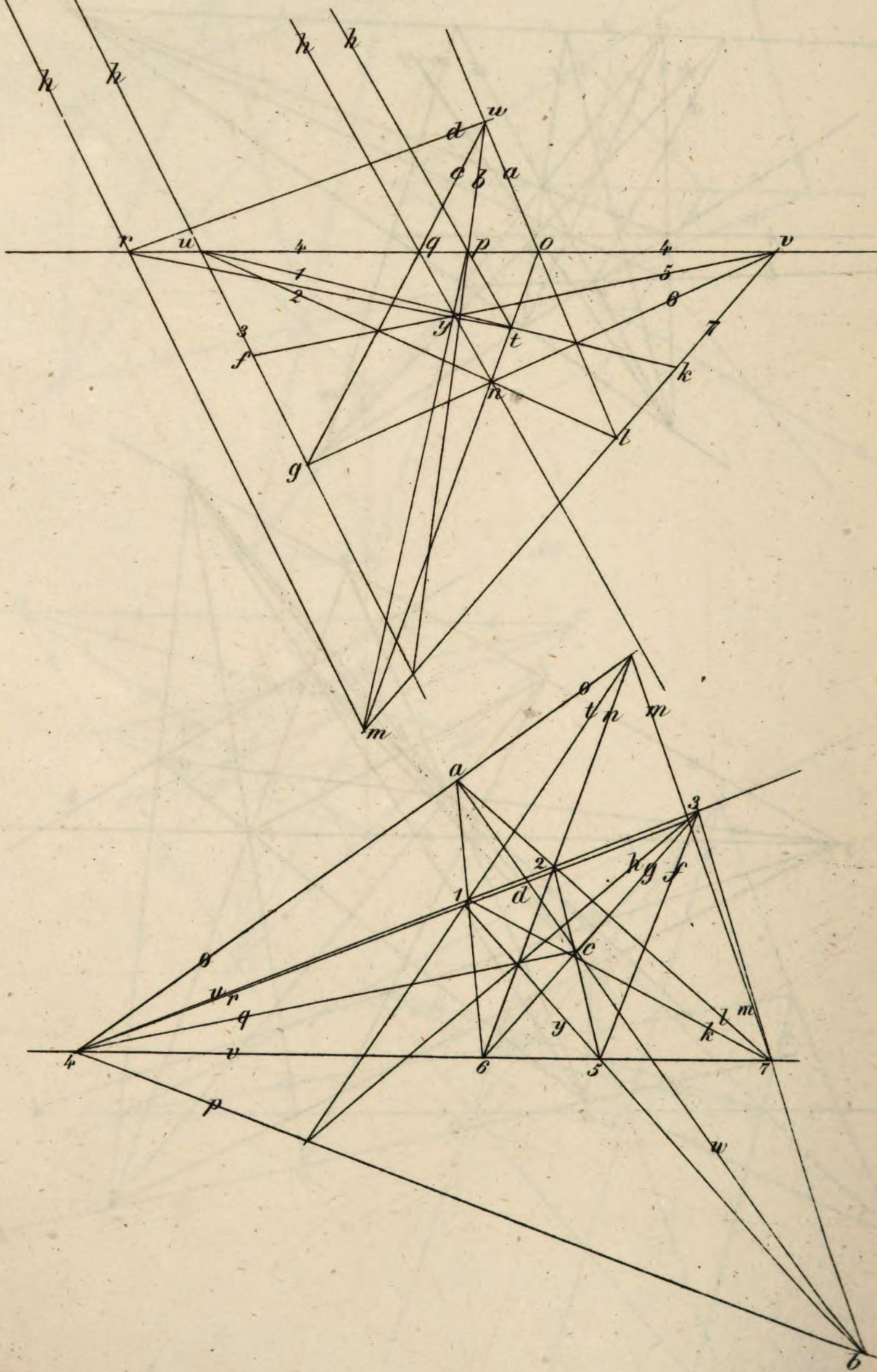


80.

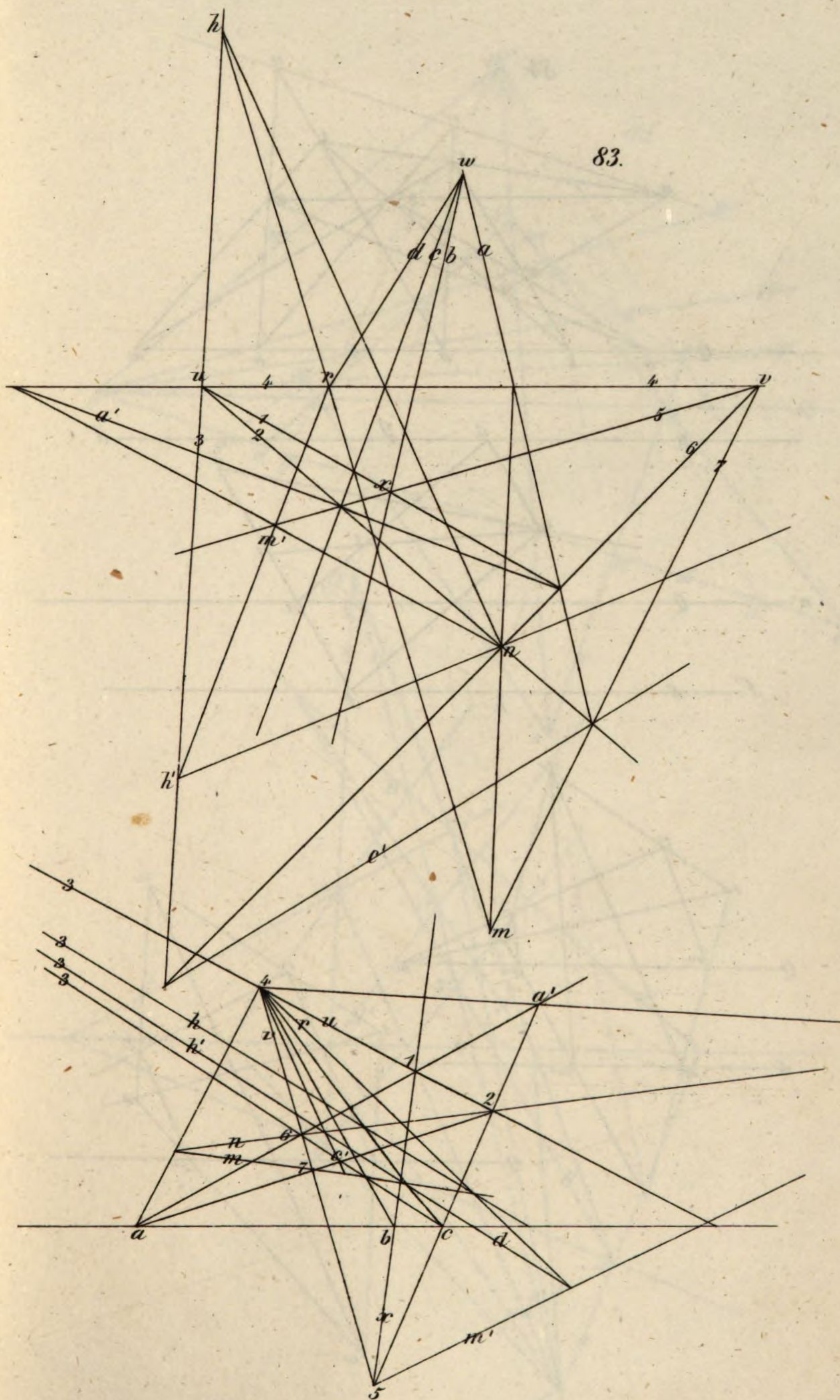


81.

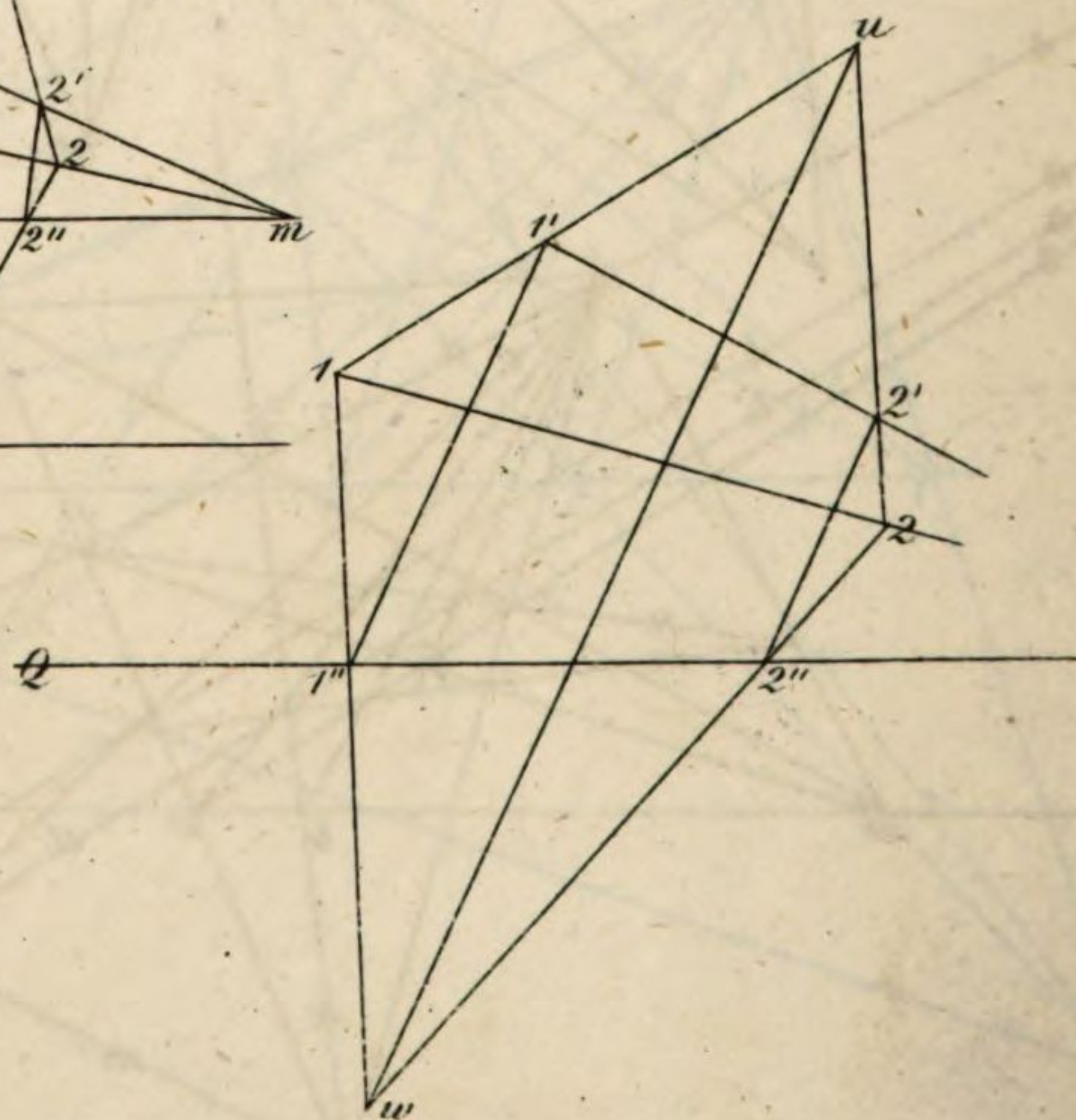
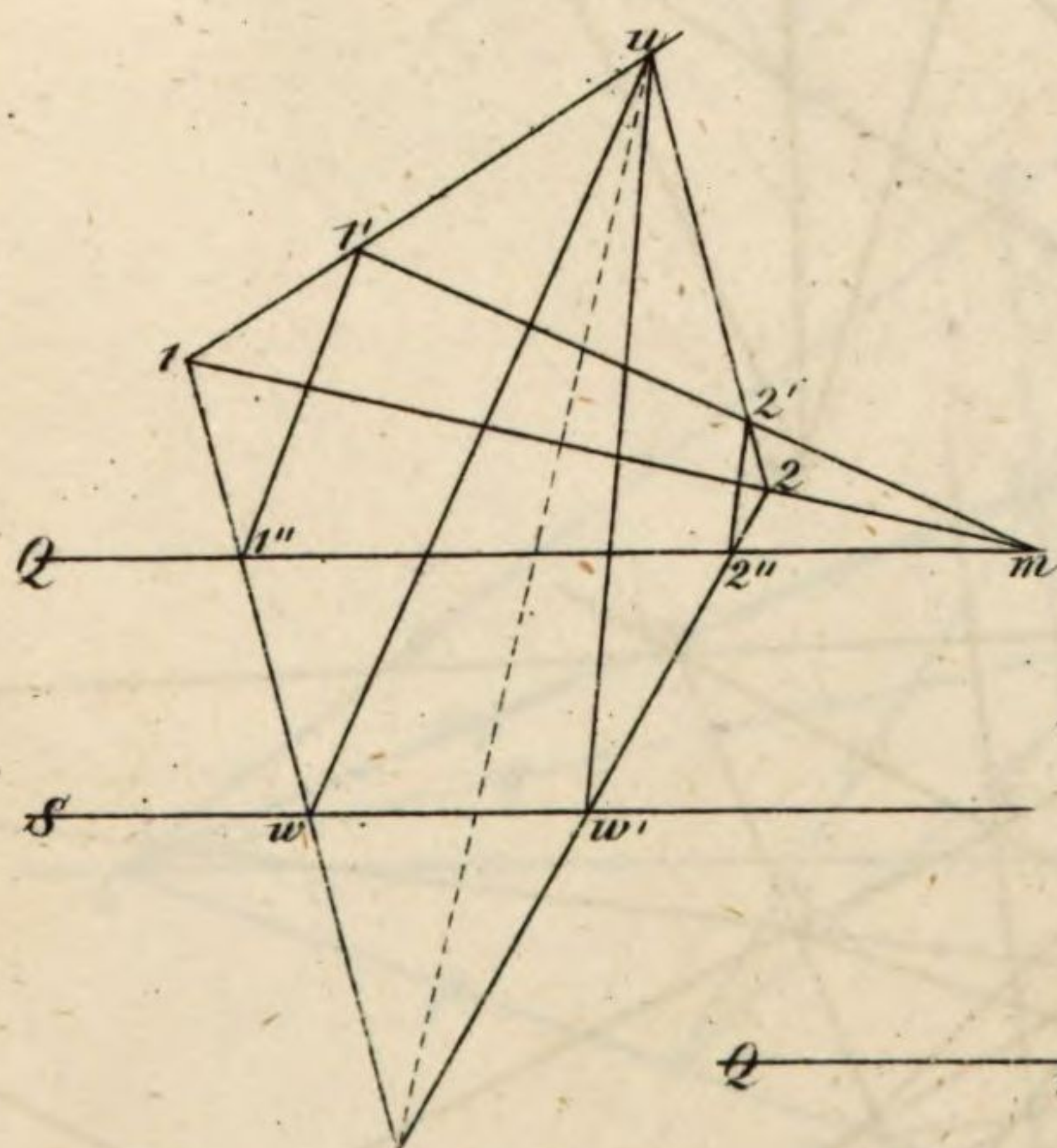
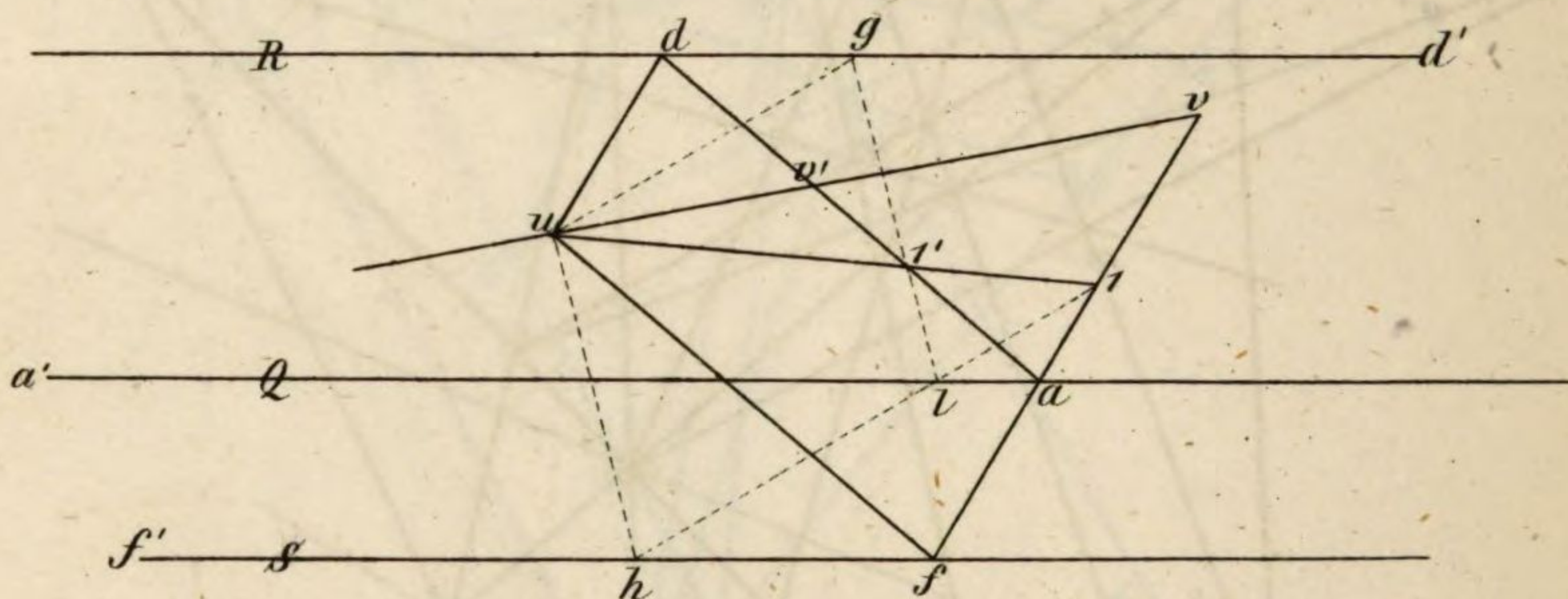
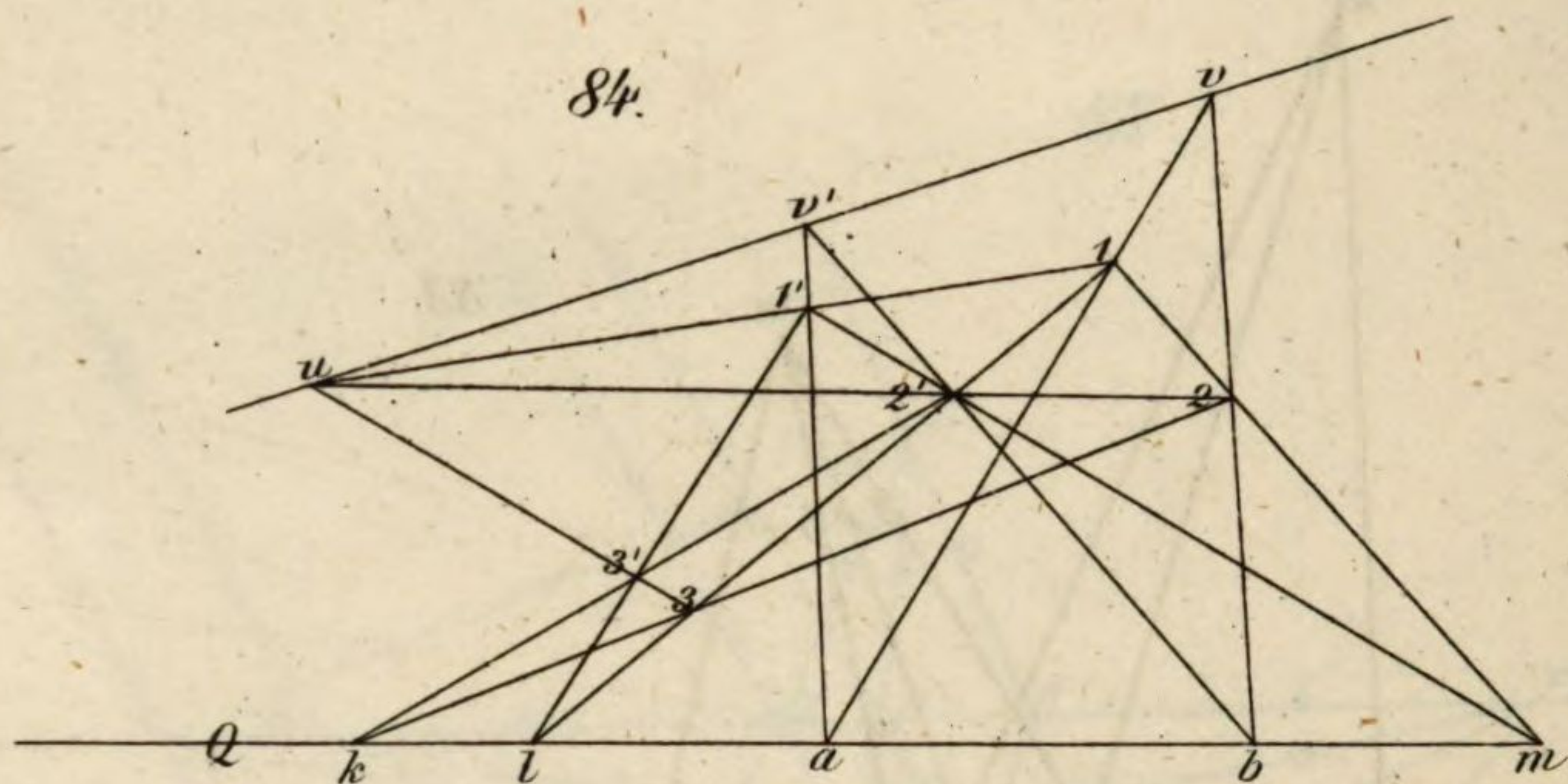




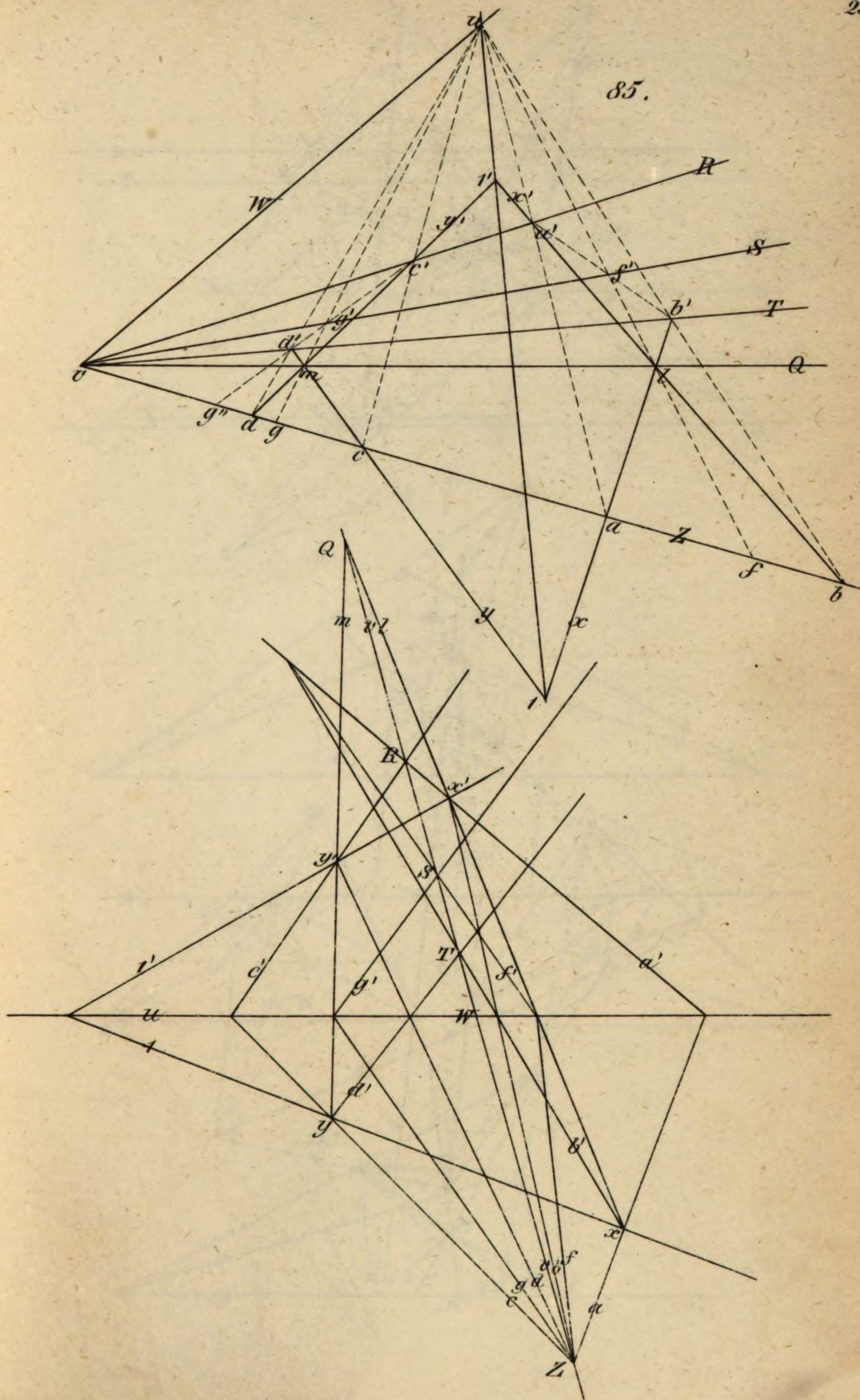
83.



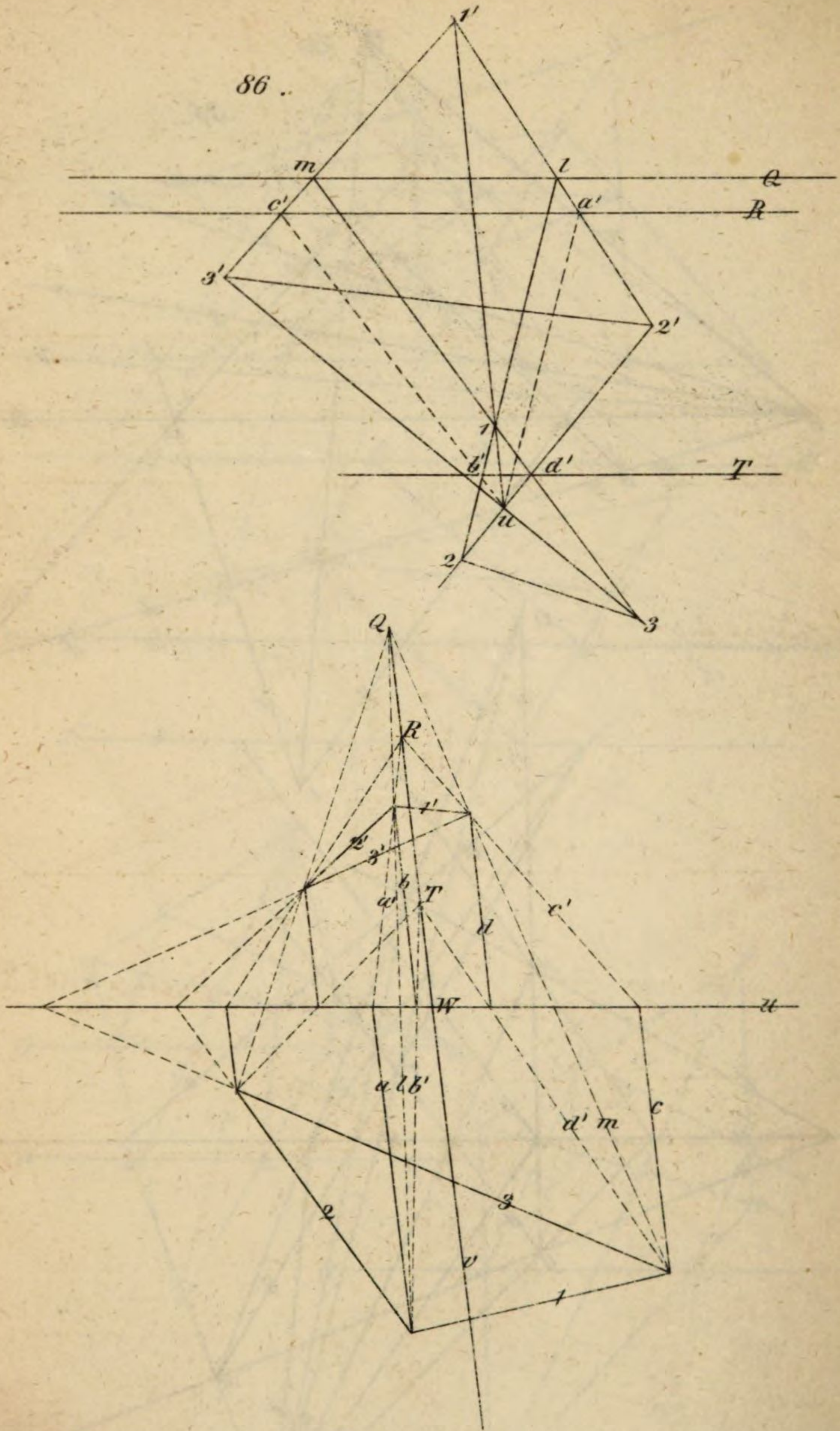
84.

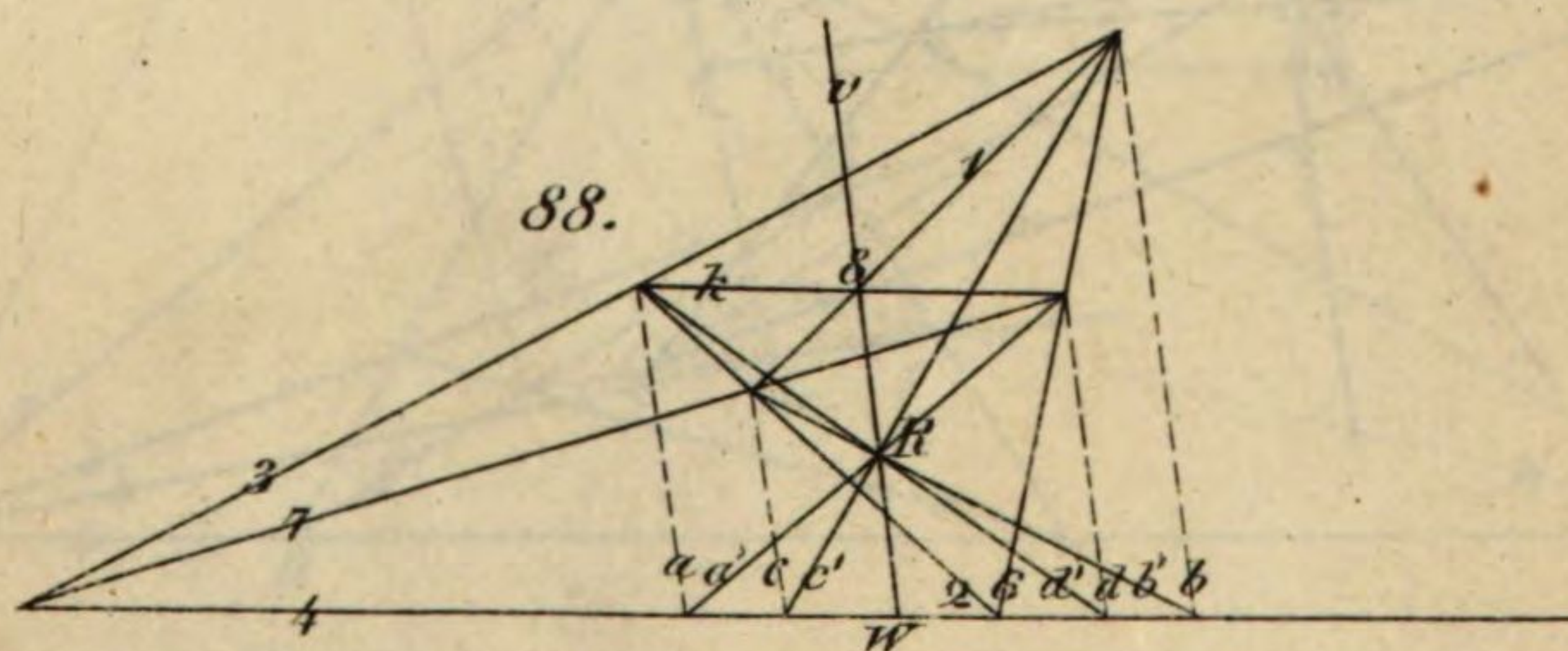
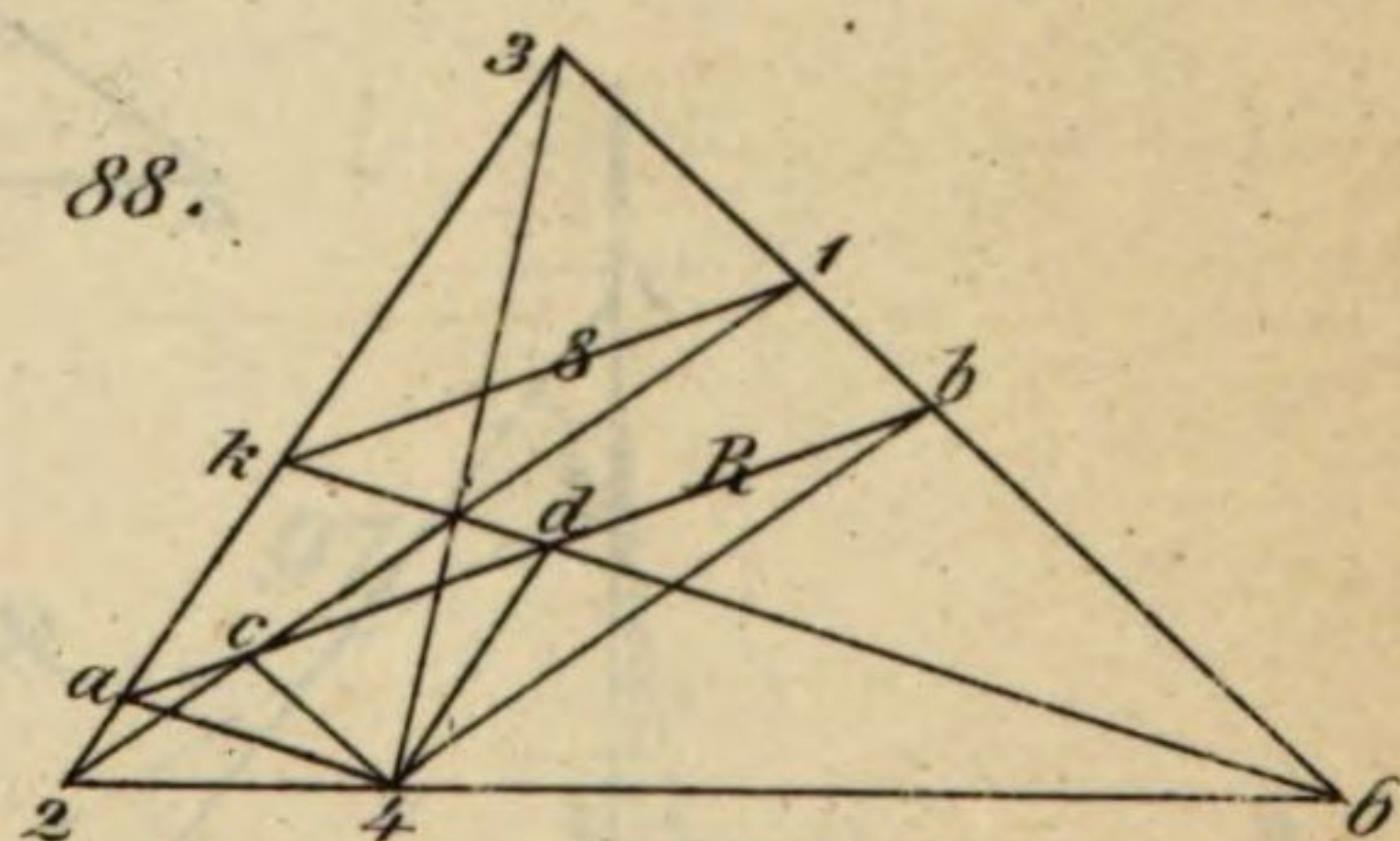
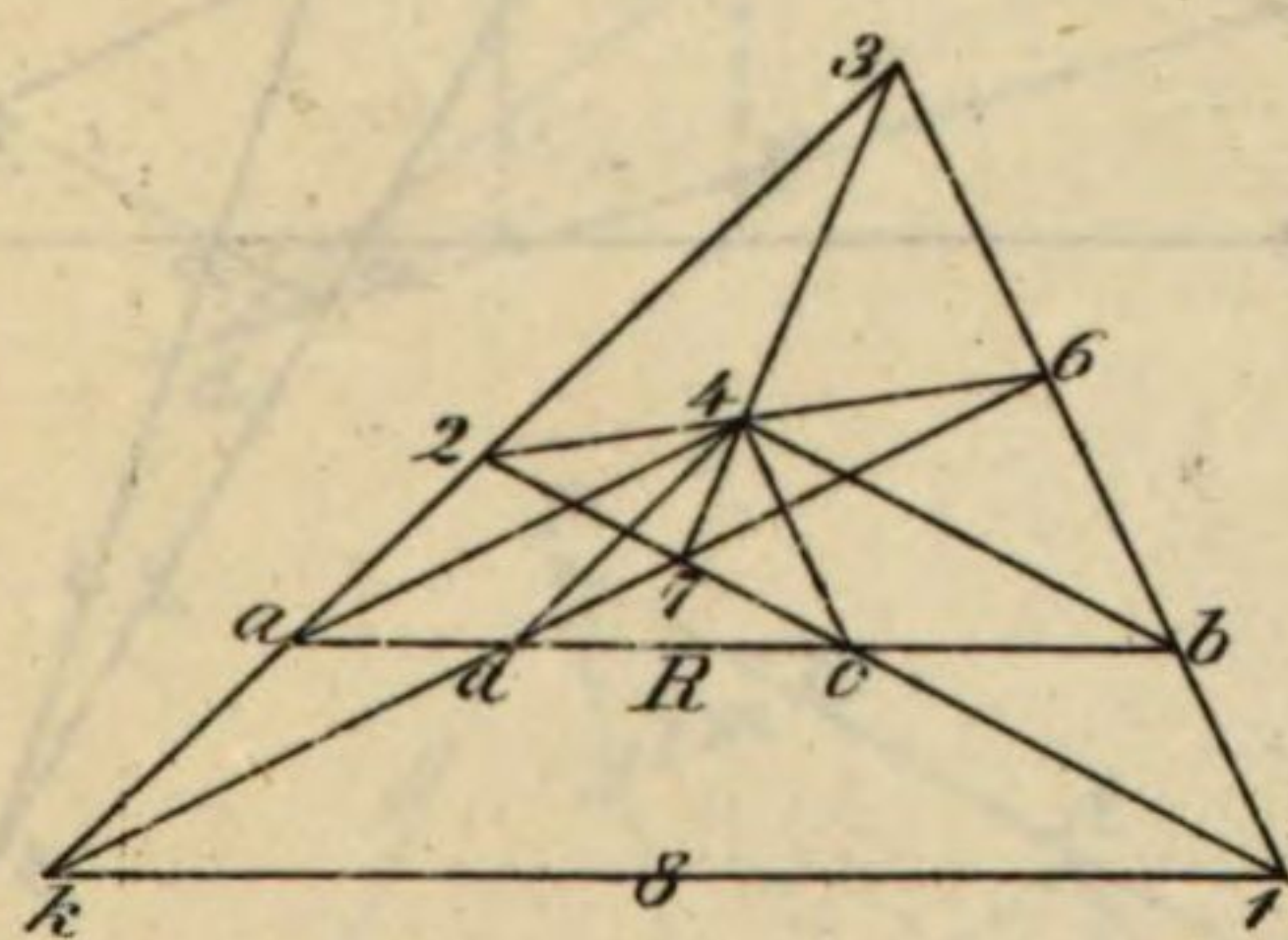
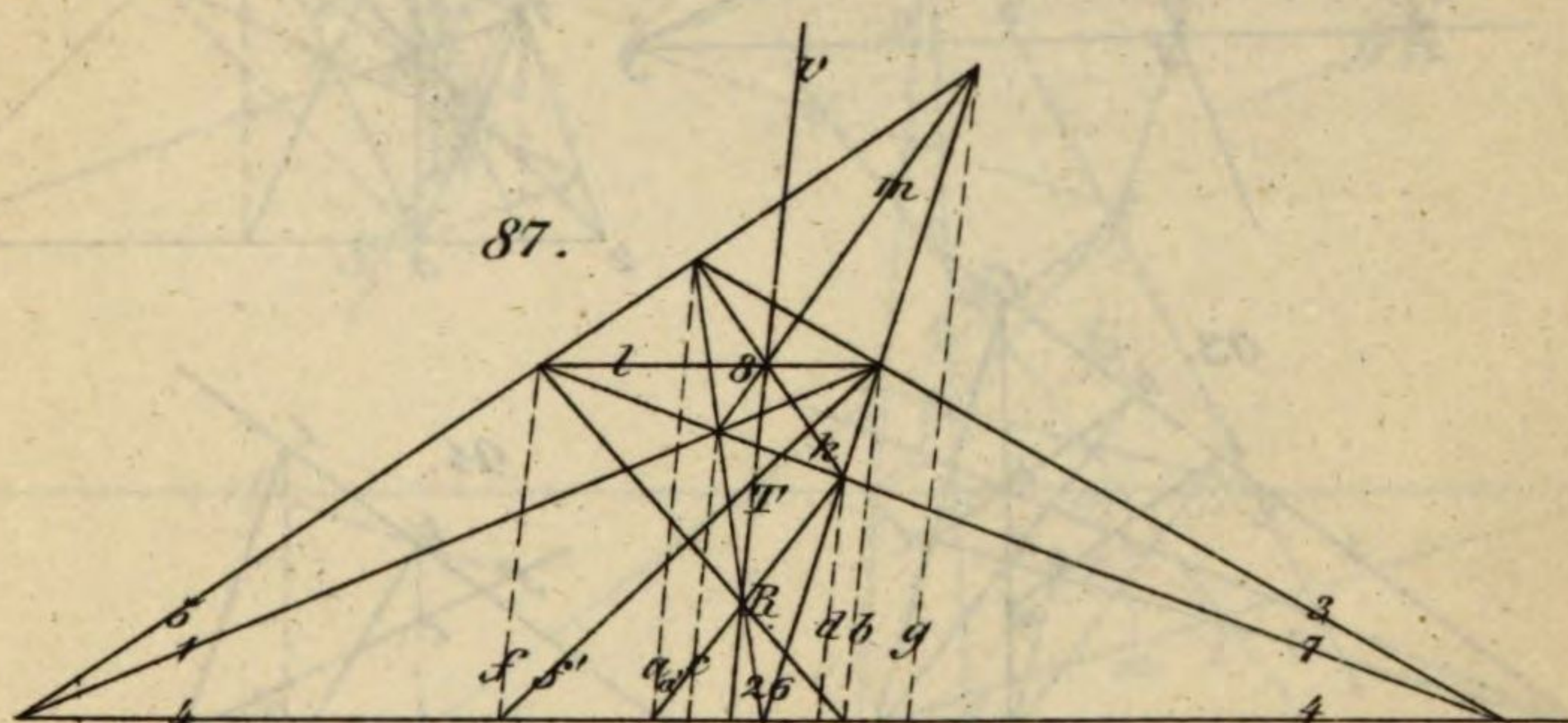
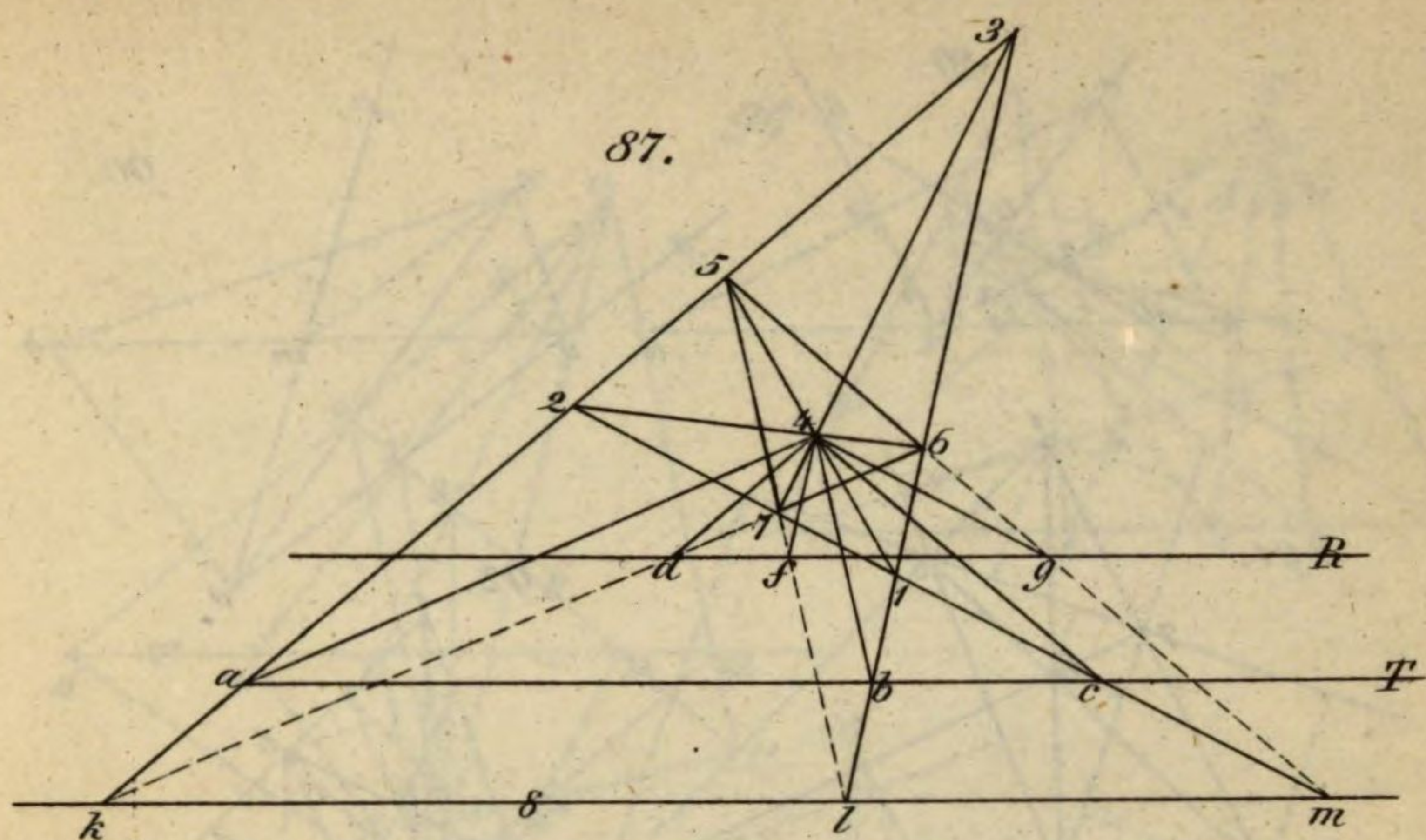


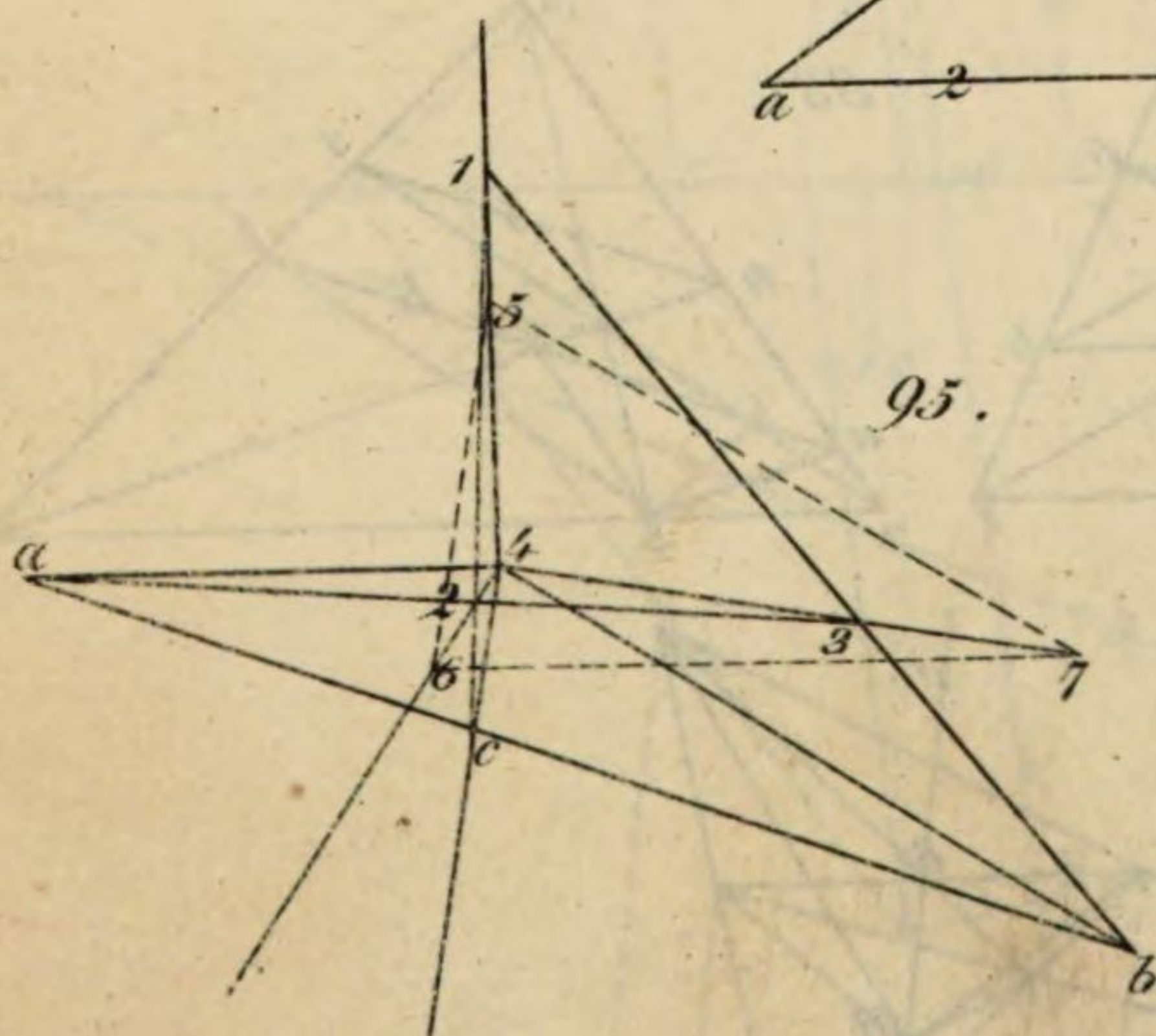
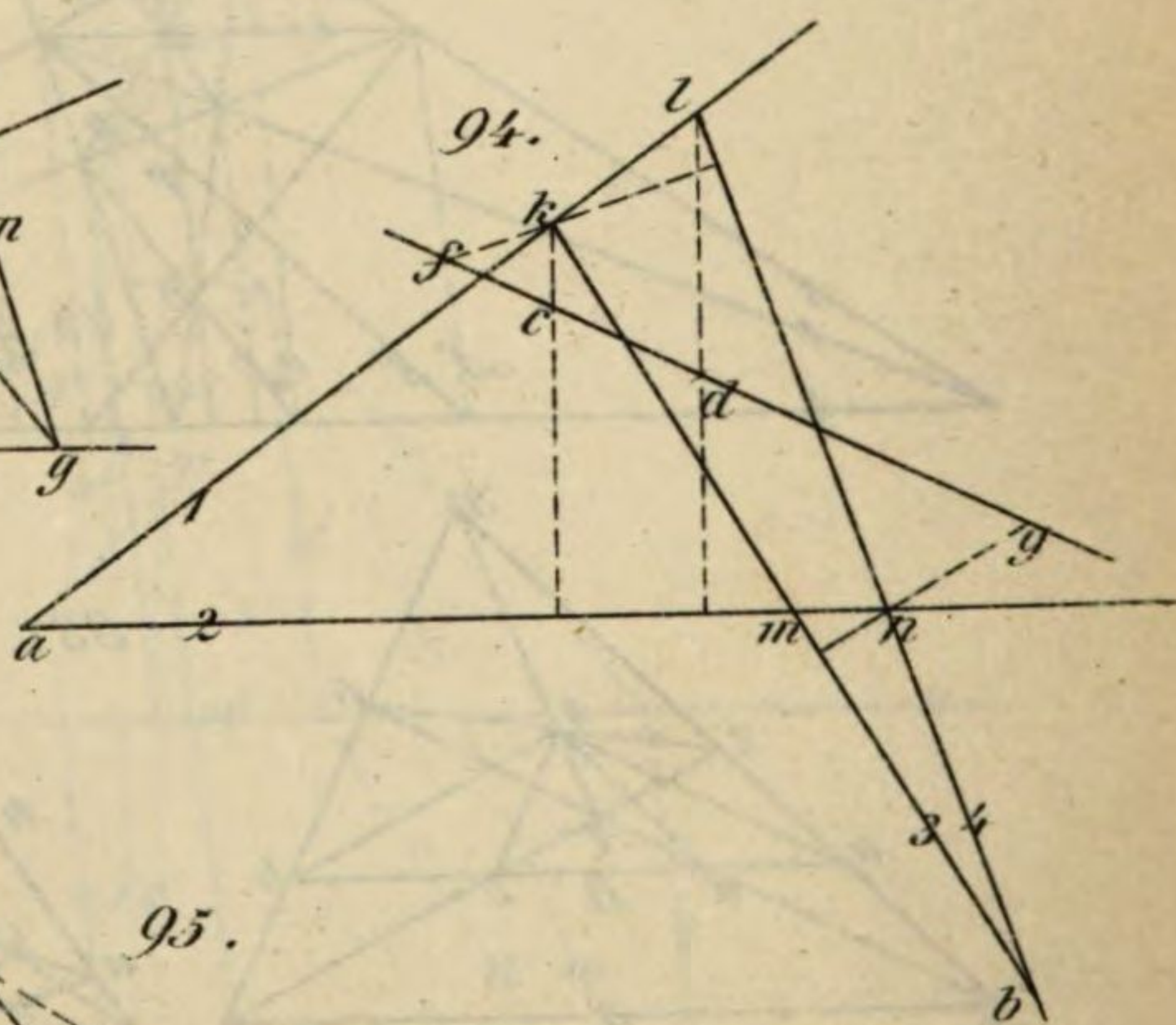
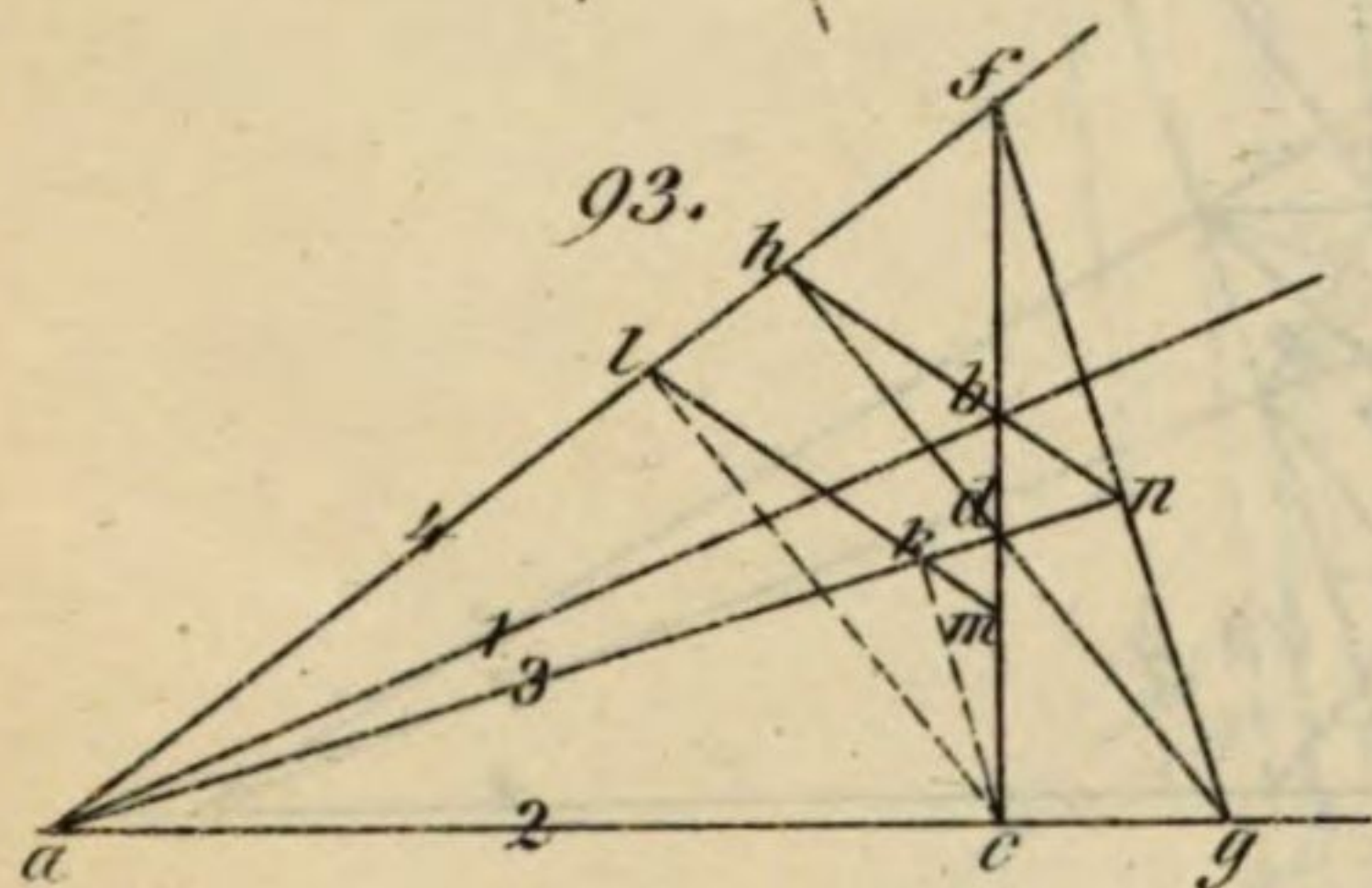
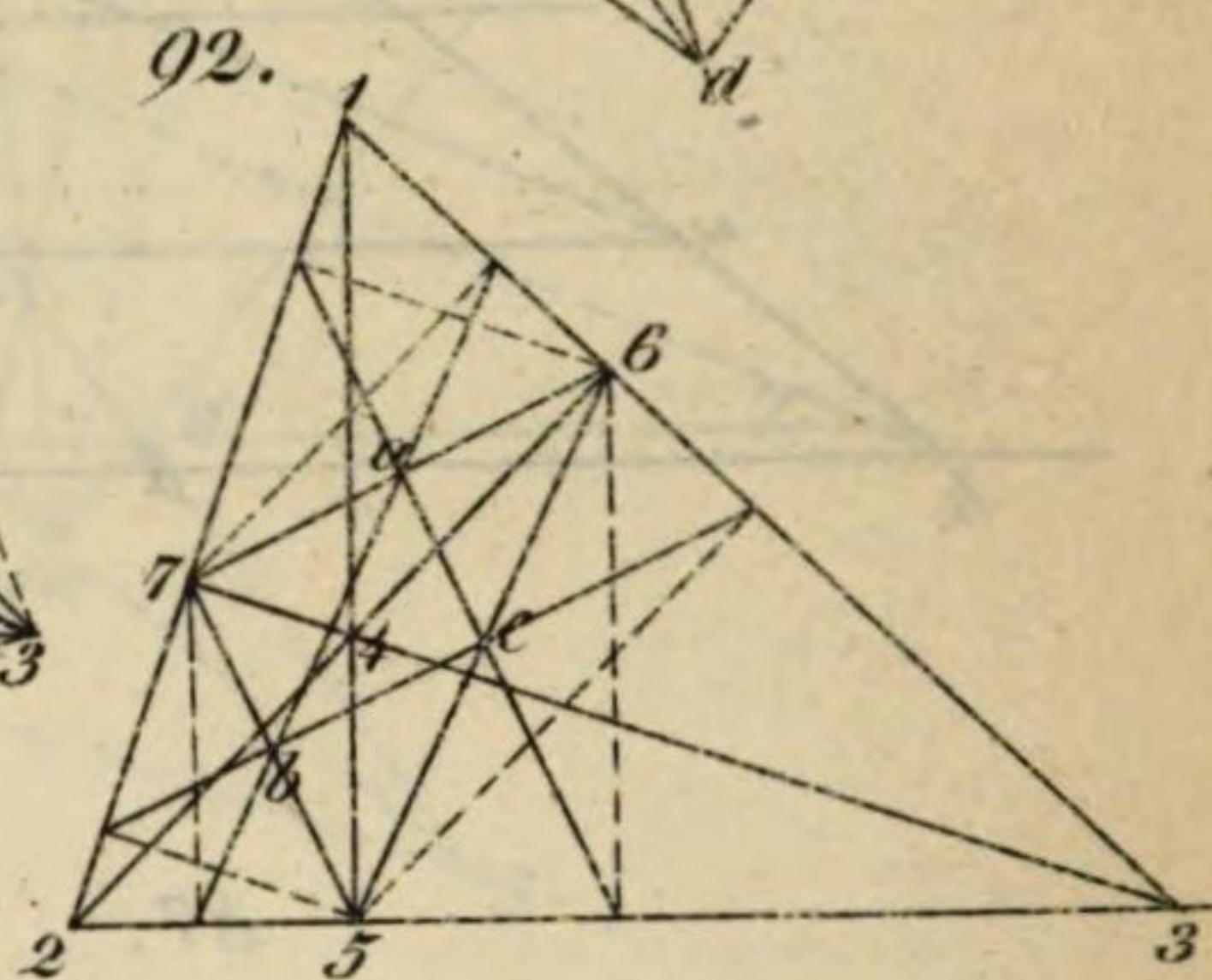
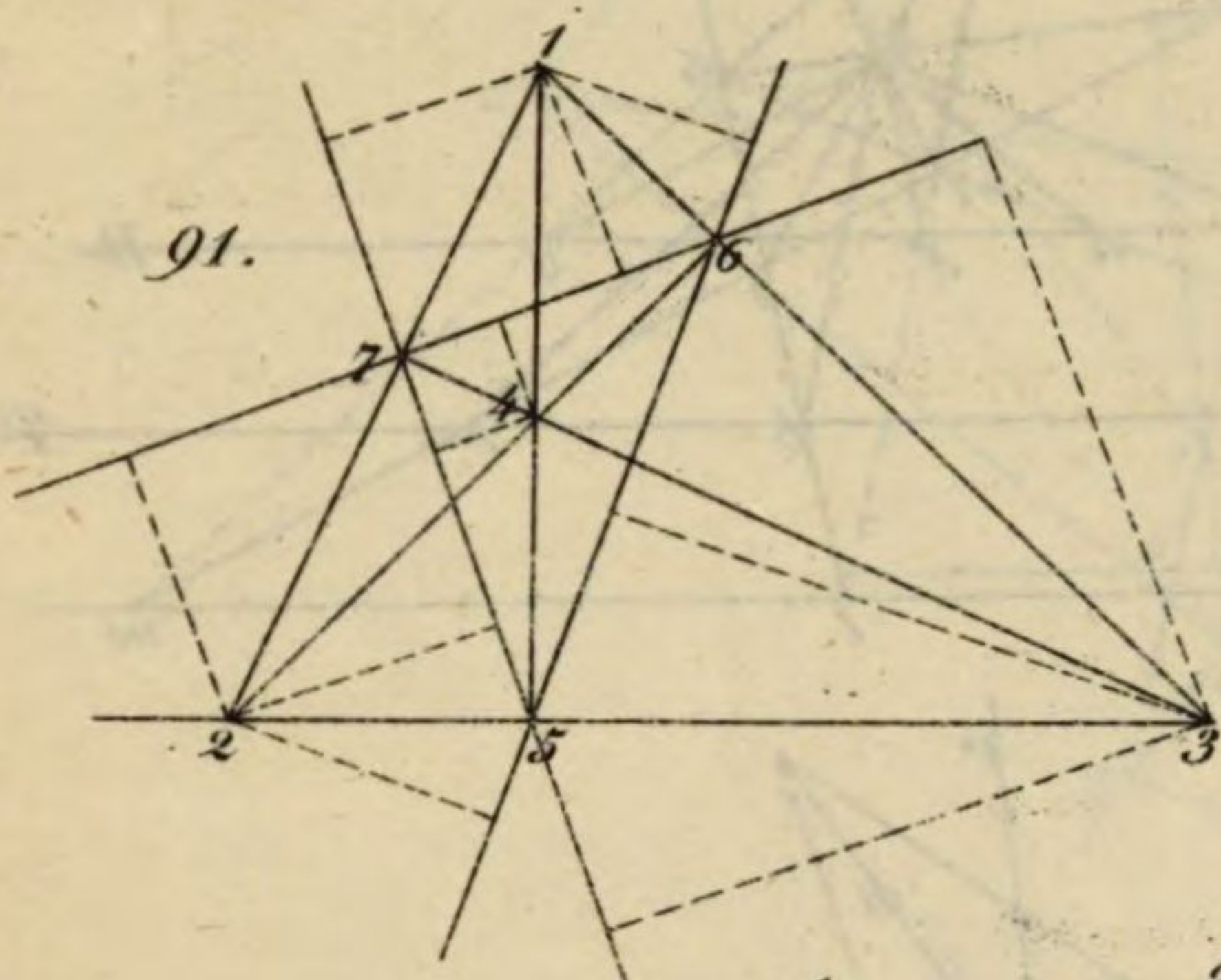
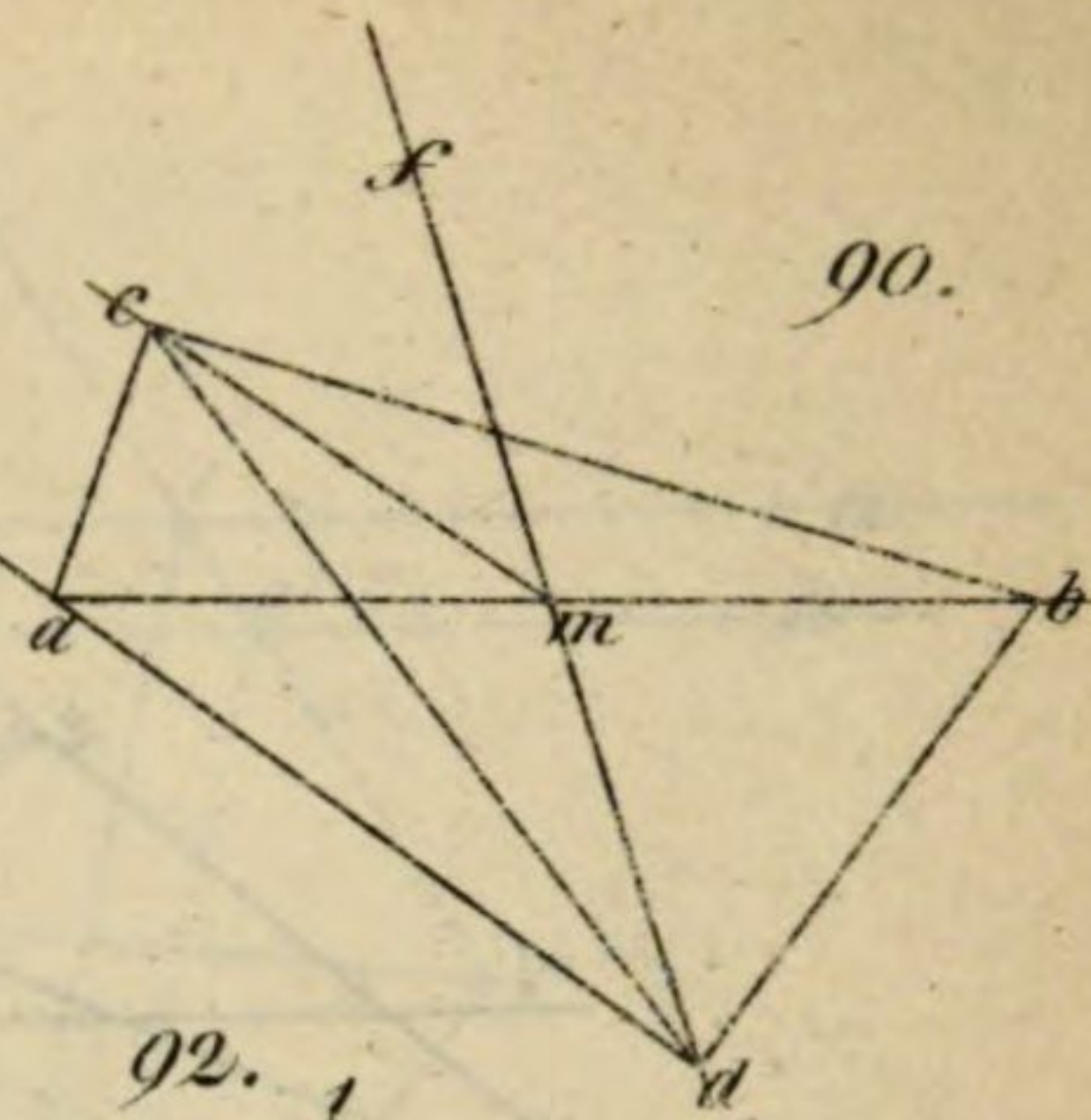
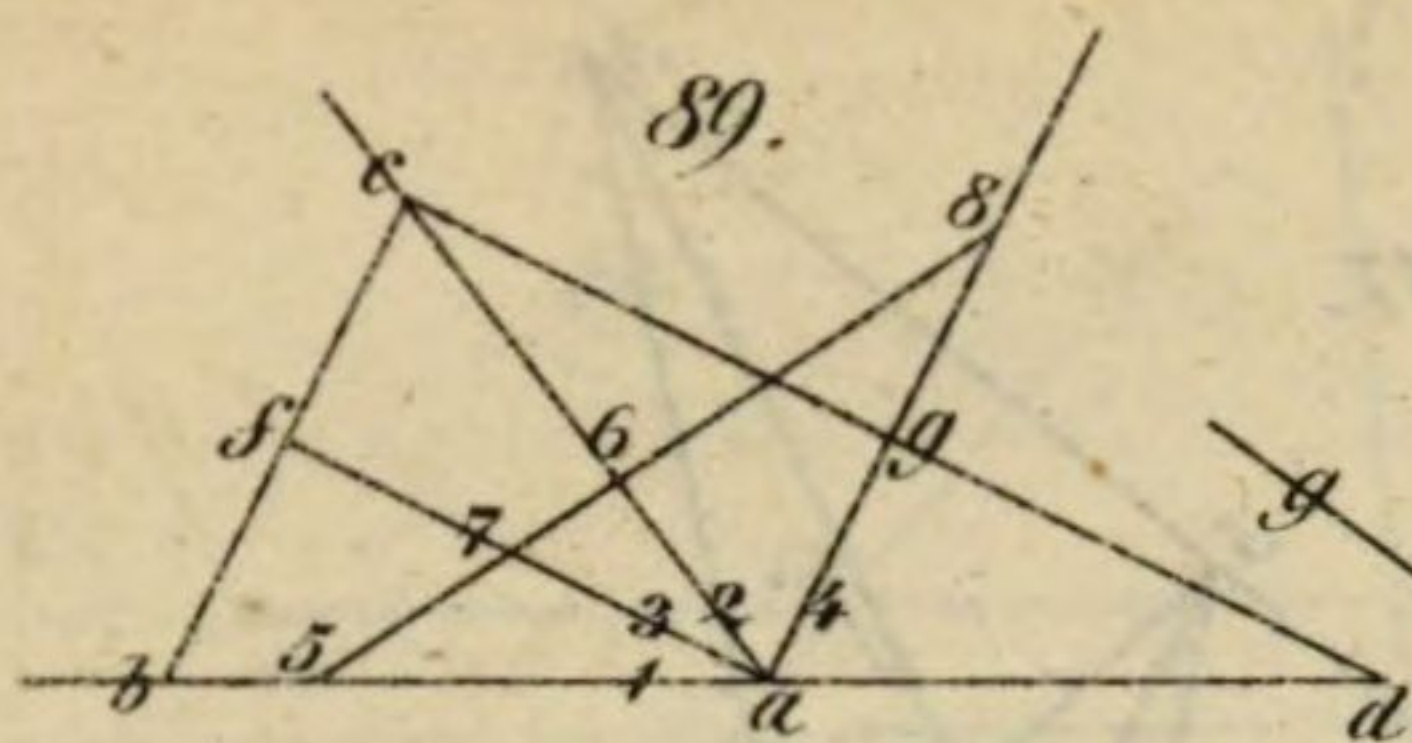
85.

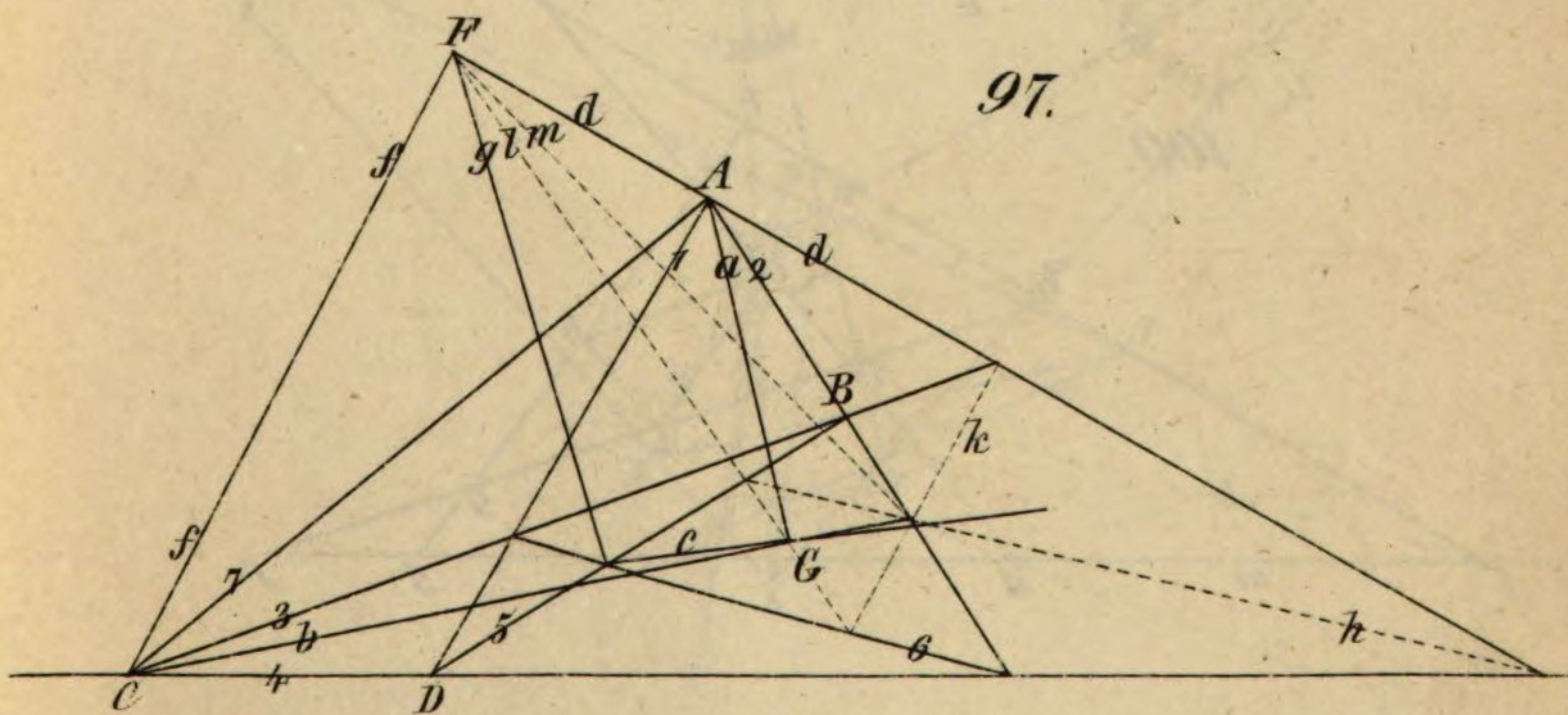
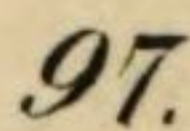
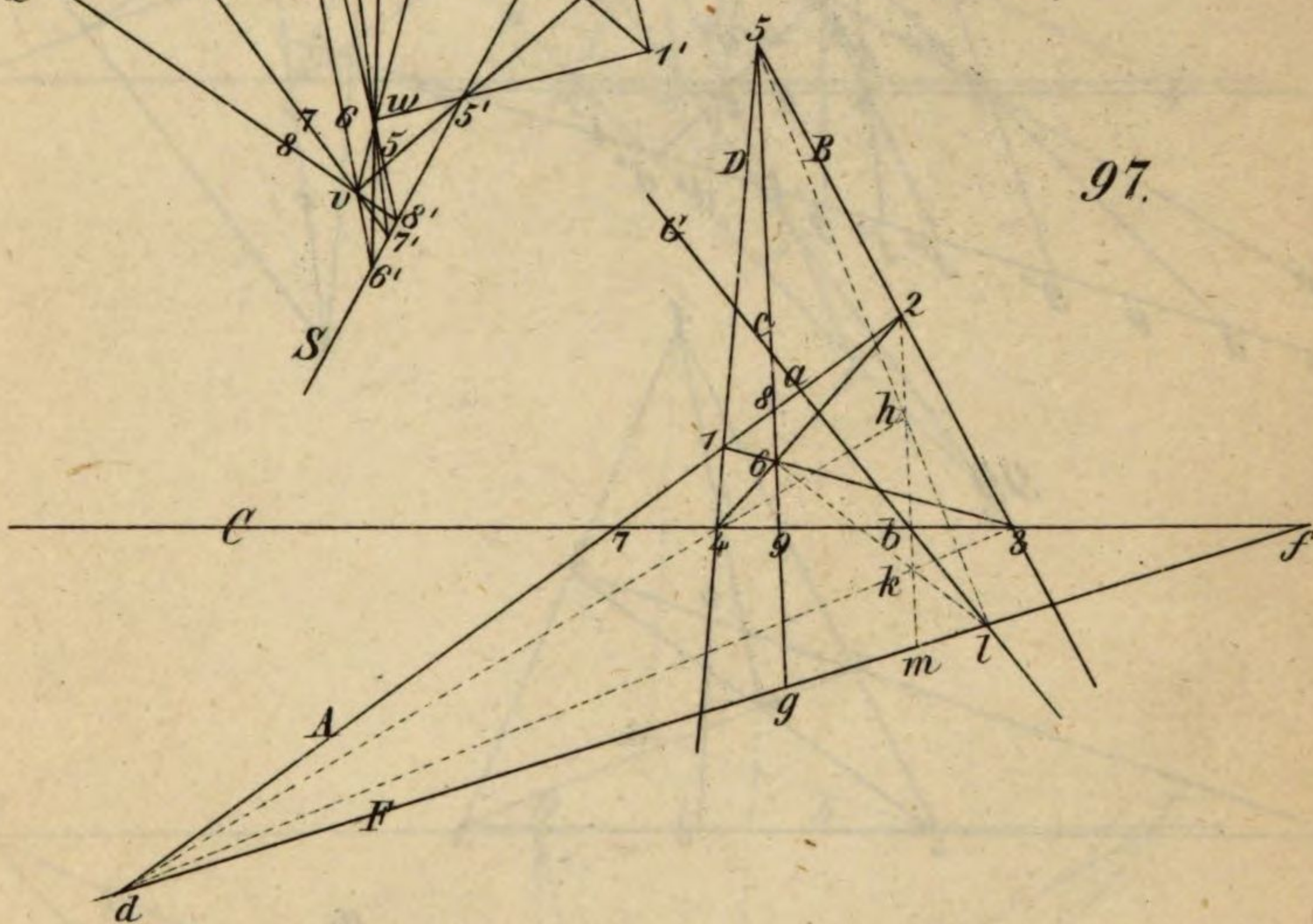
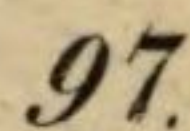
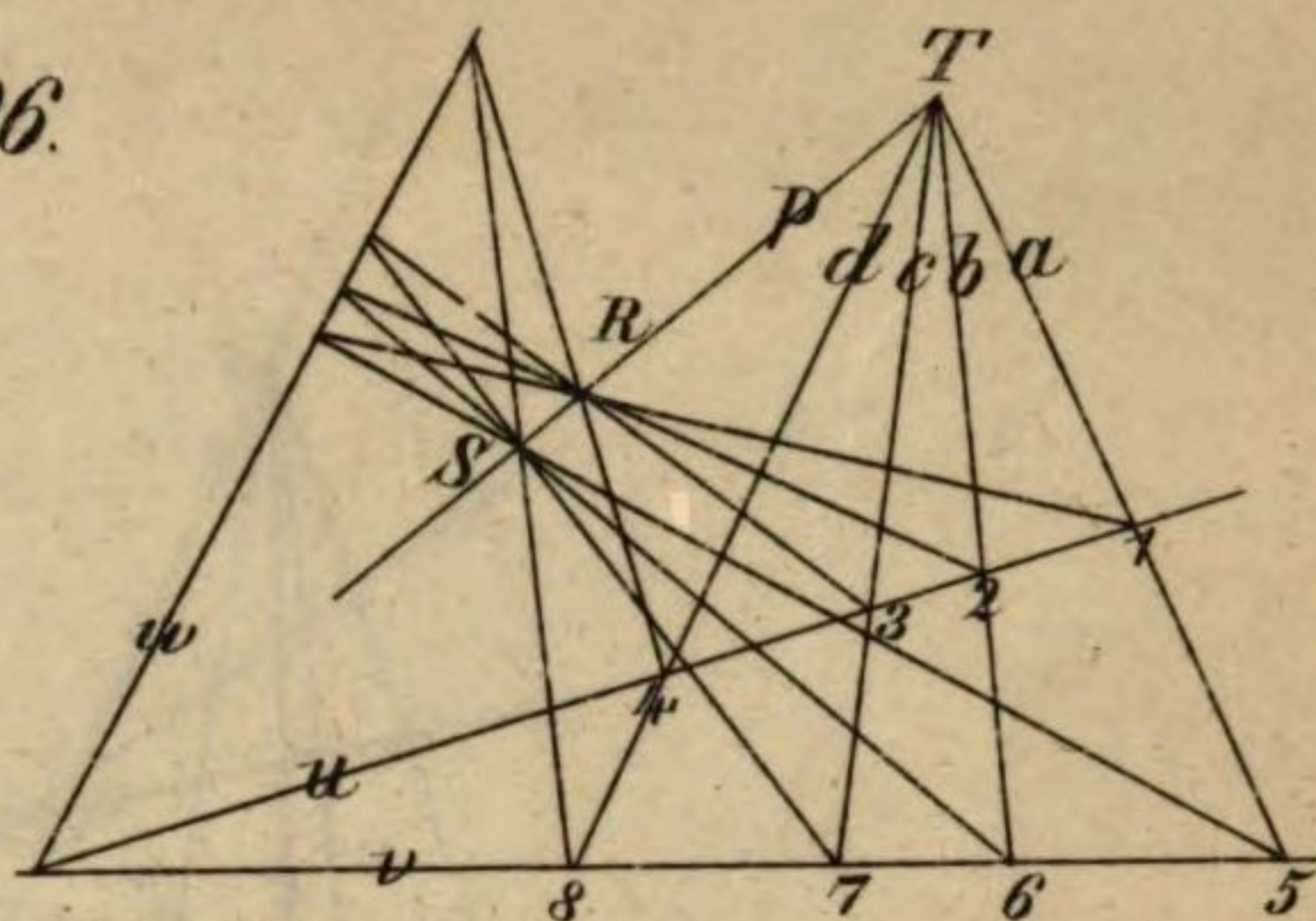
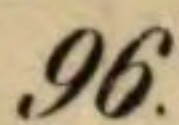


86 ..

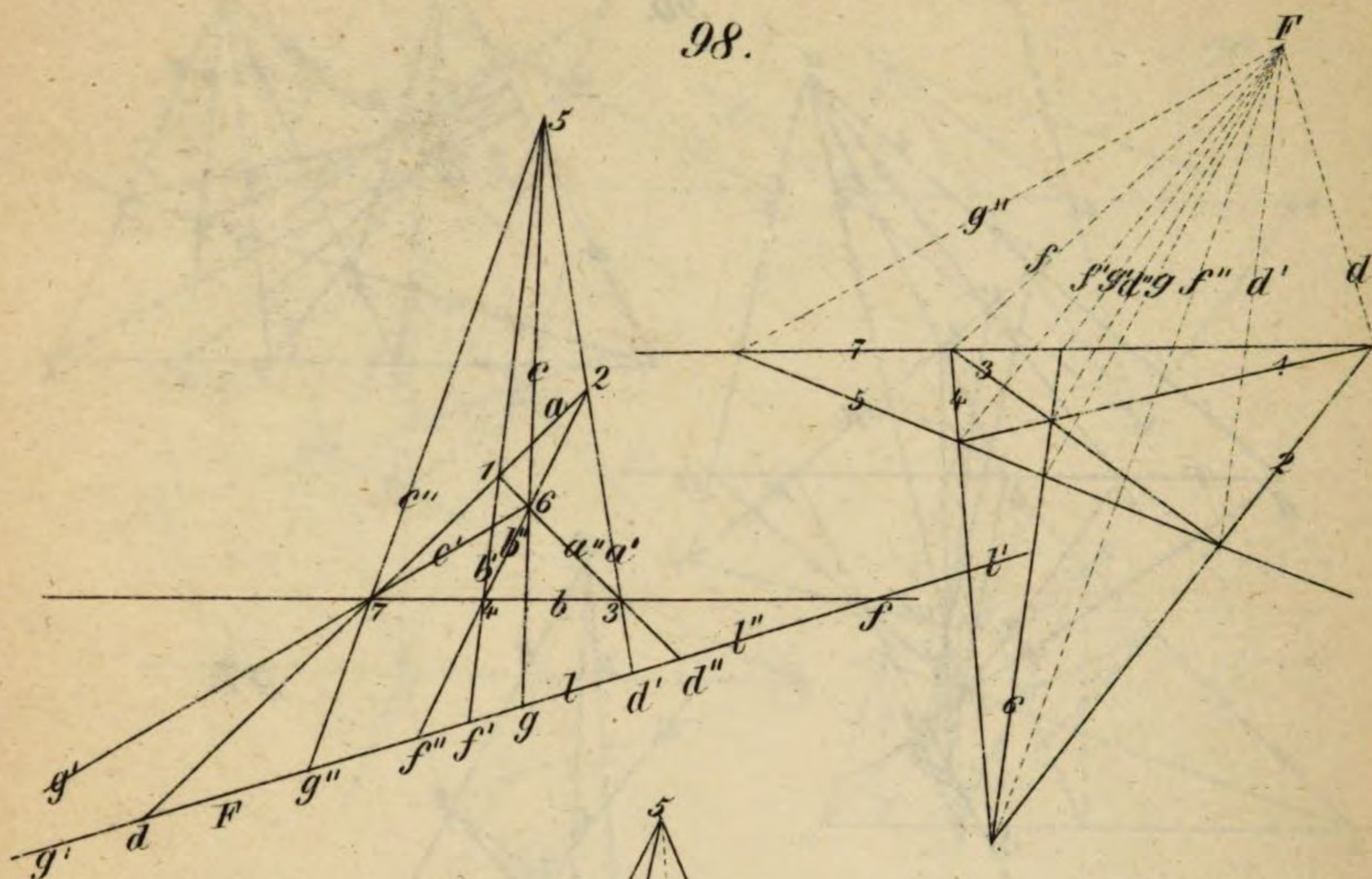




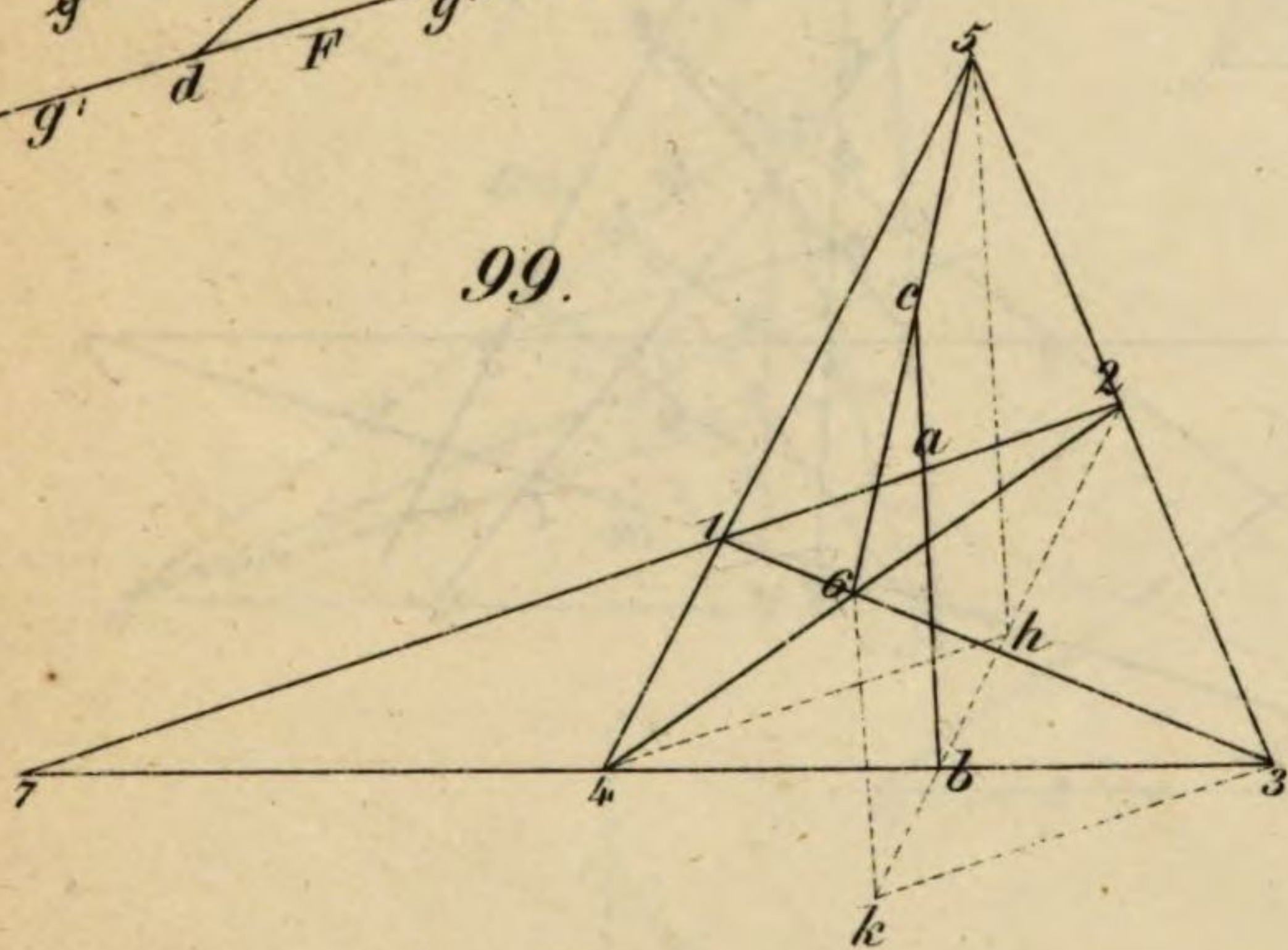




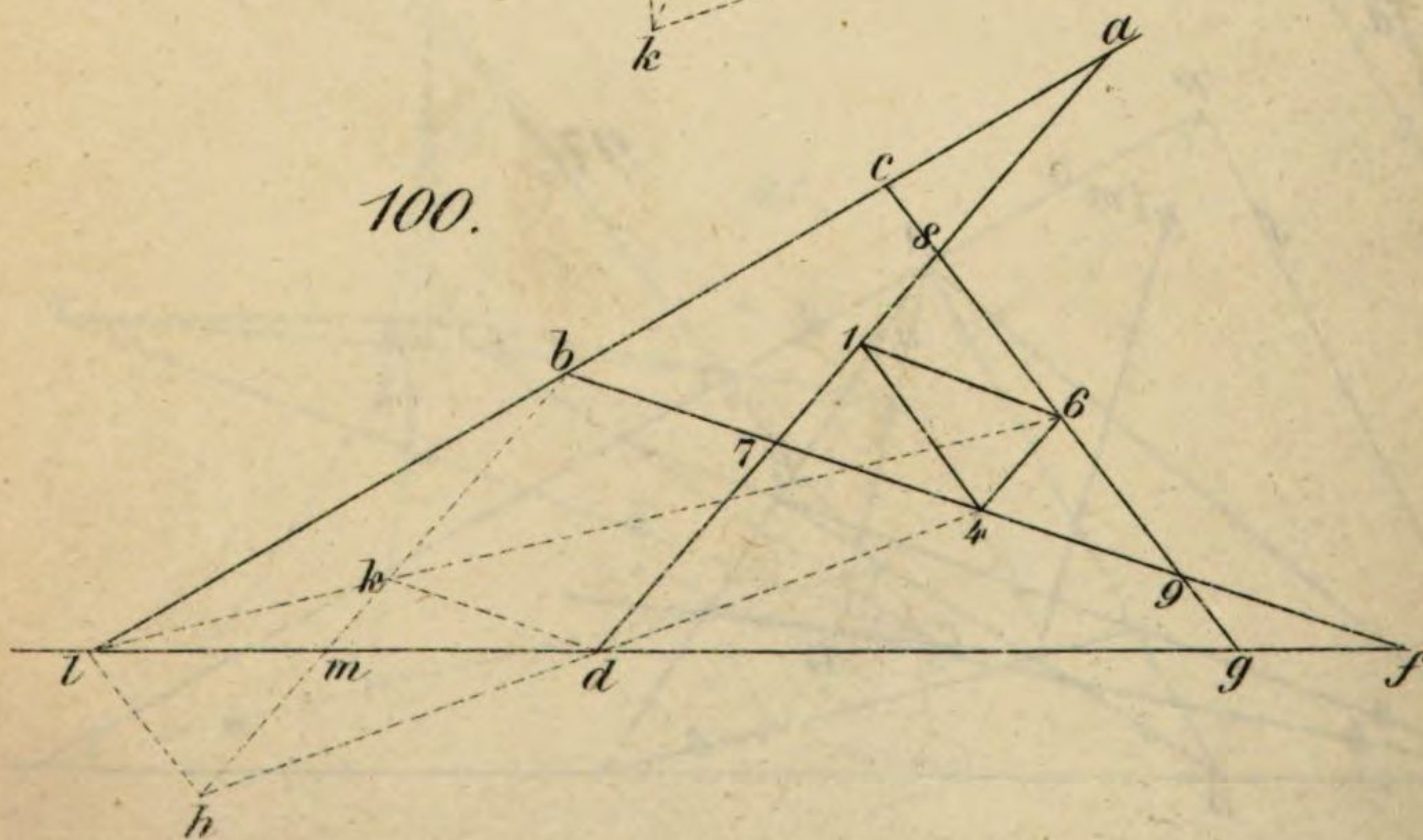
98.



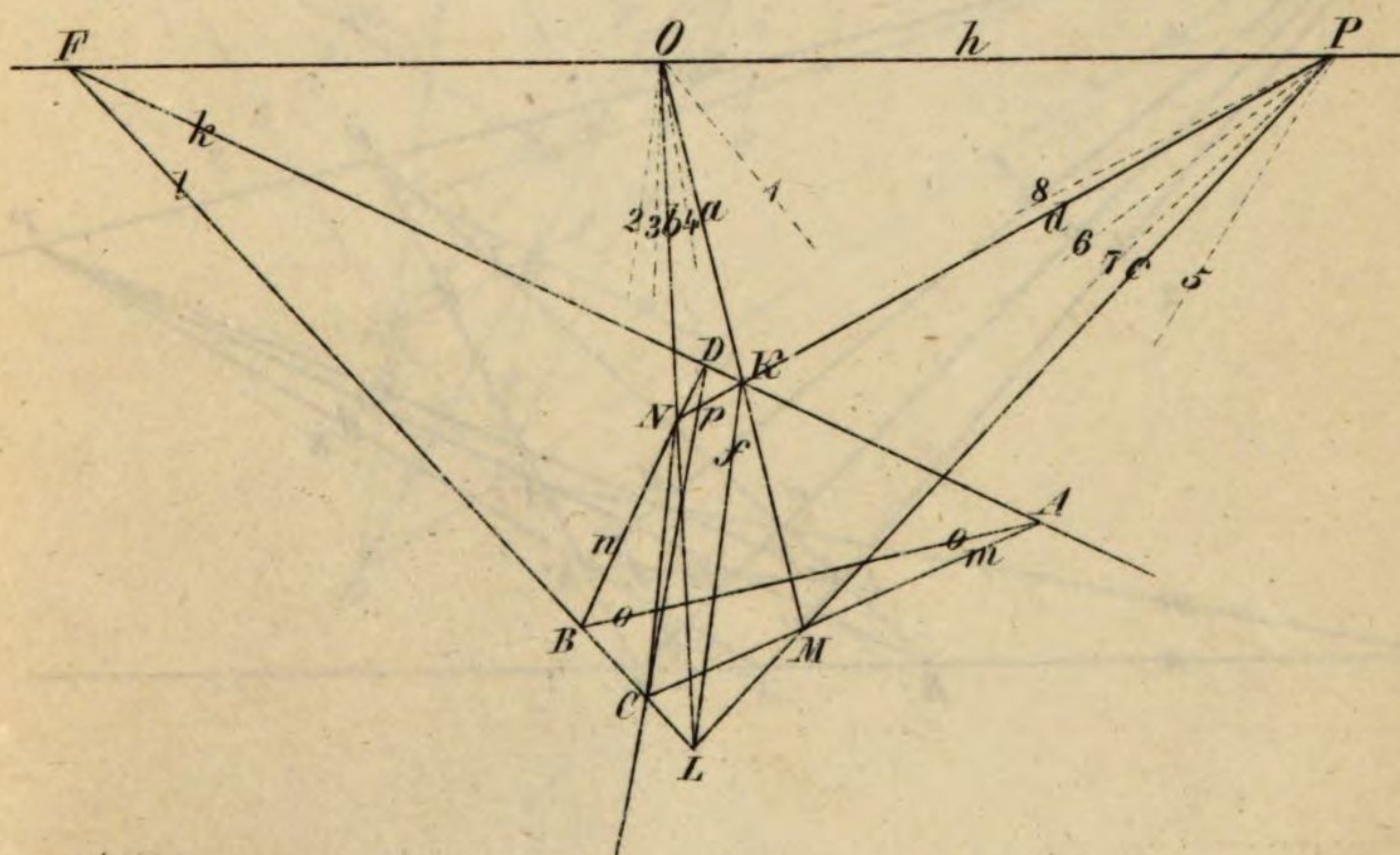
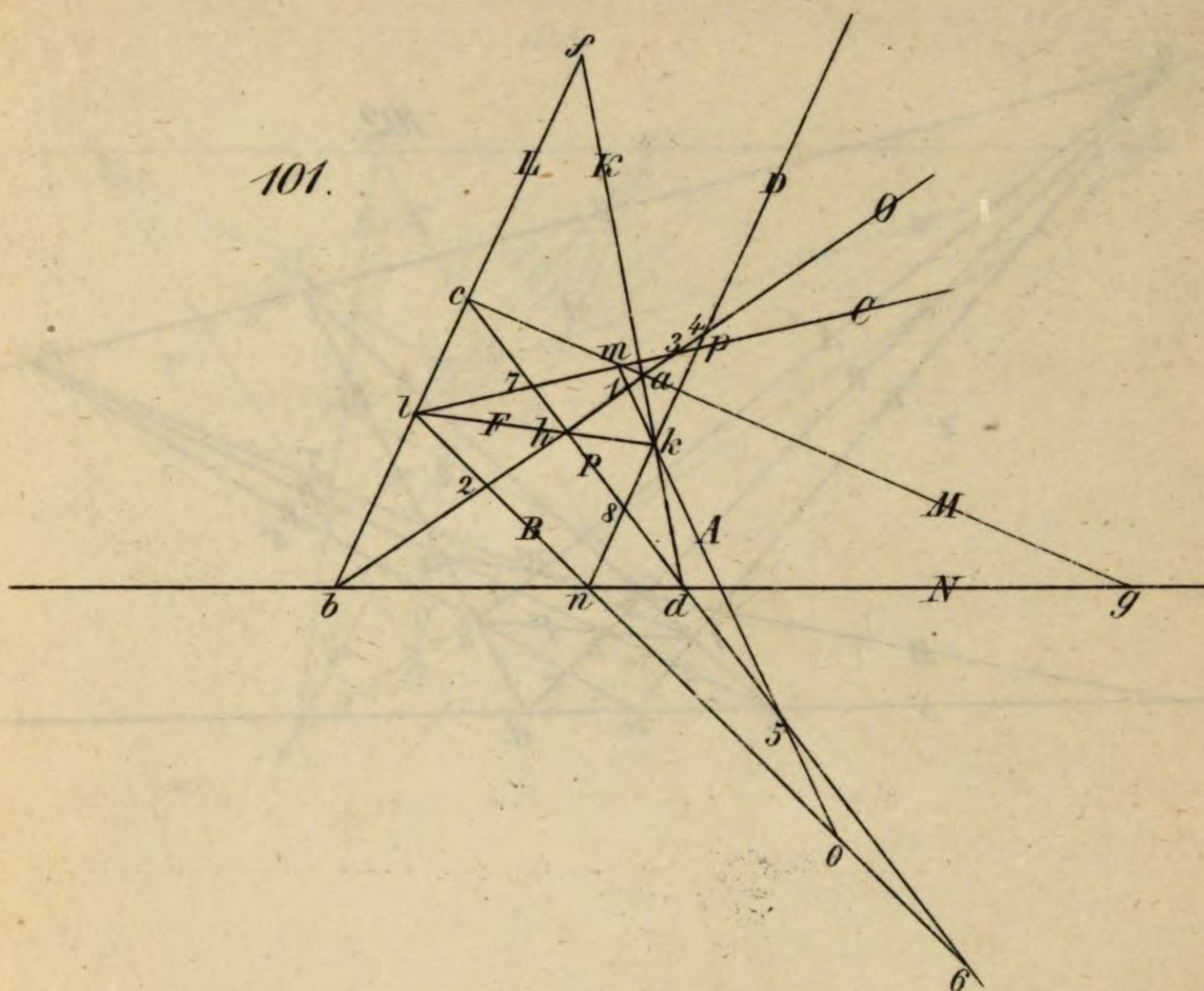
99.



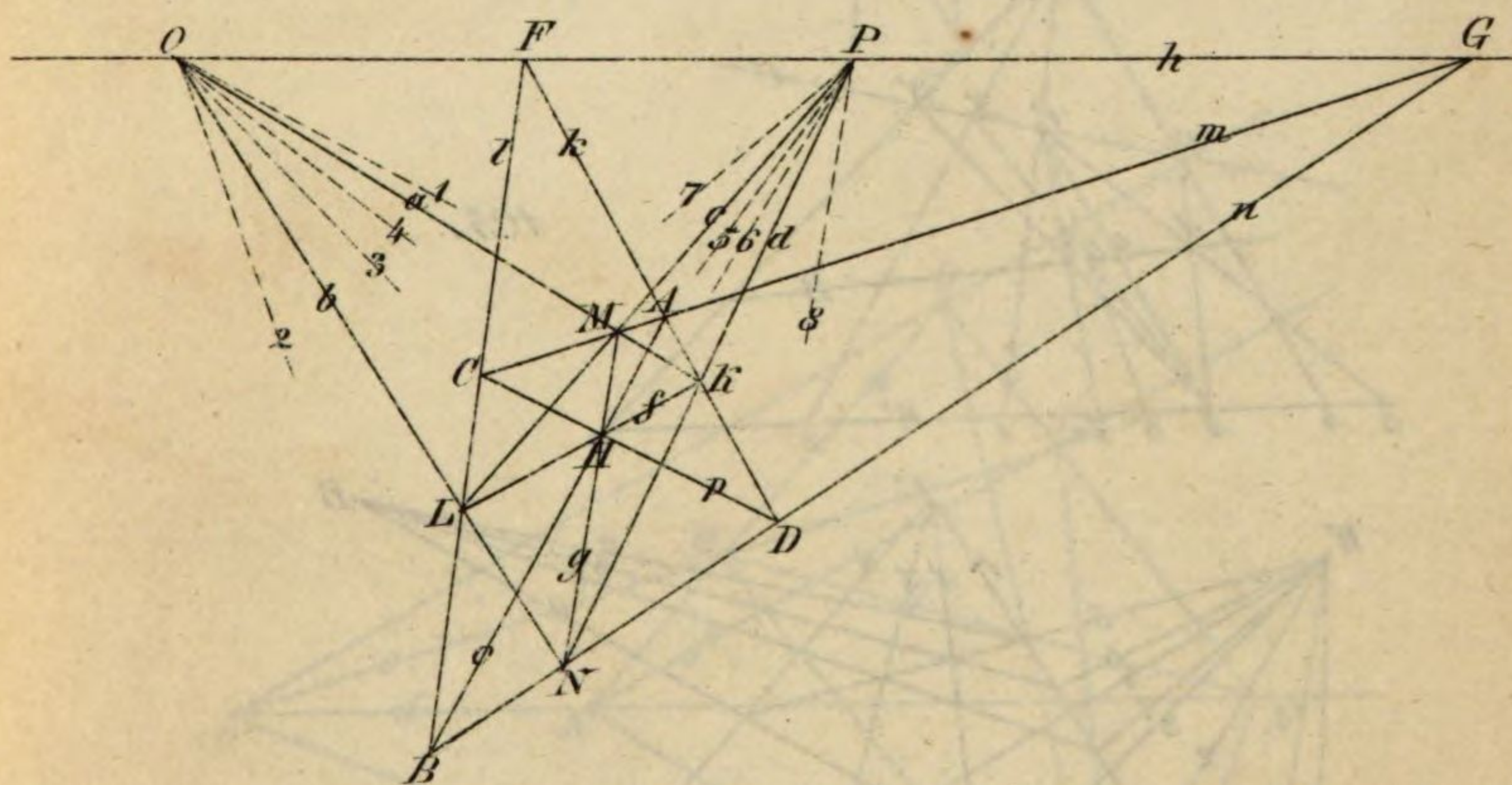
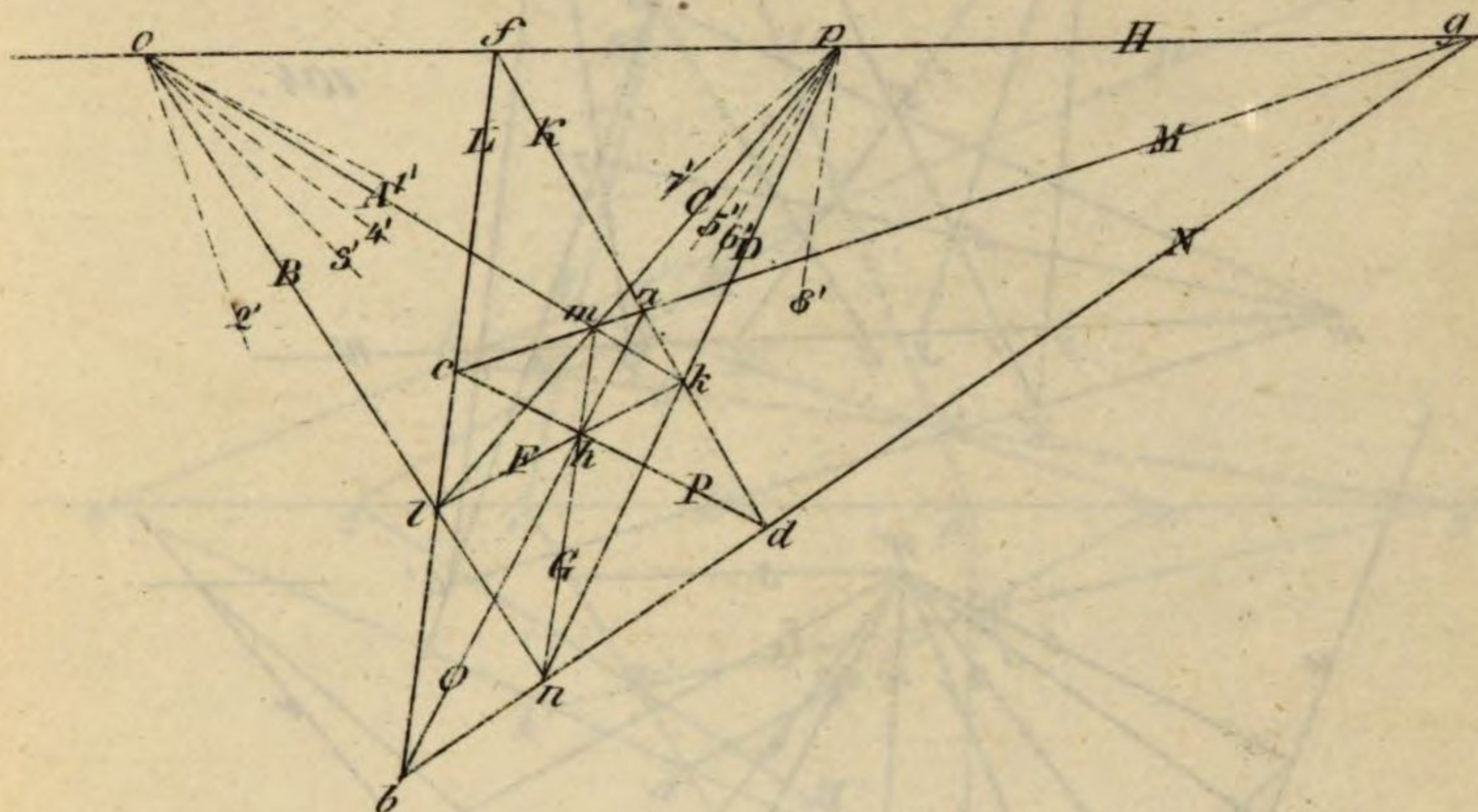
100.

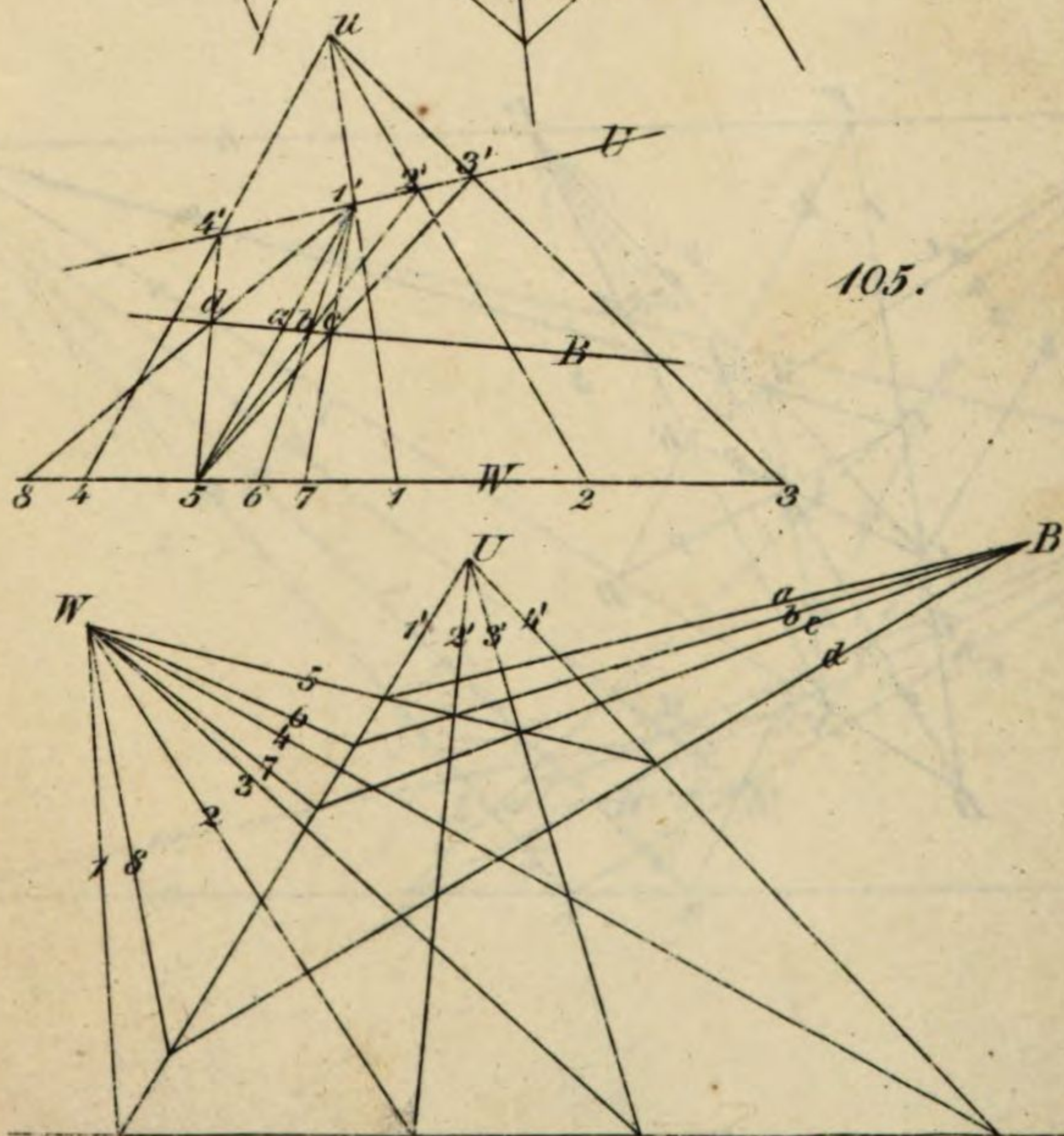
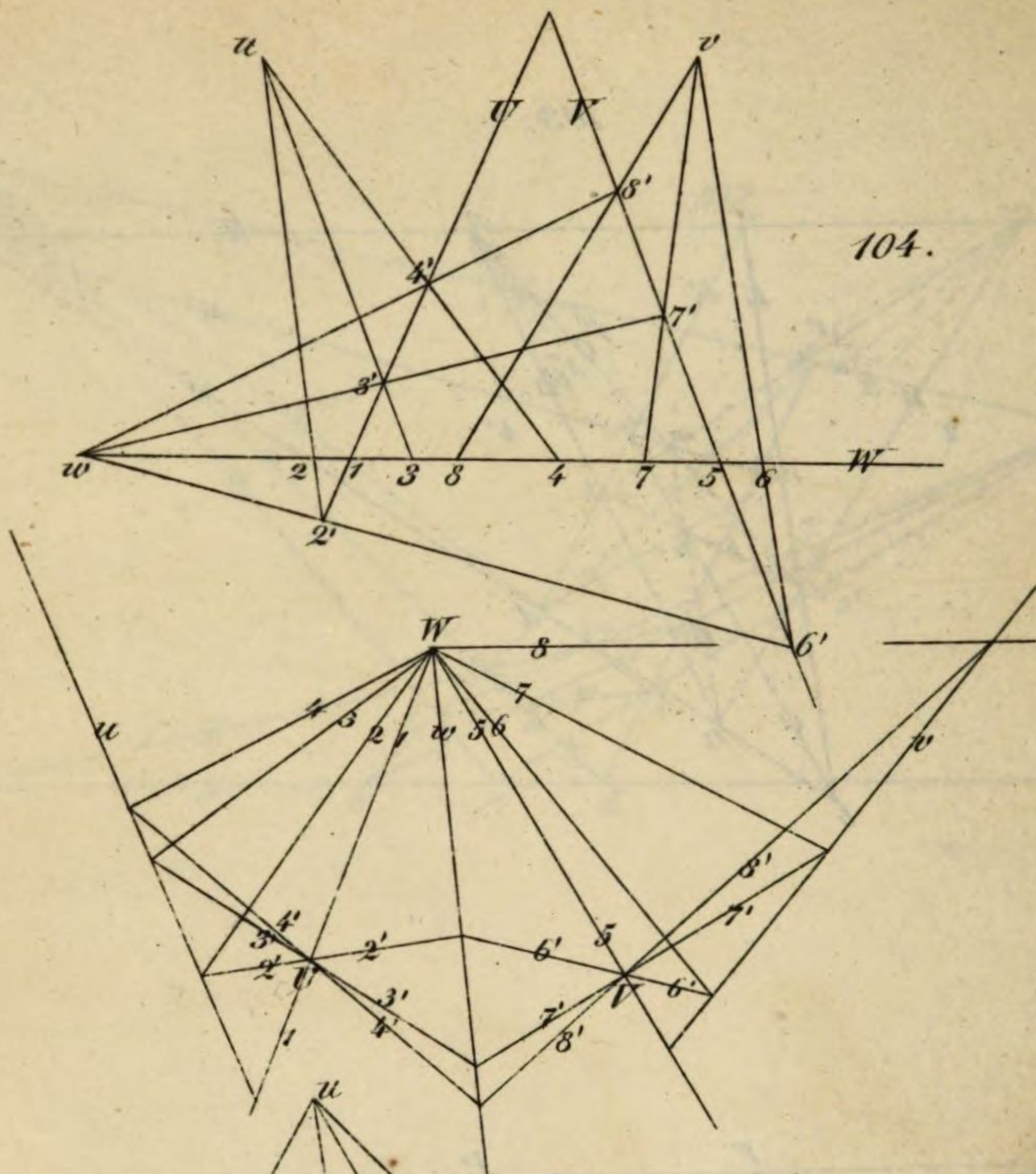


101.

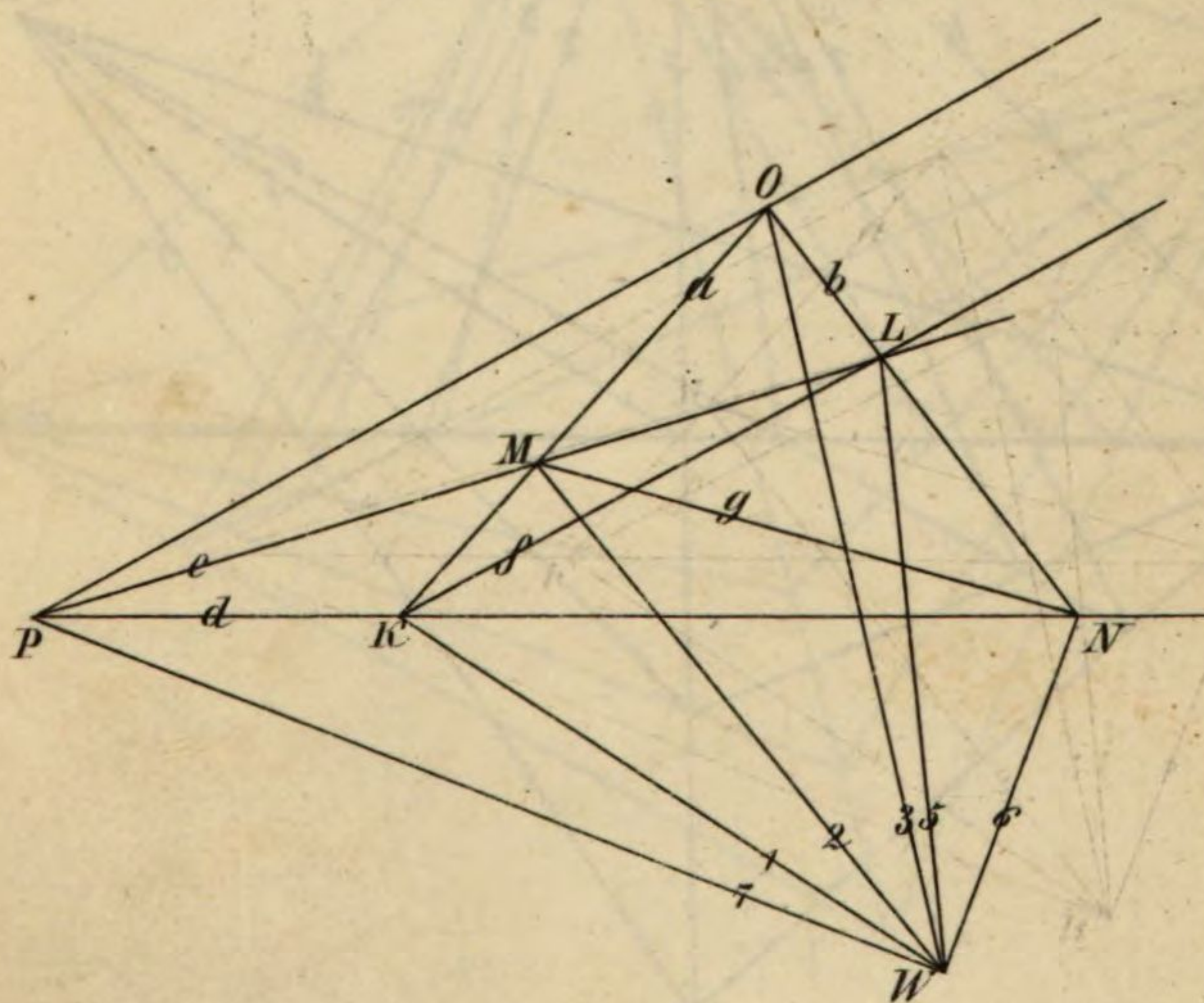
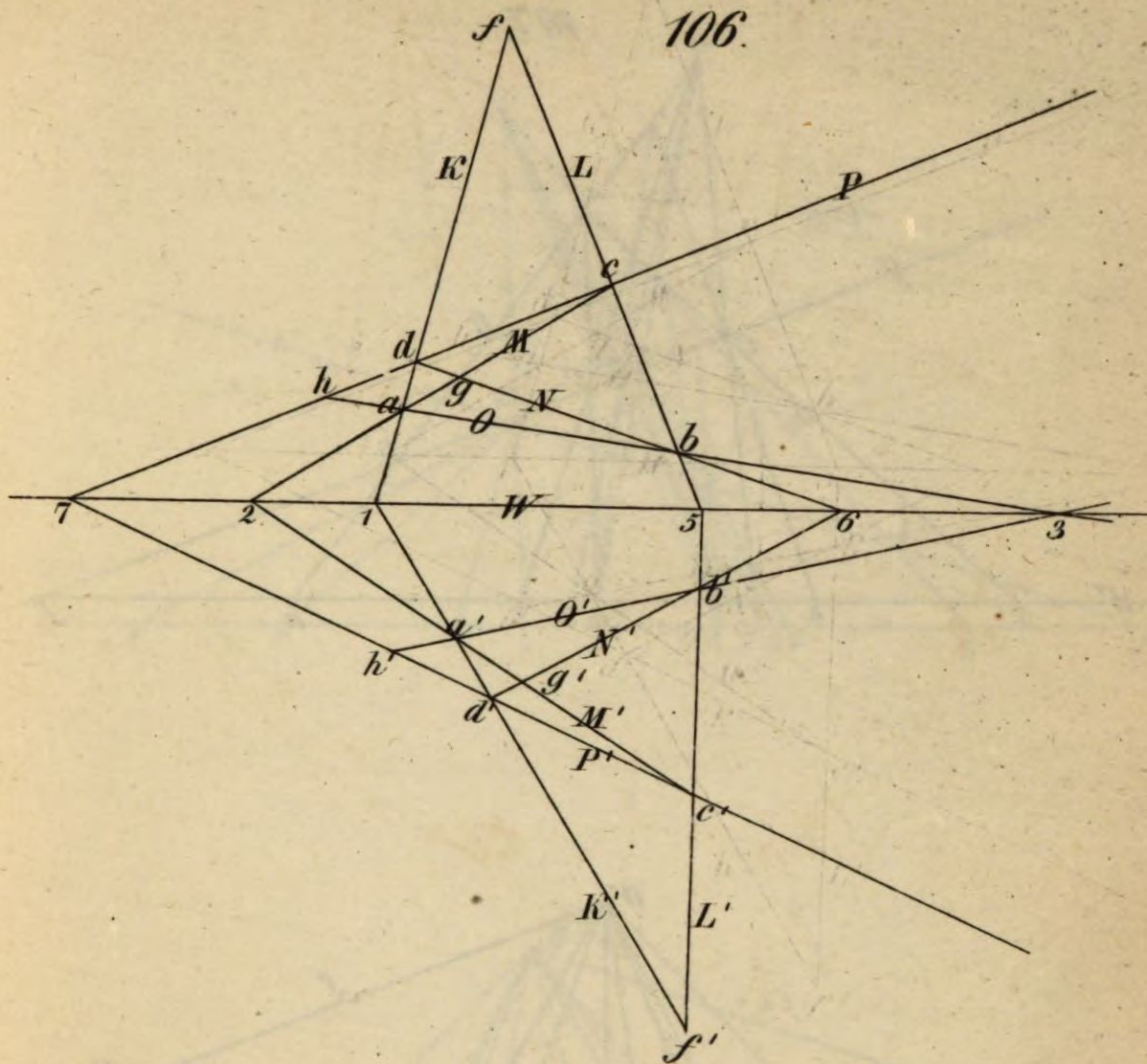


103.

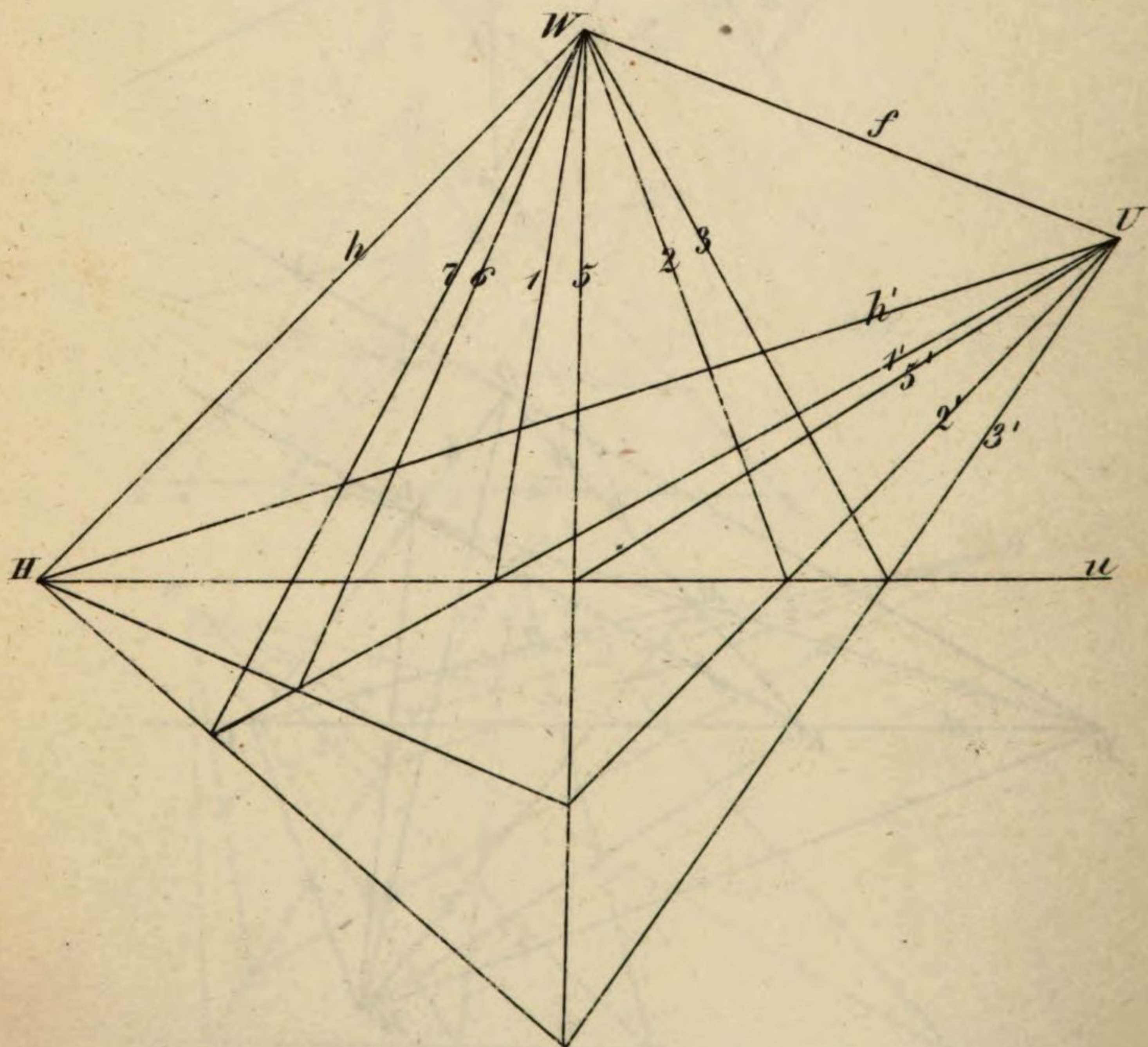
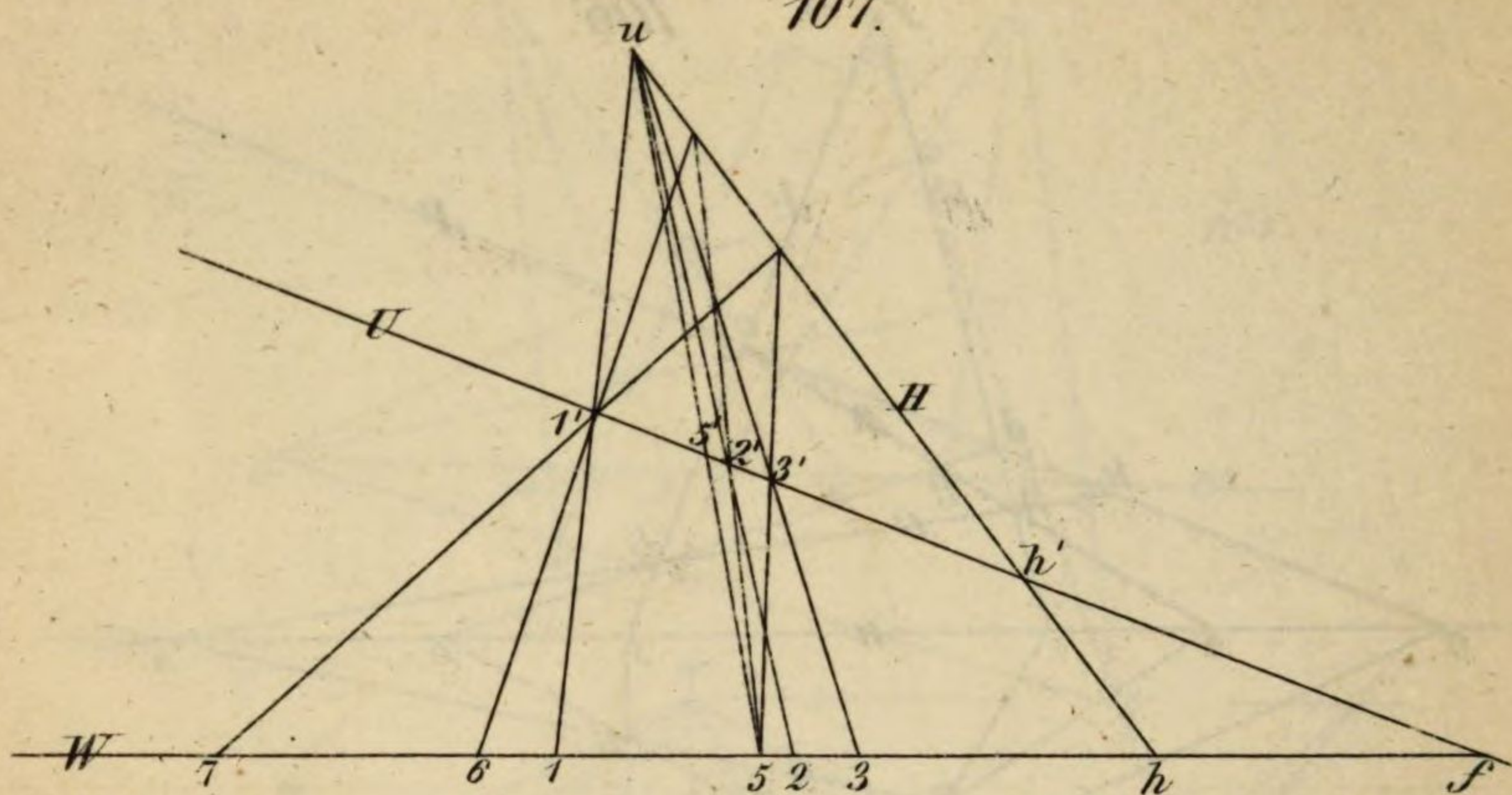


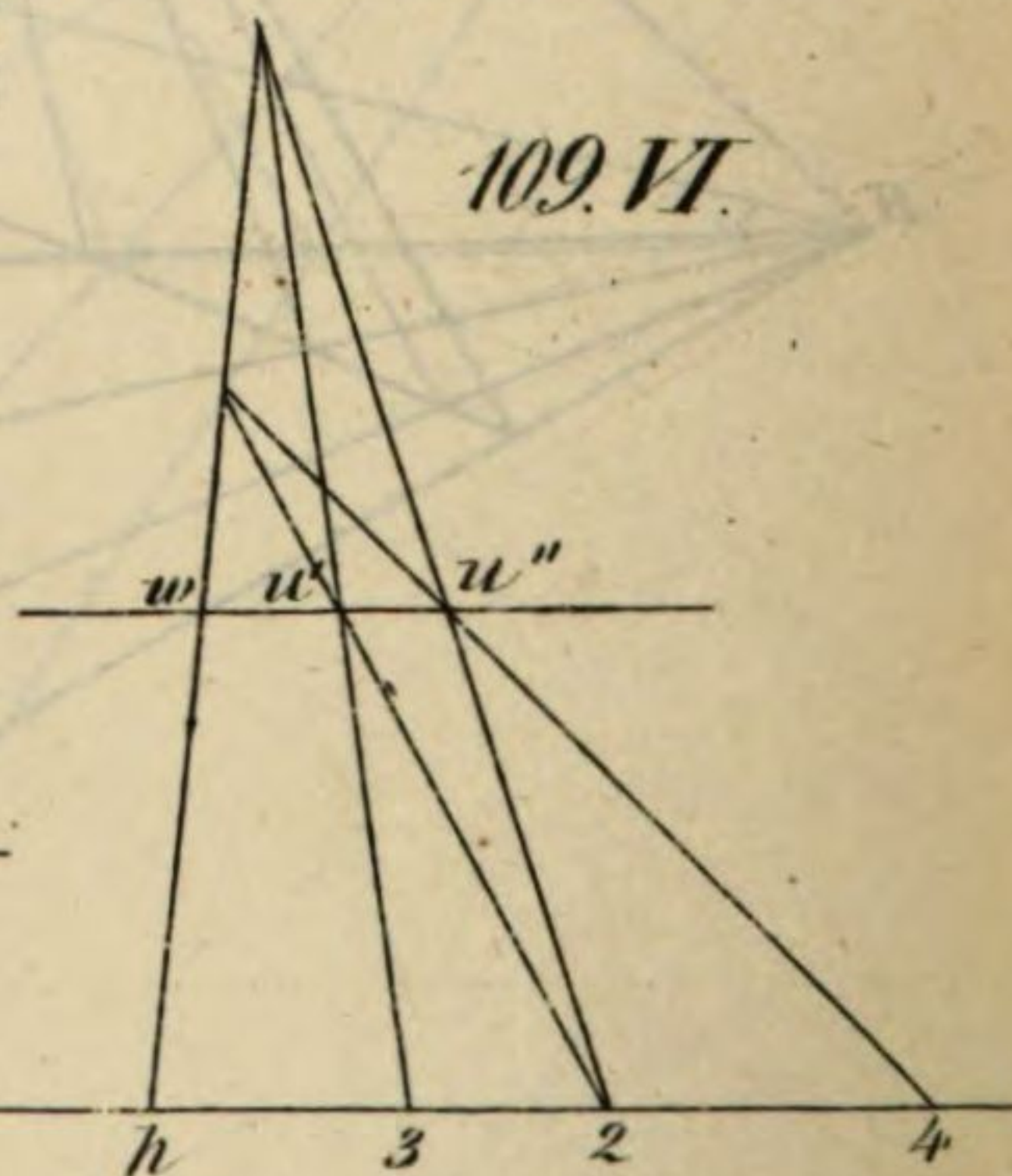
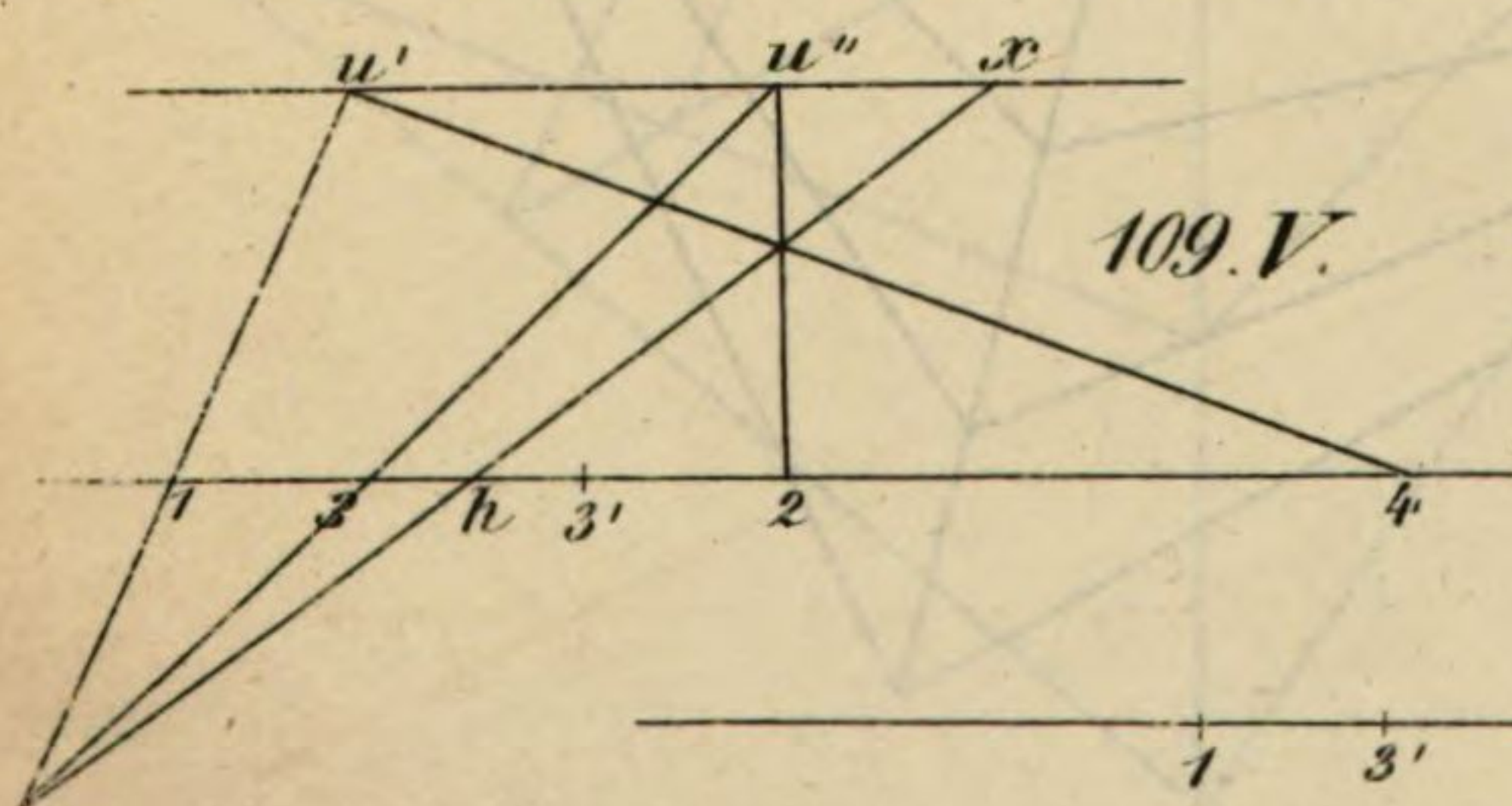
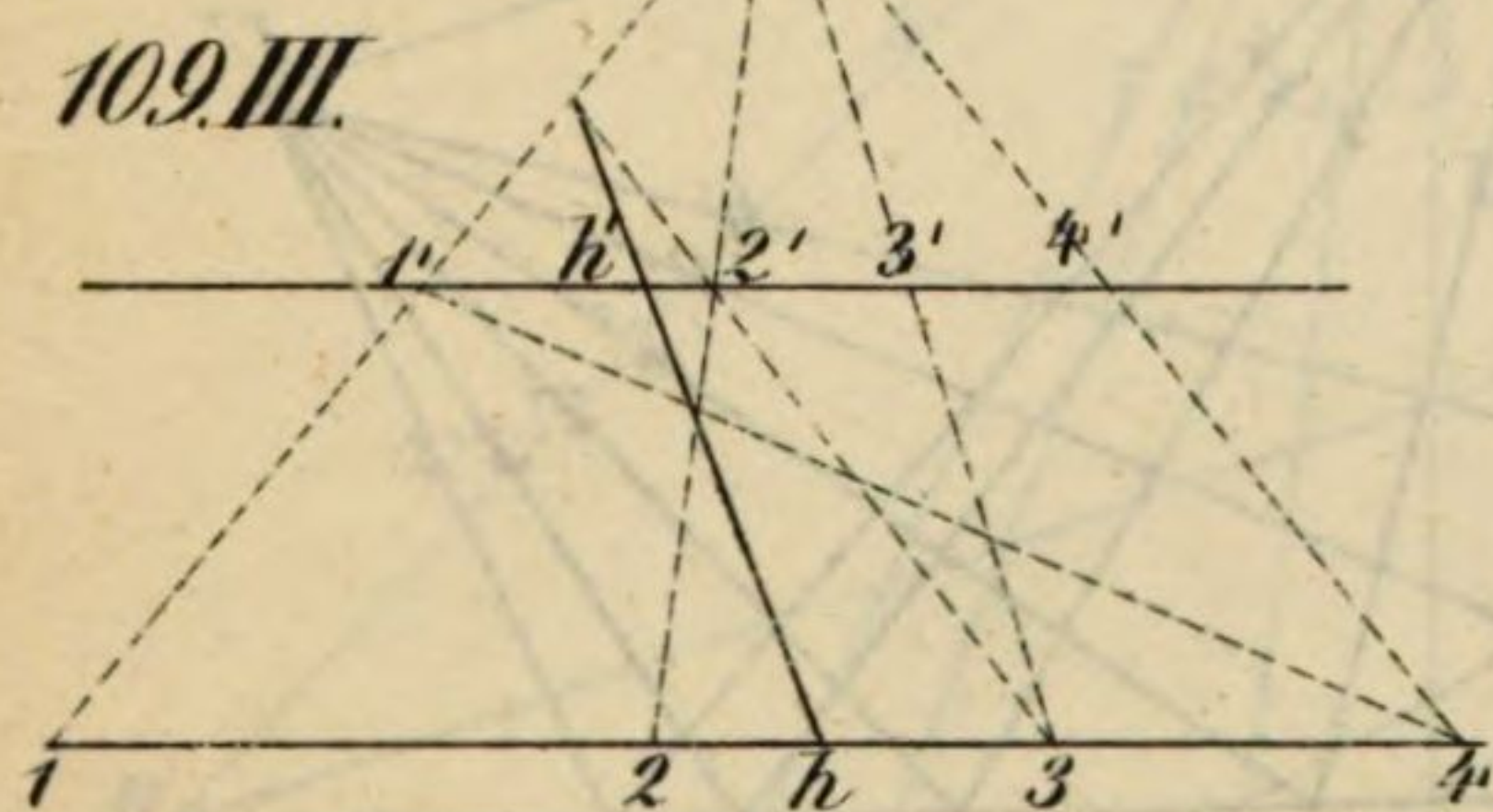
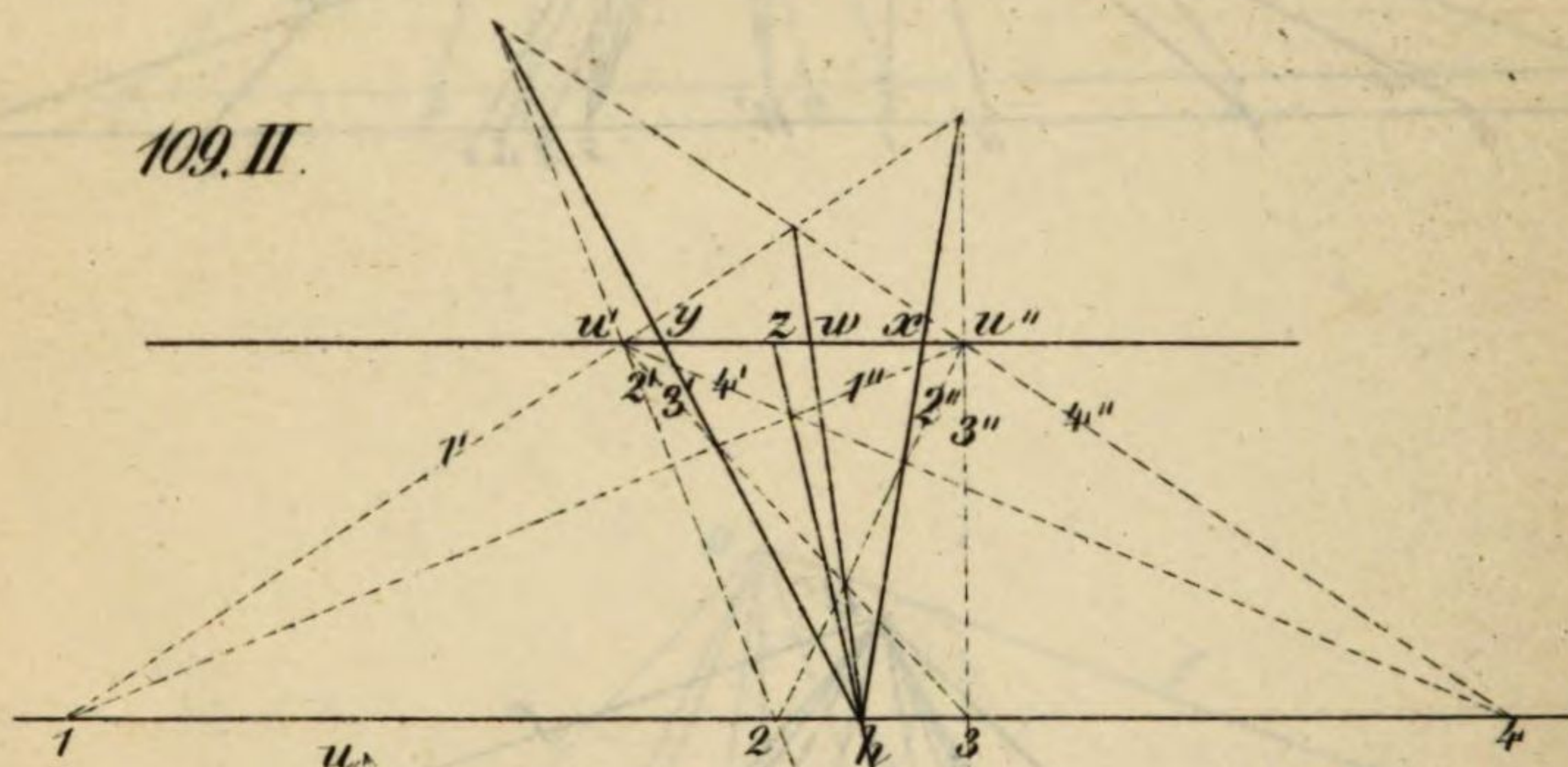
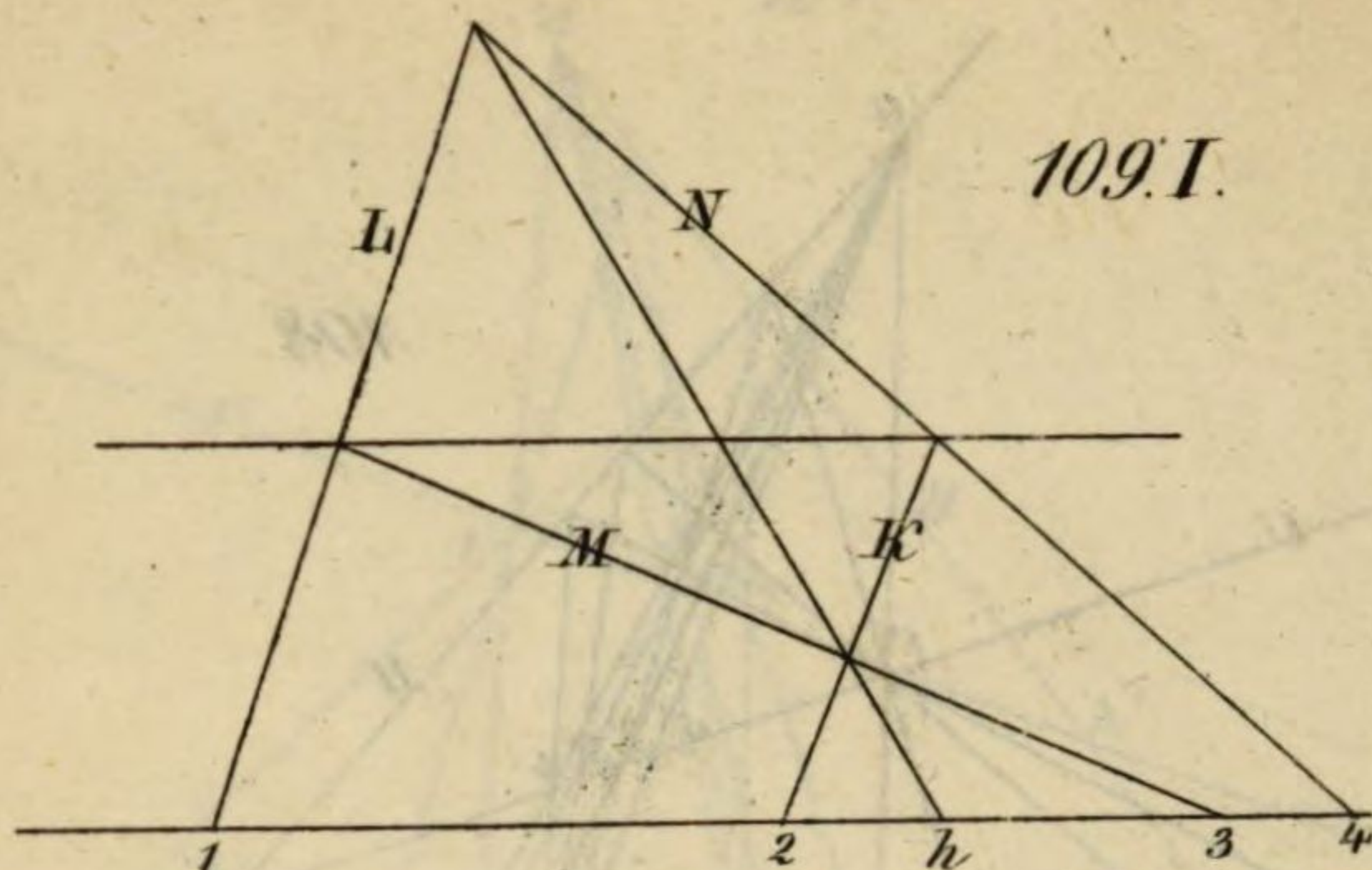


106.

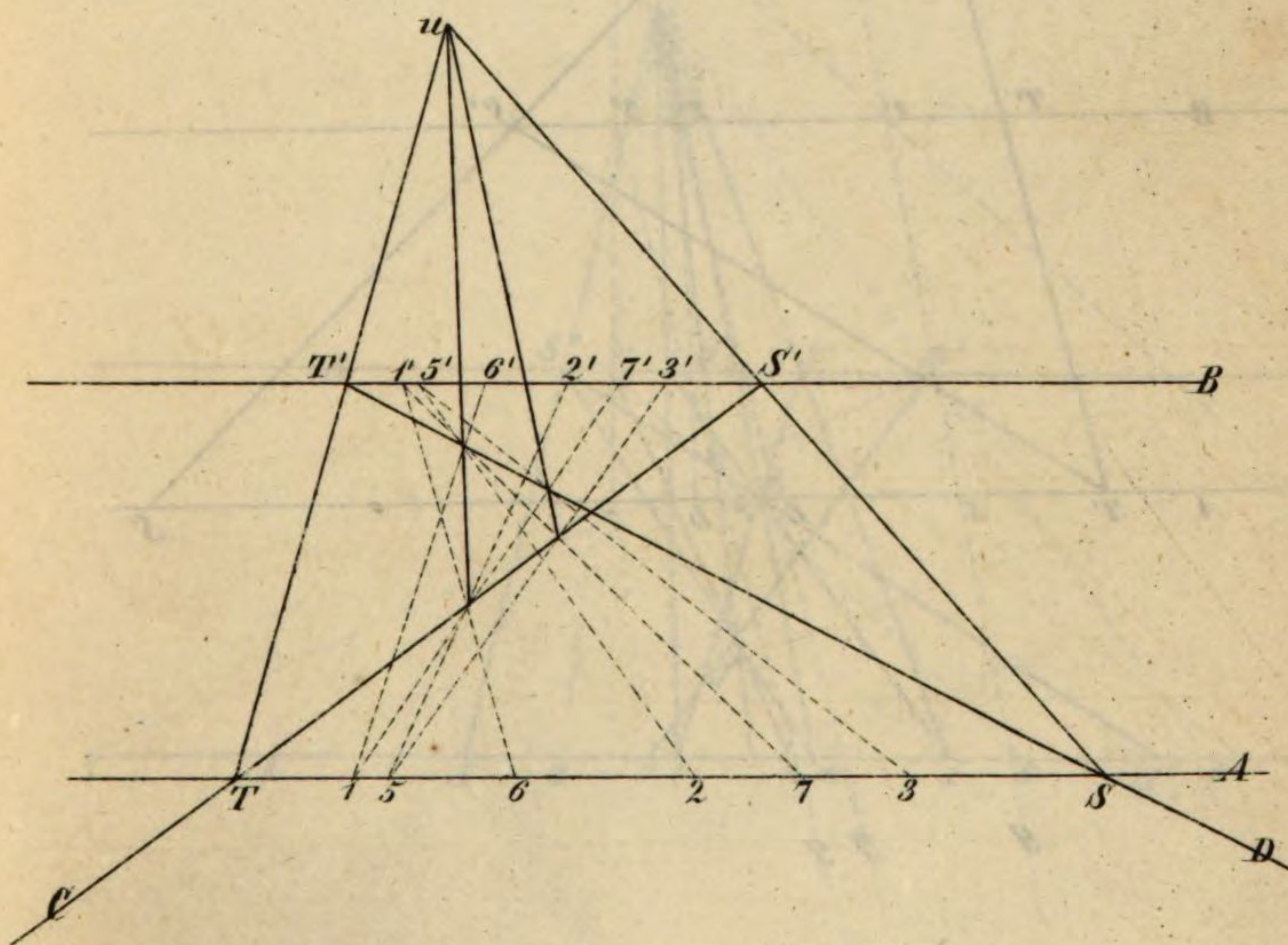
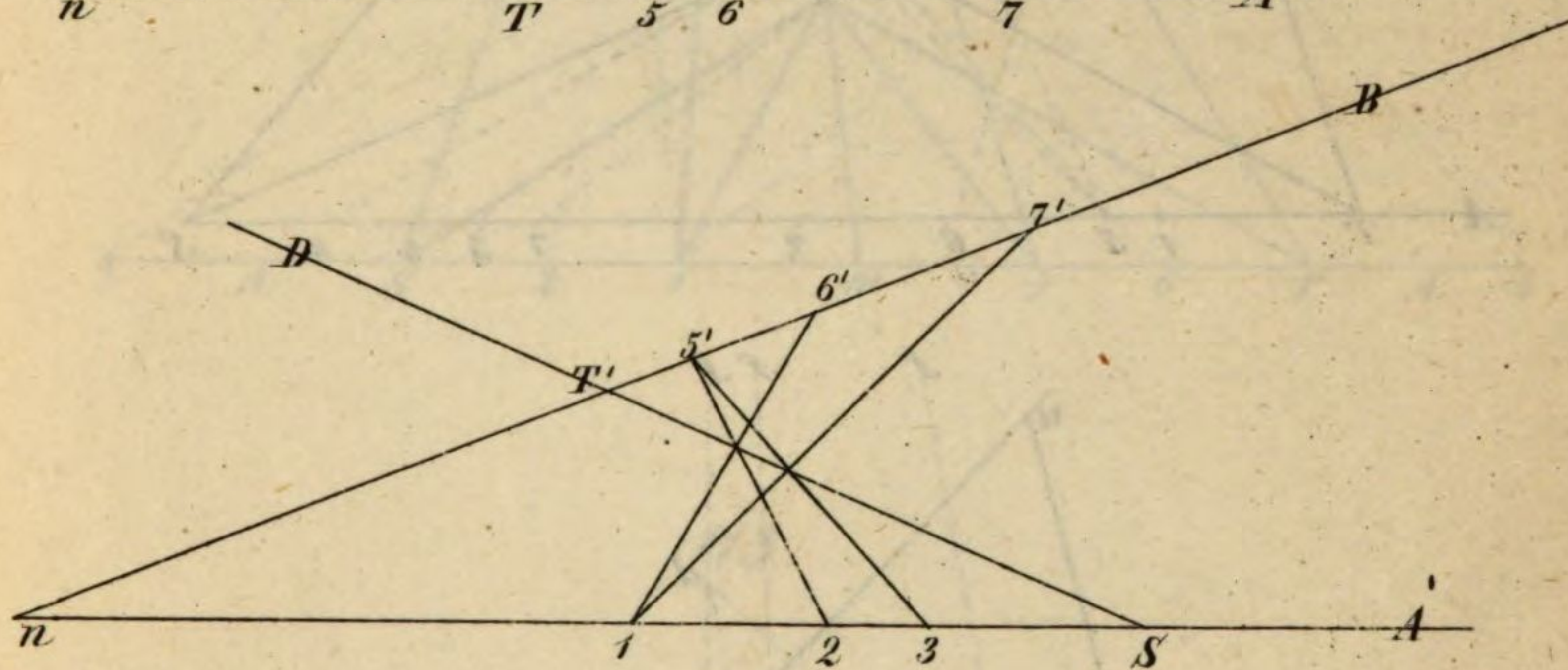
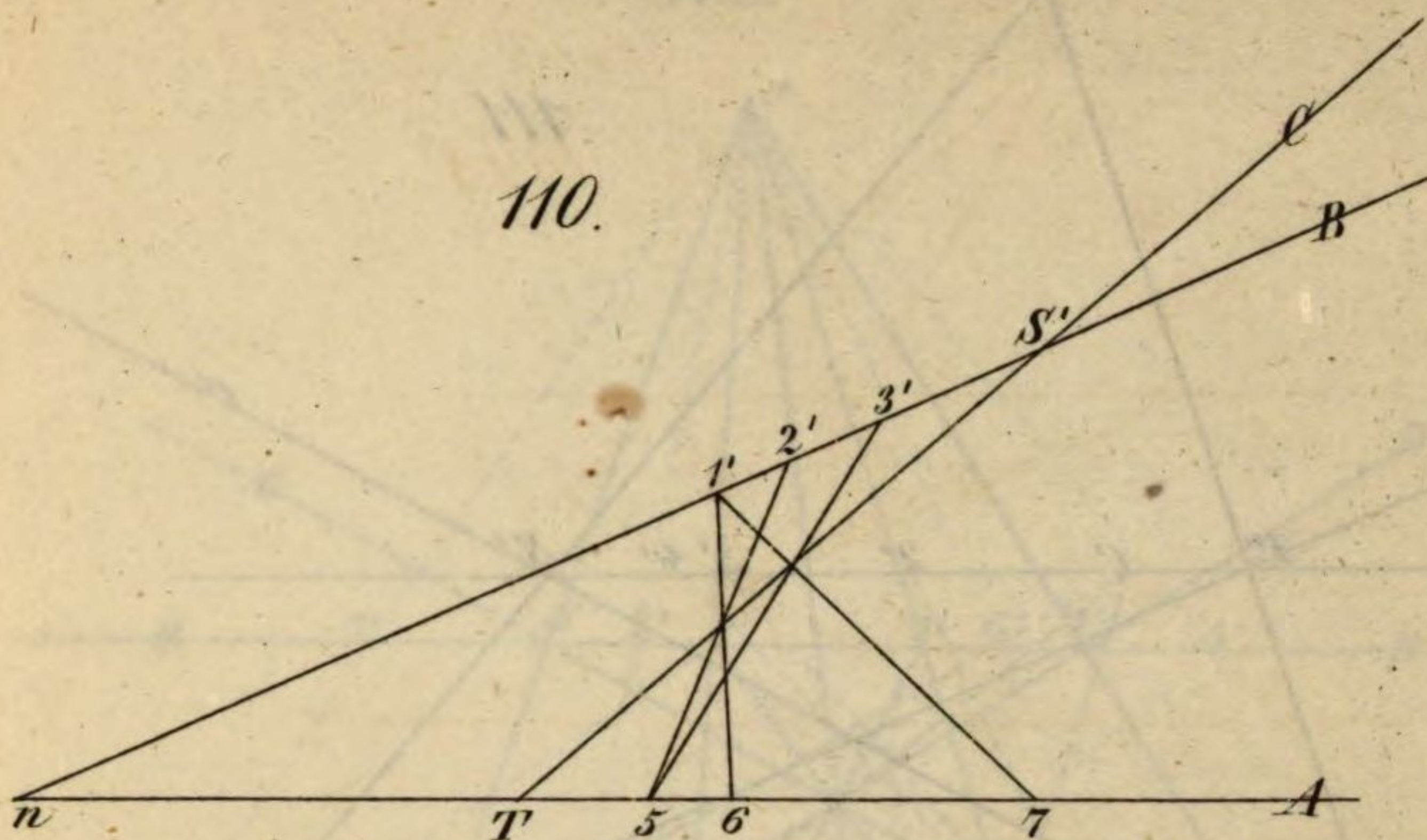


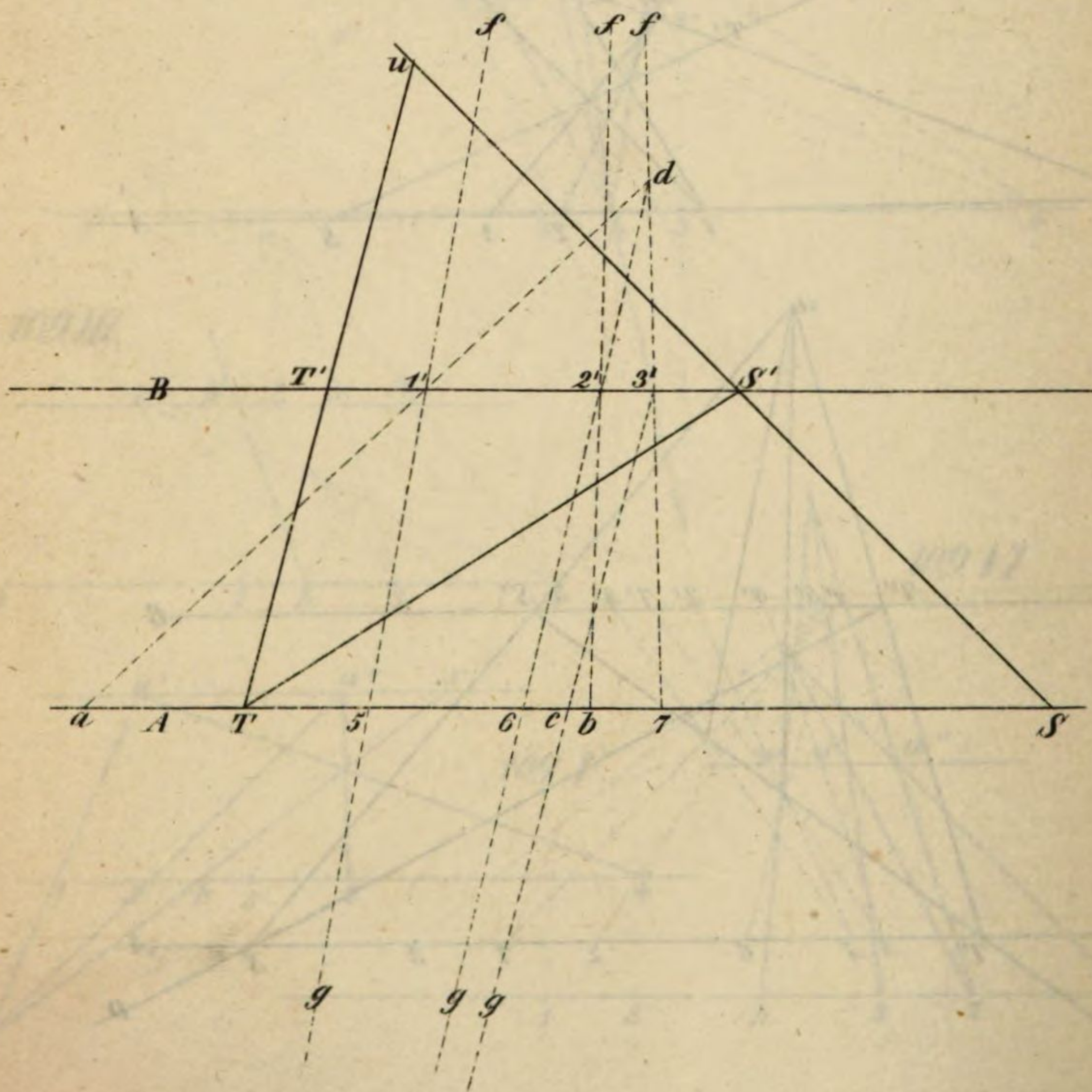
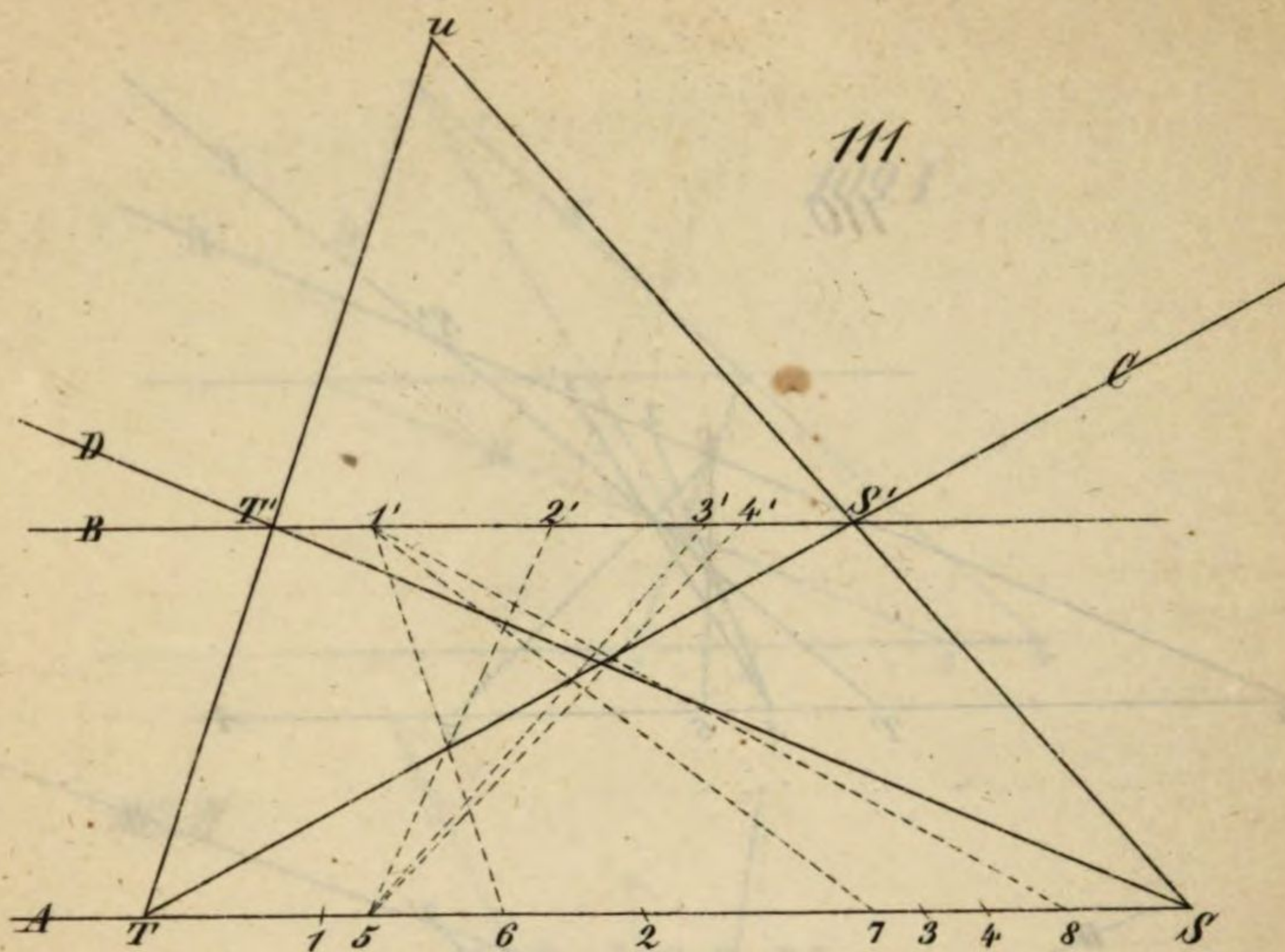
107.



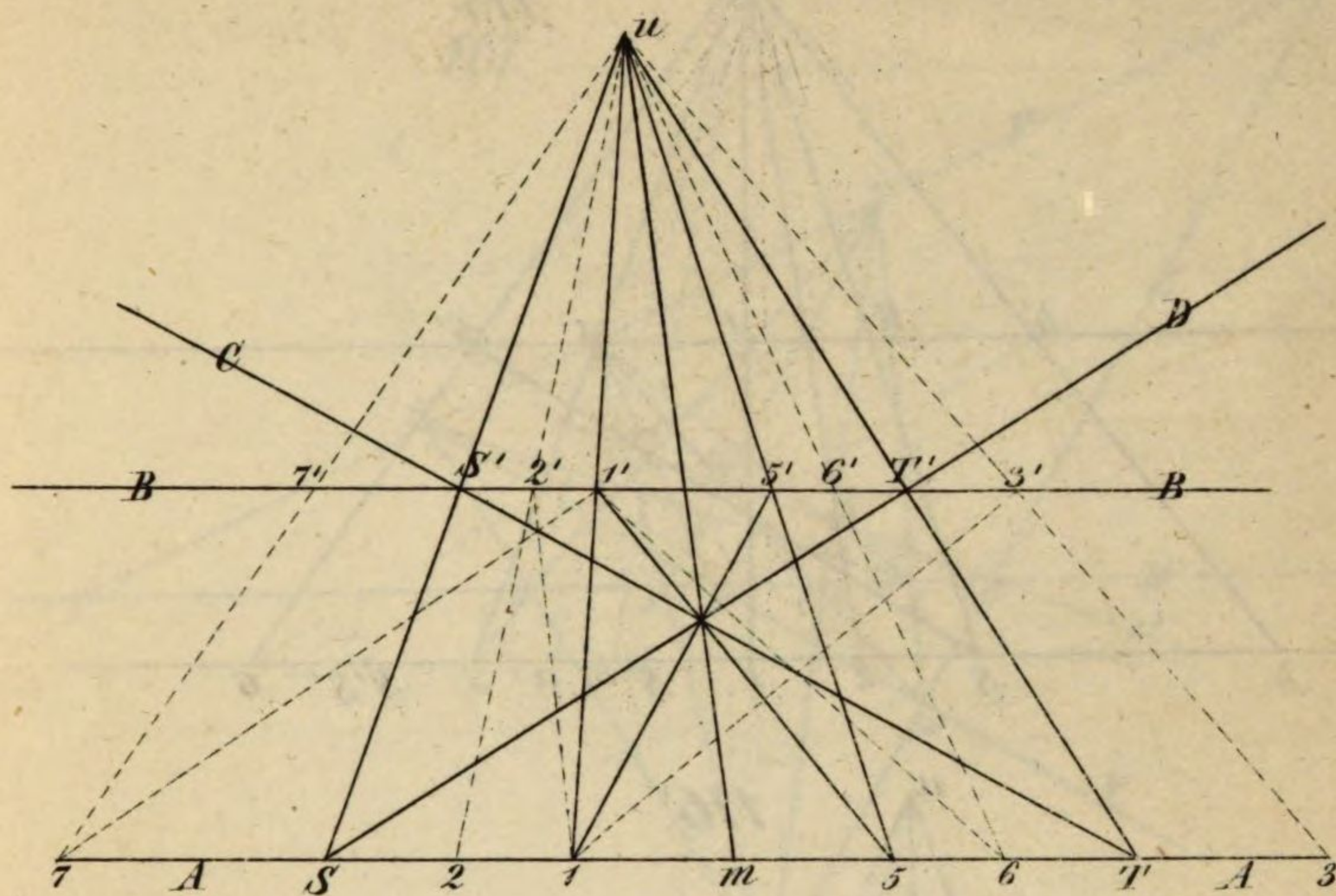


110.

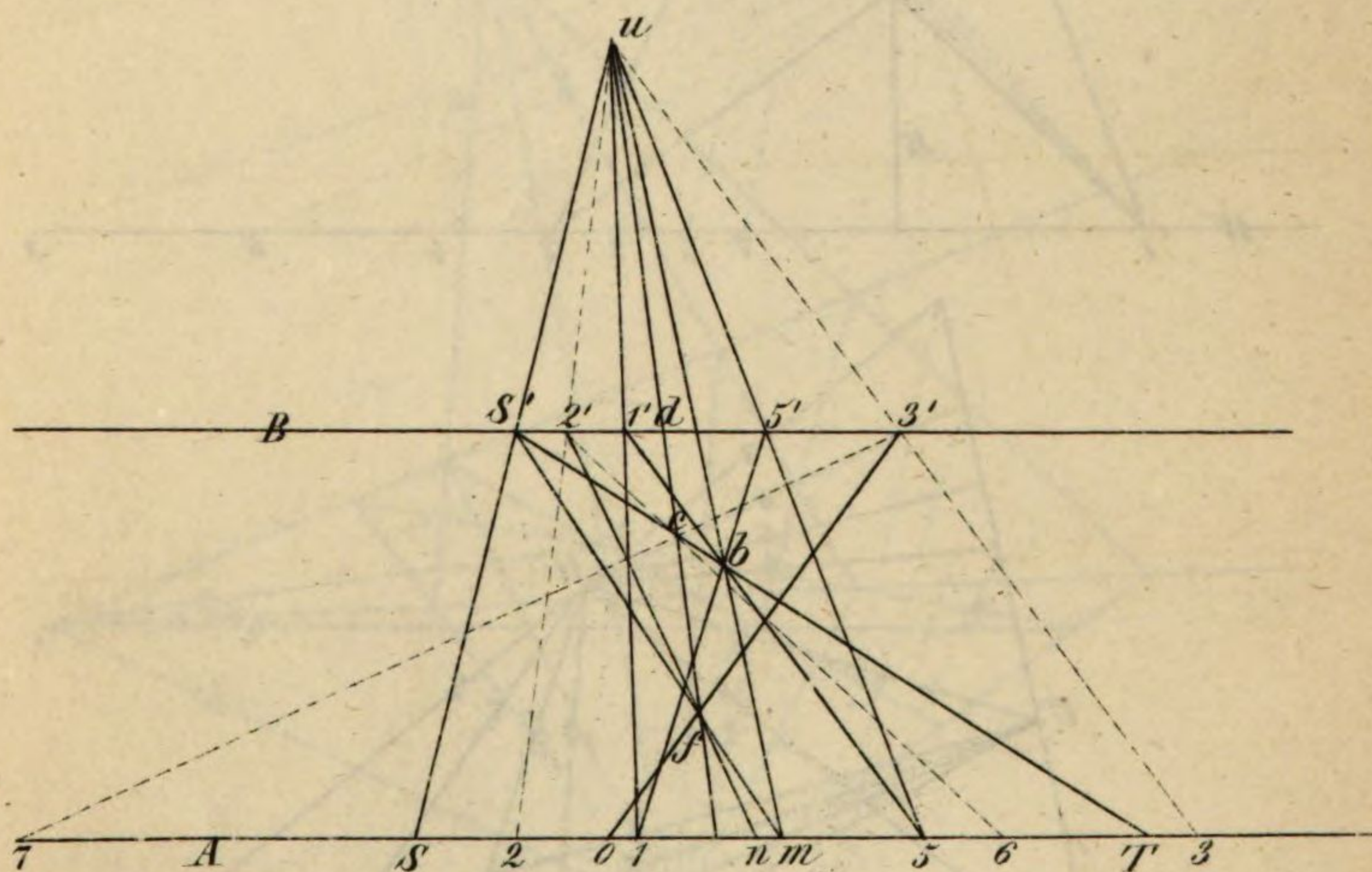


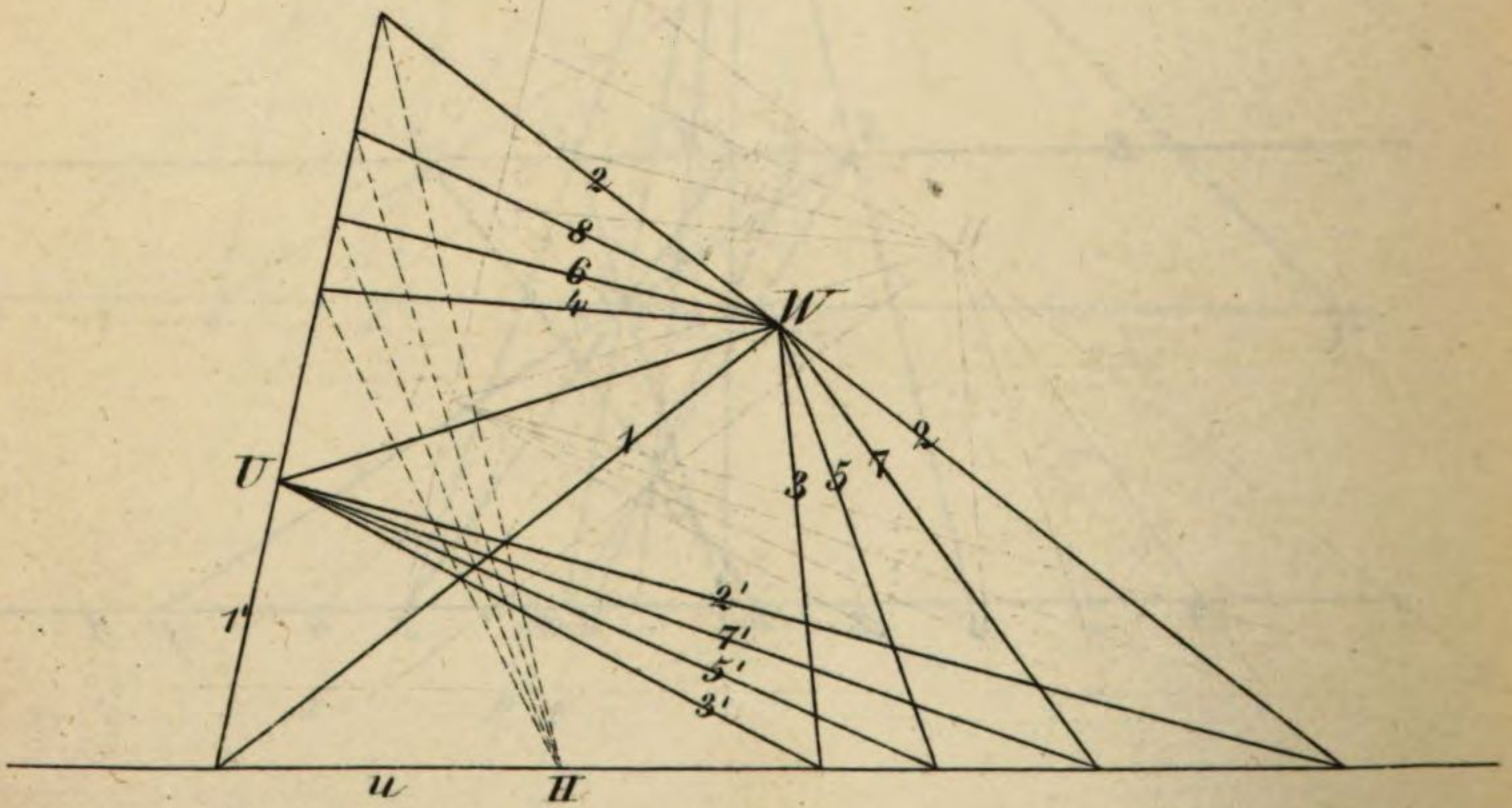
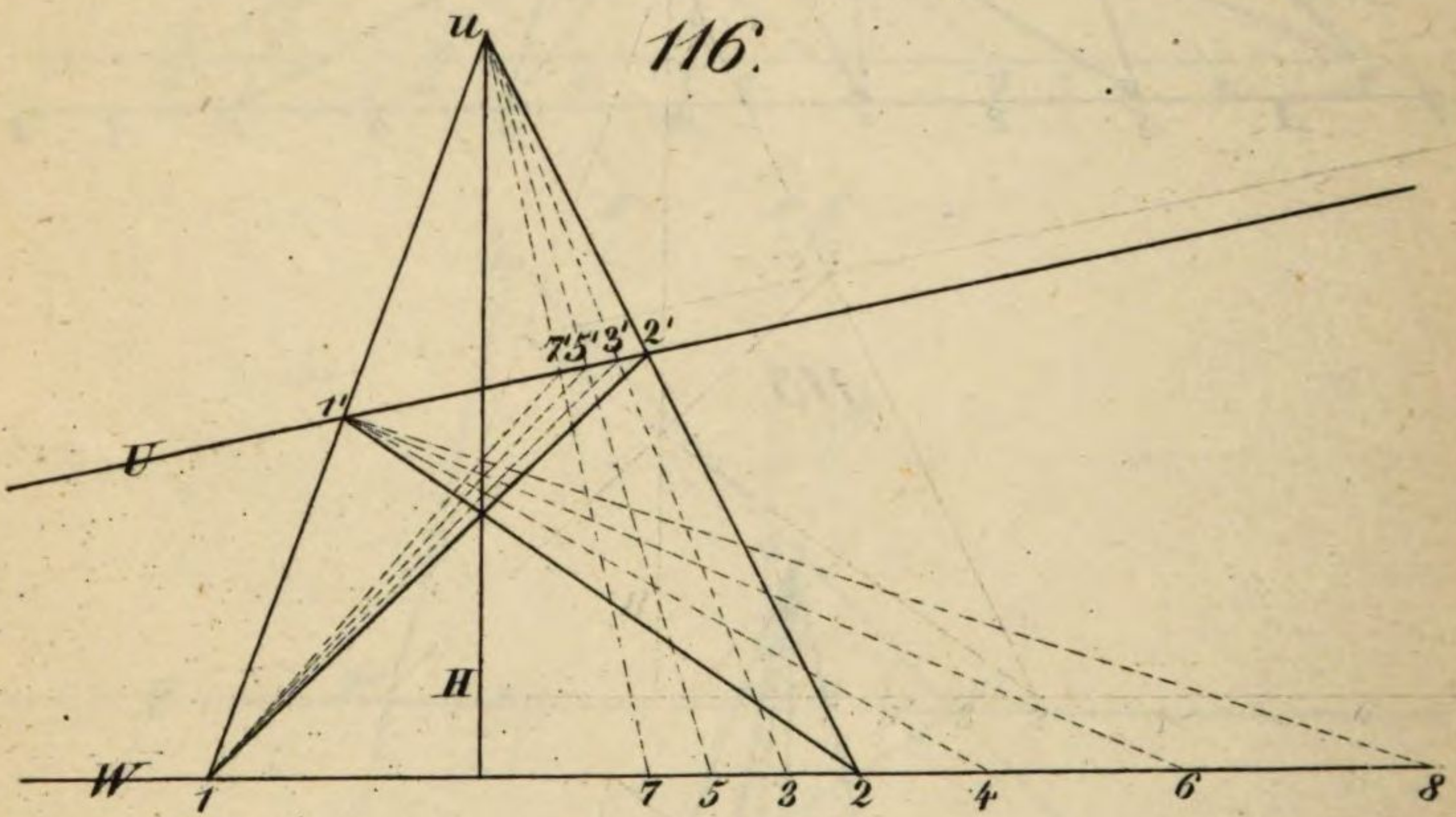
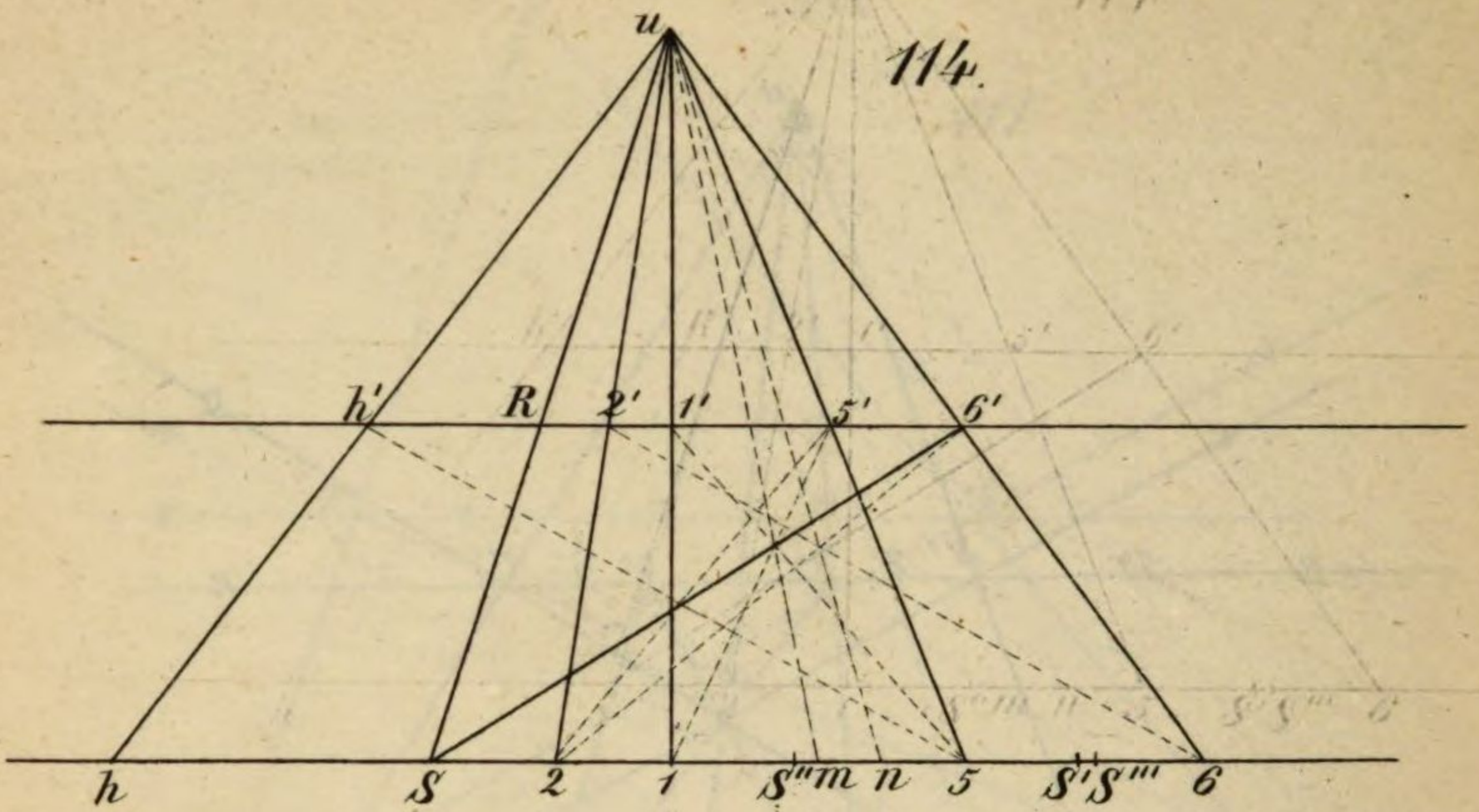


112.

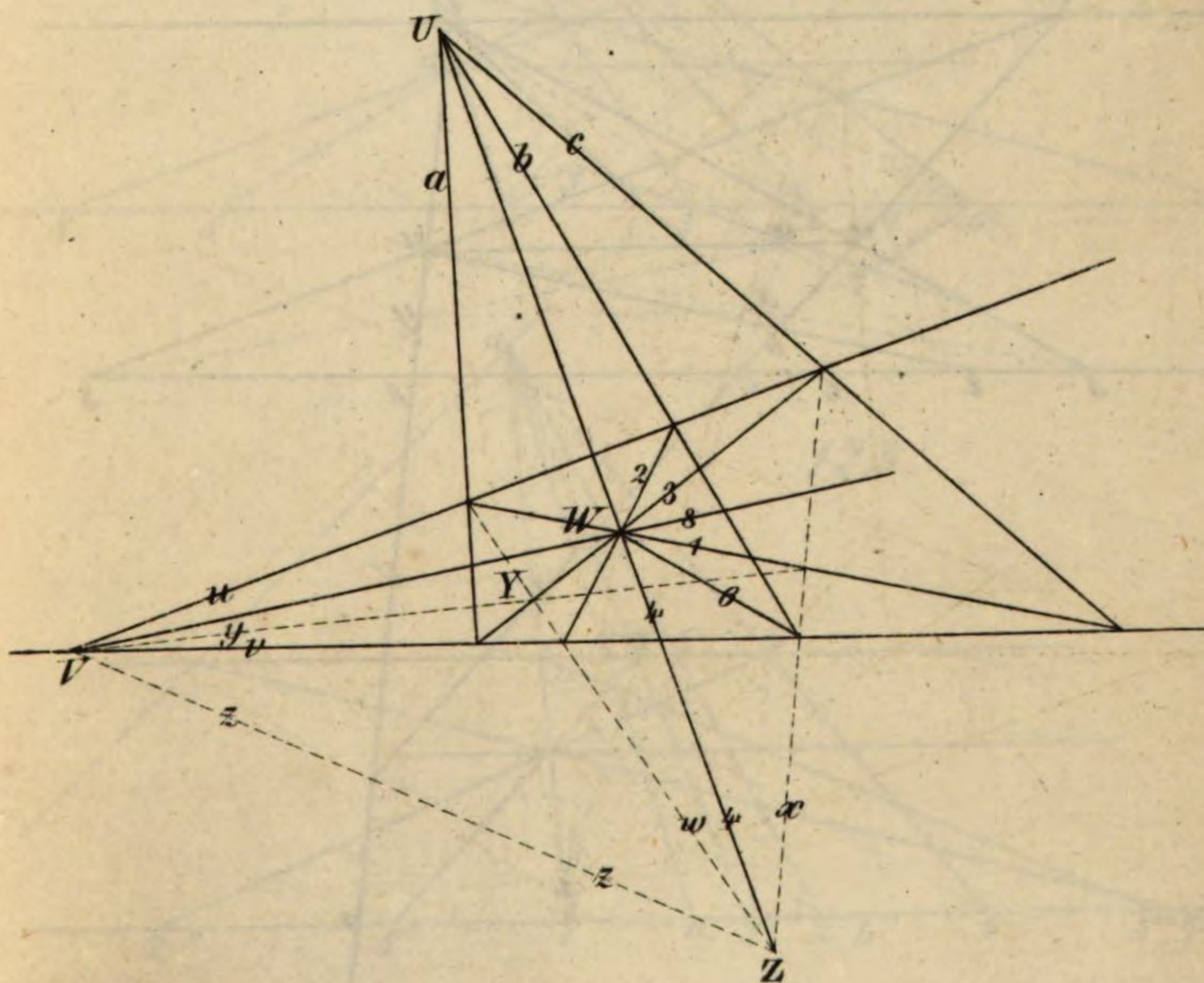
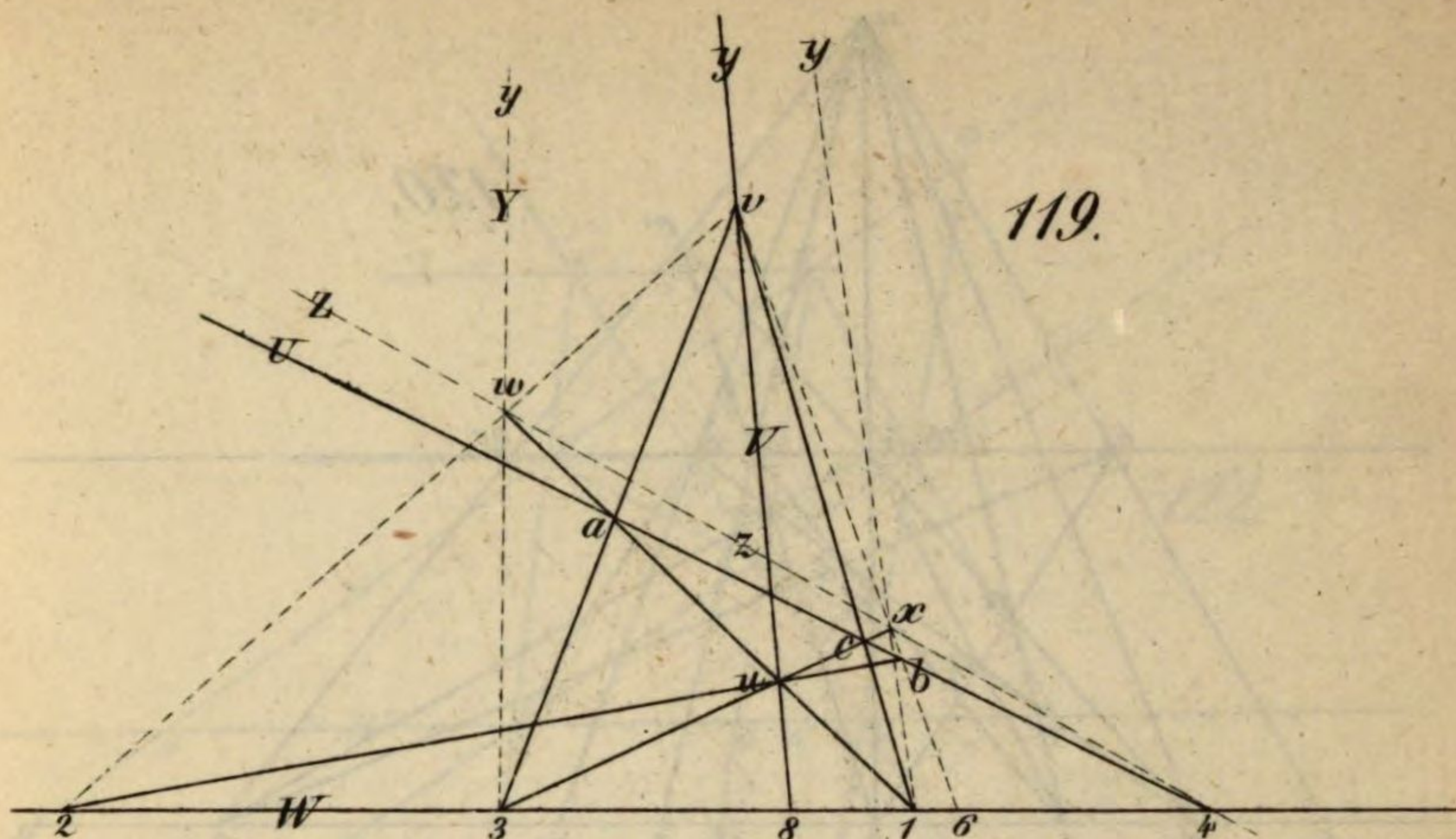


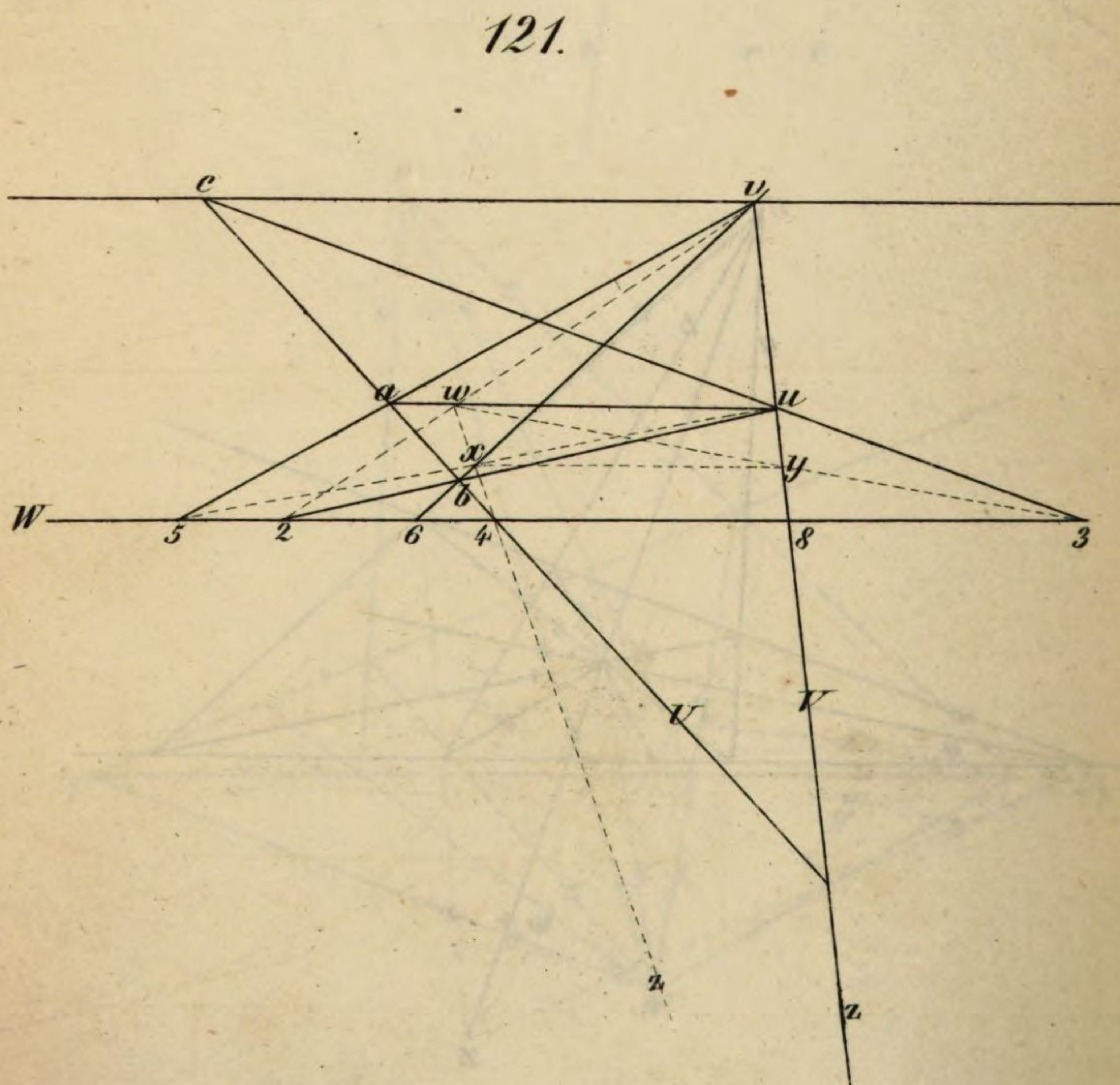
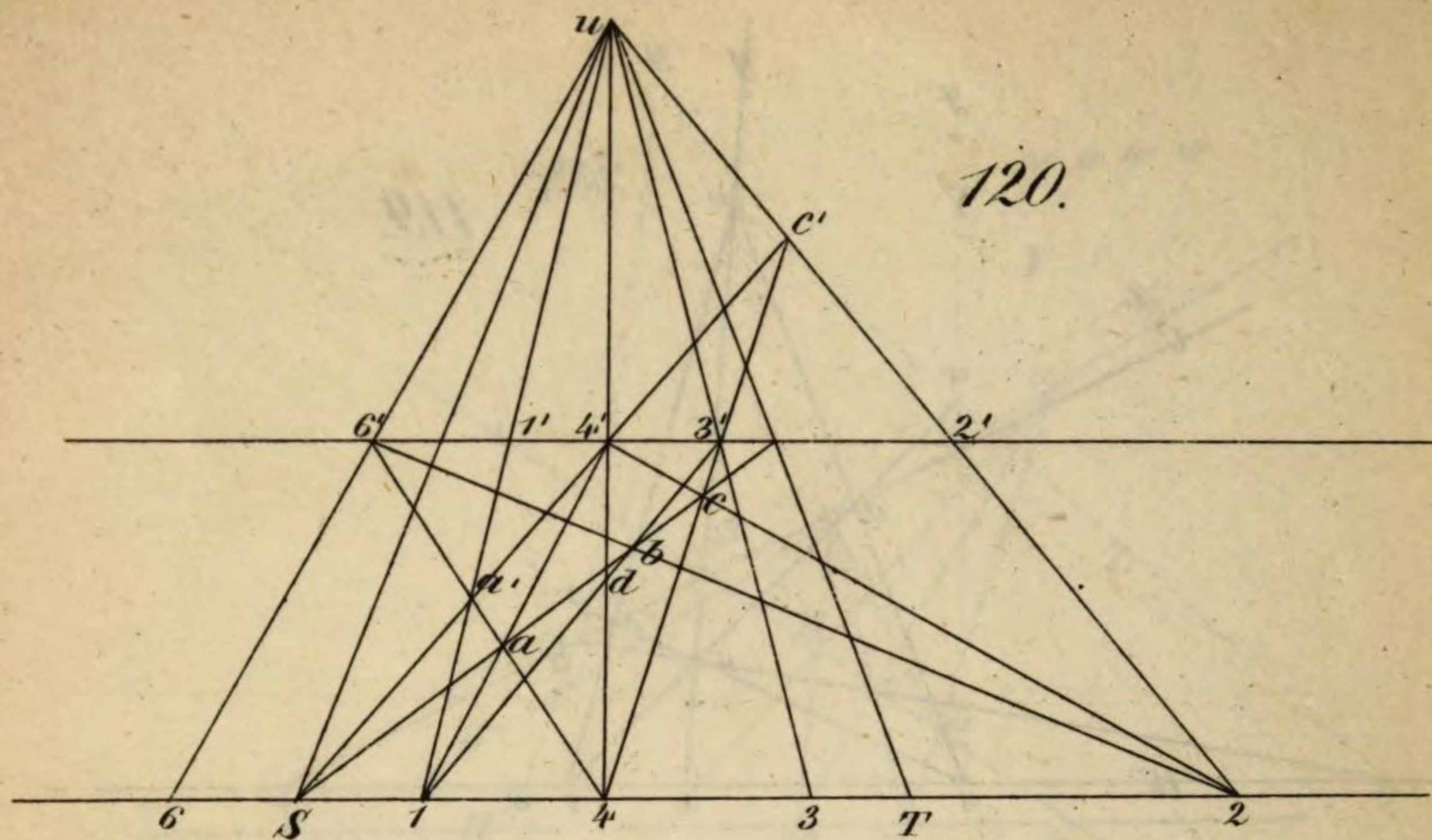
113.

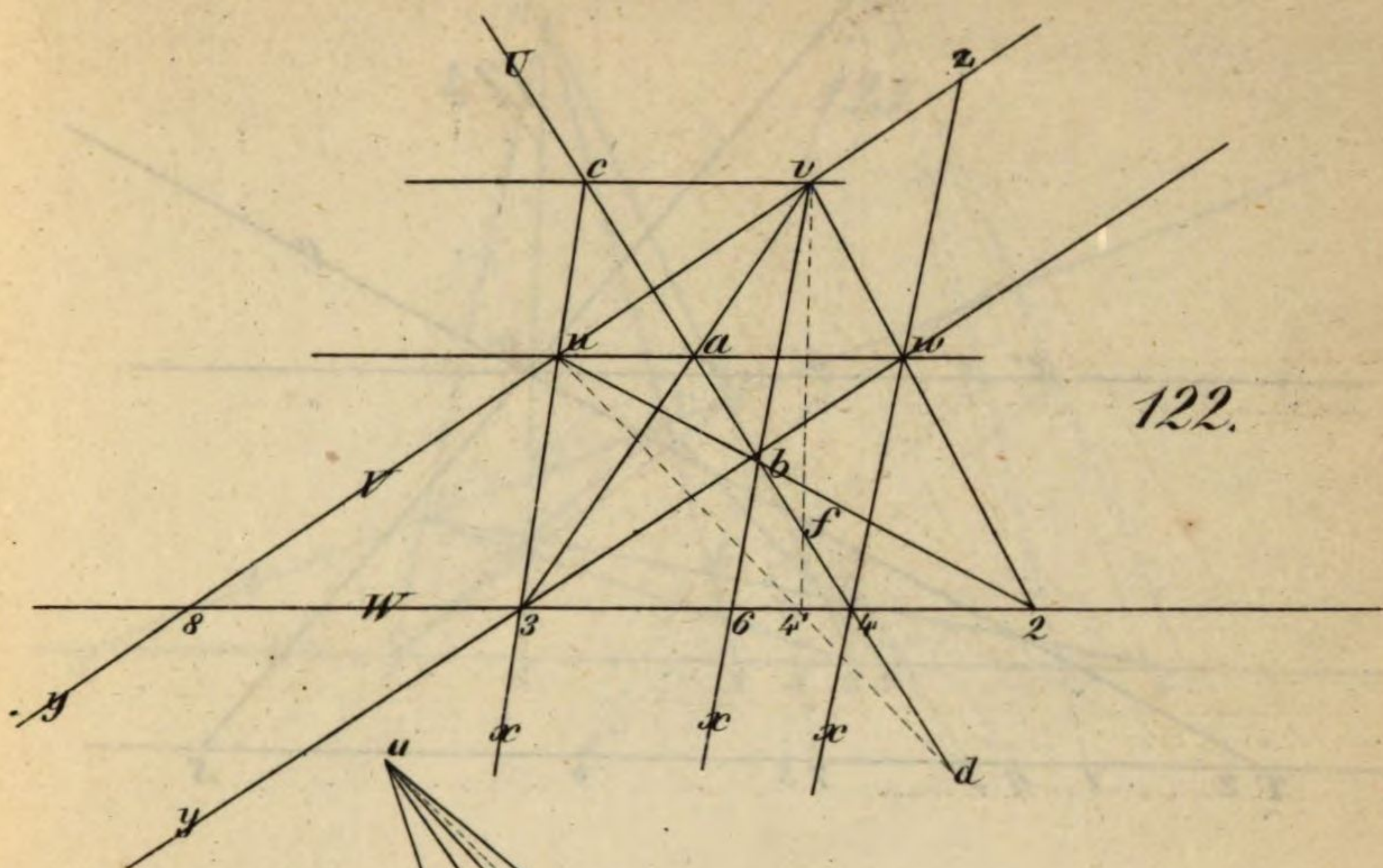




119.

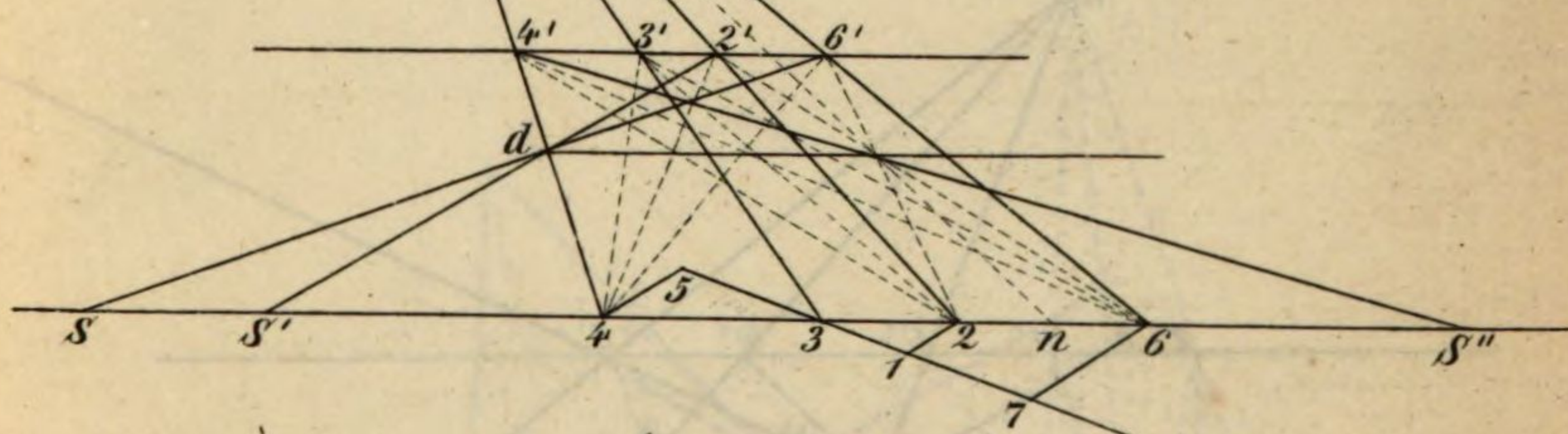




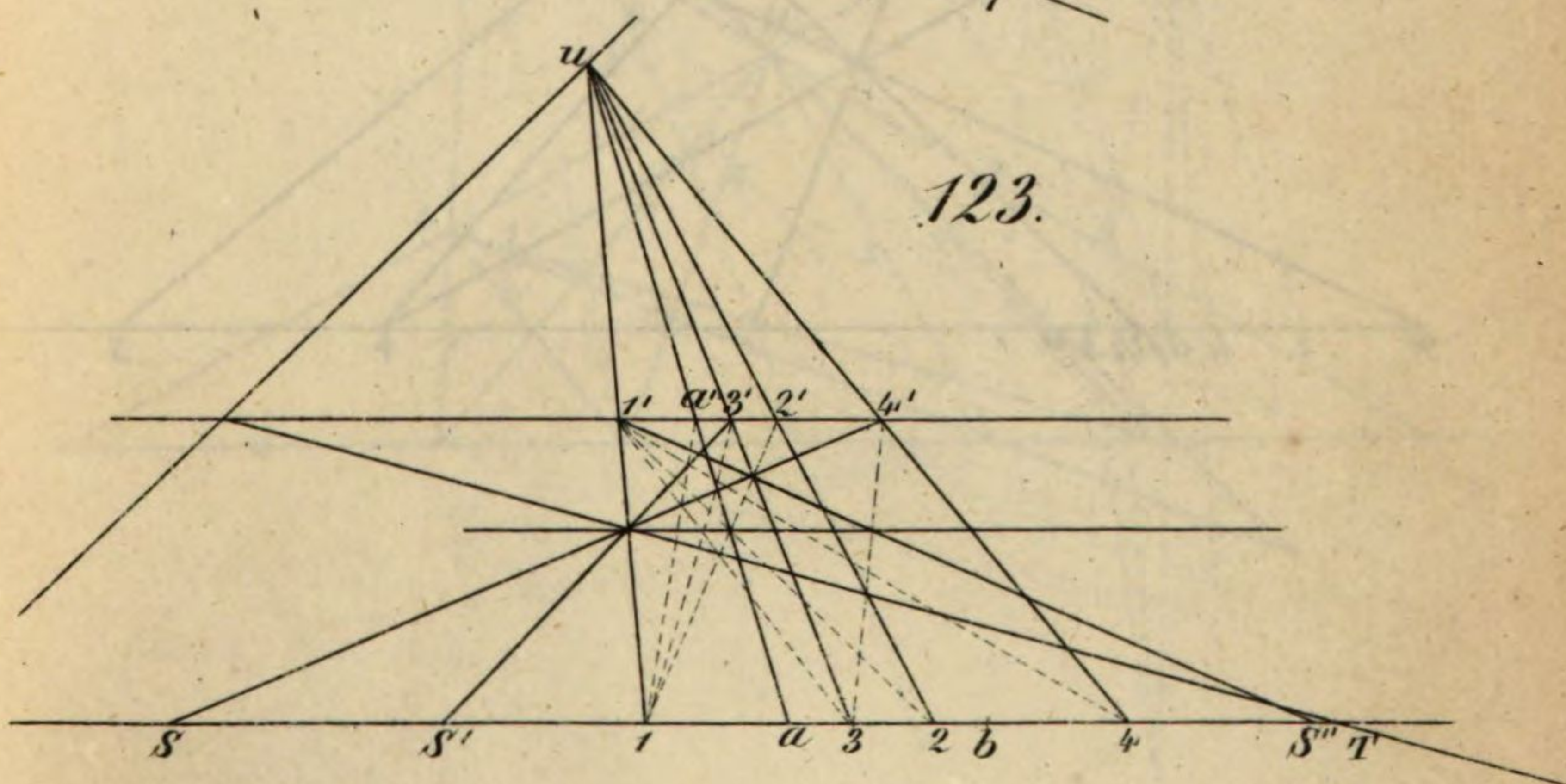


122.

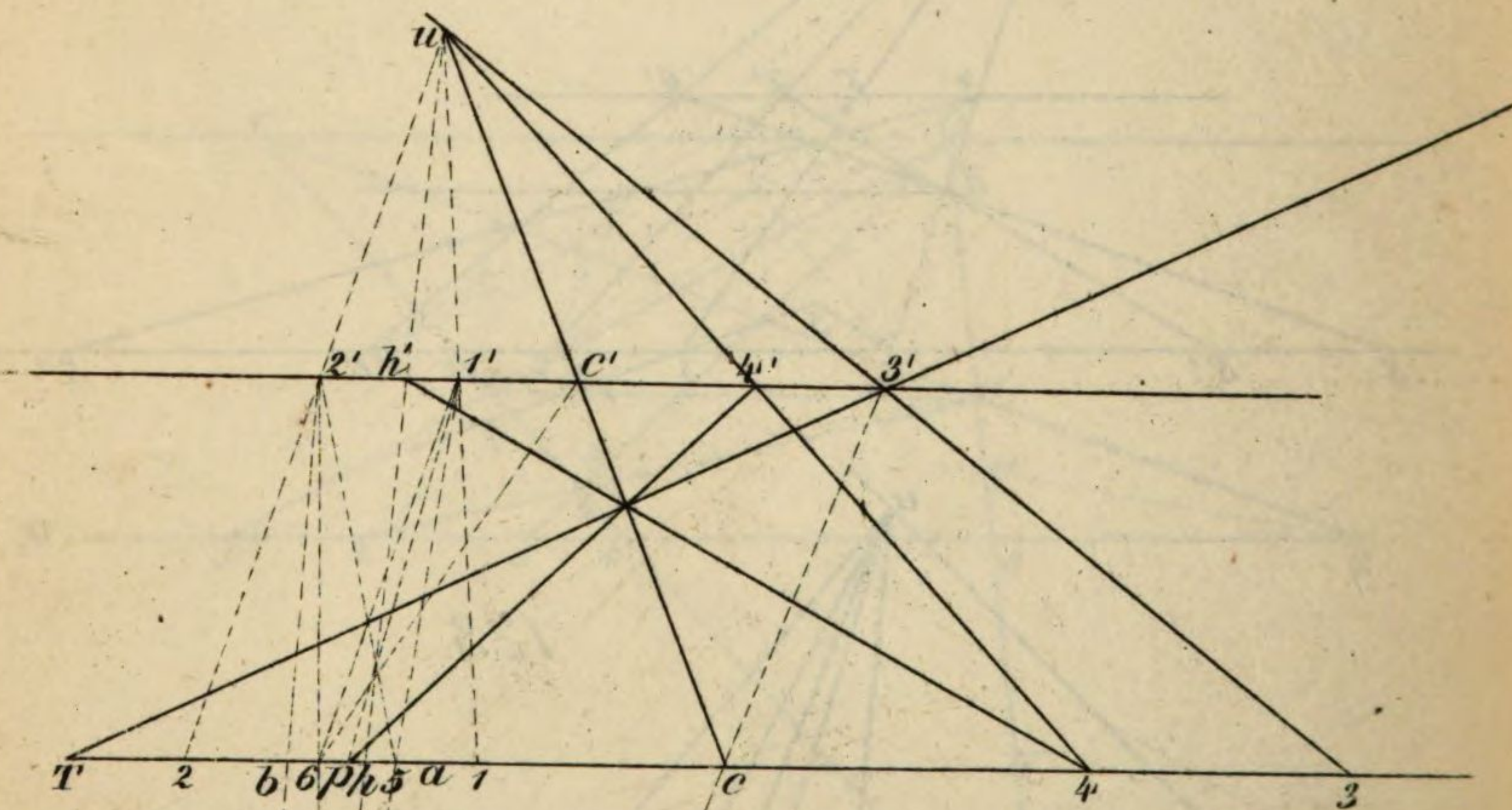
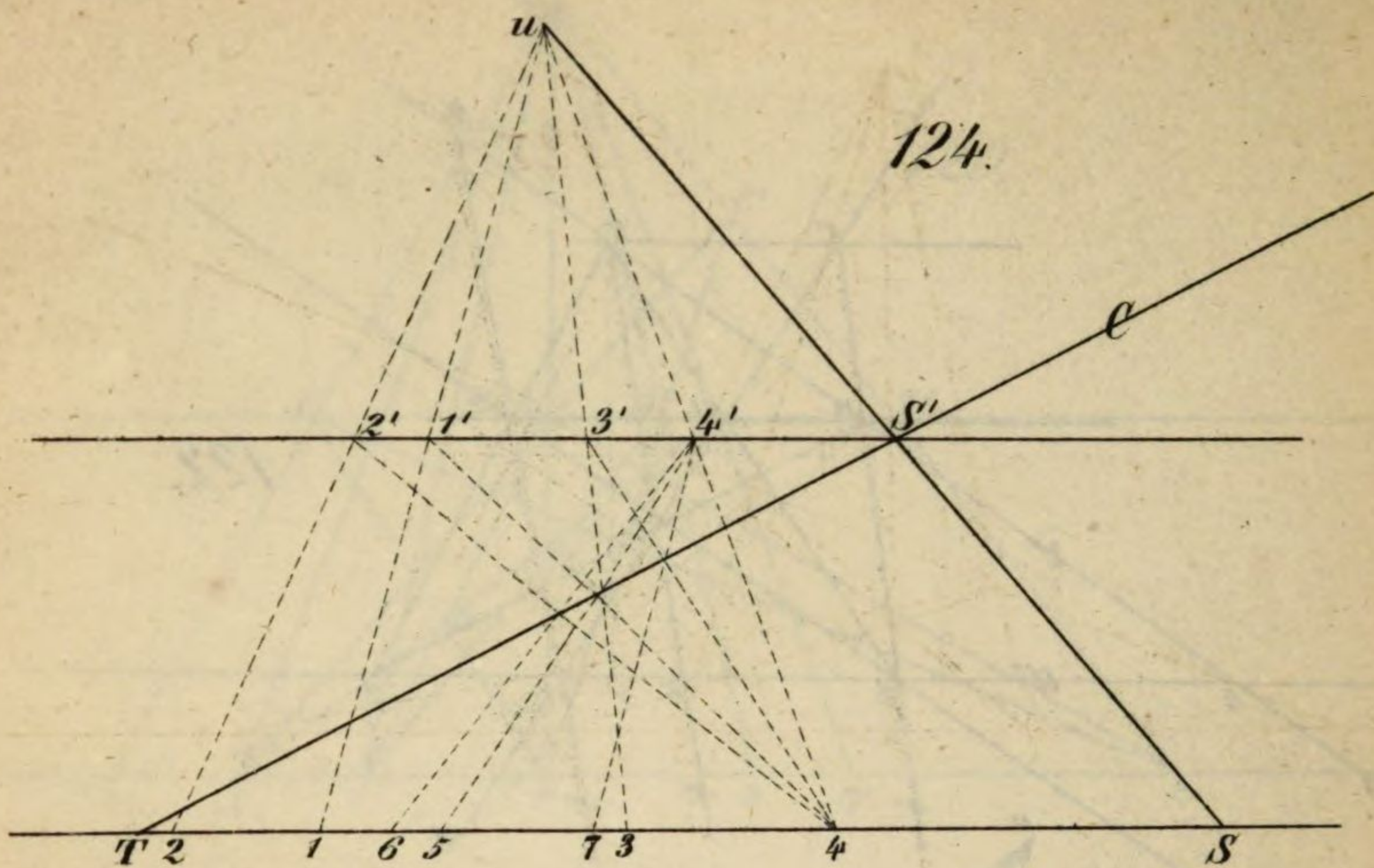
122.I.



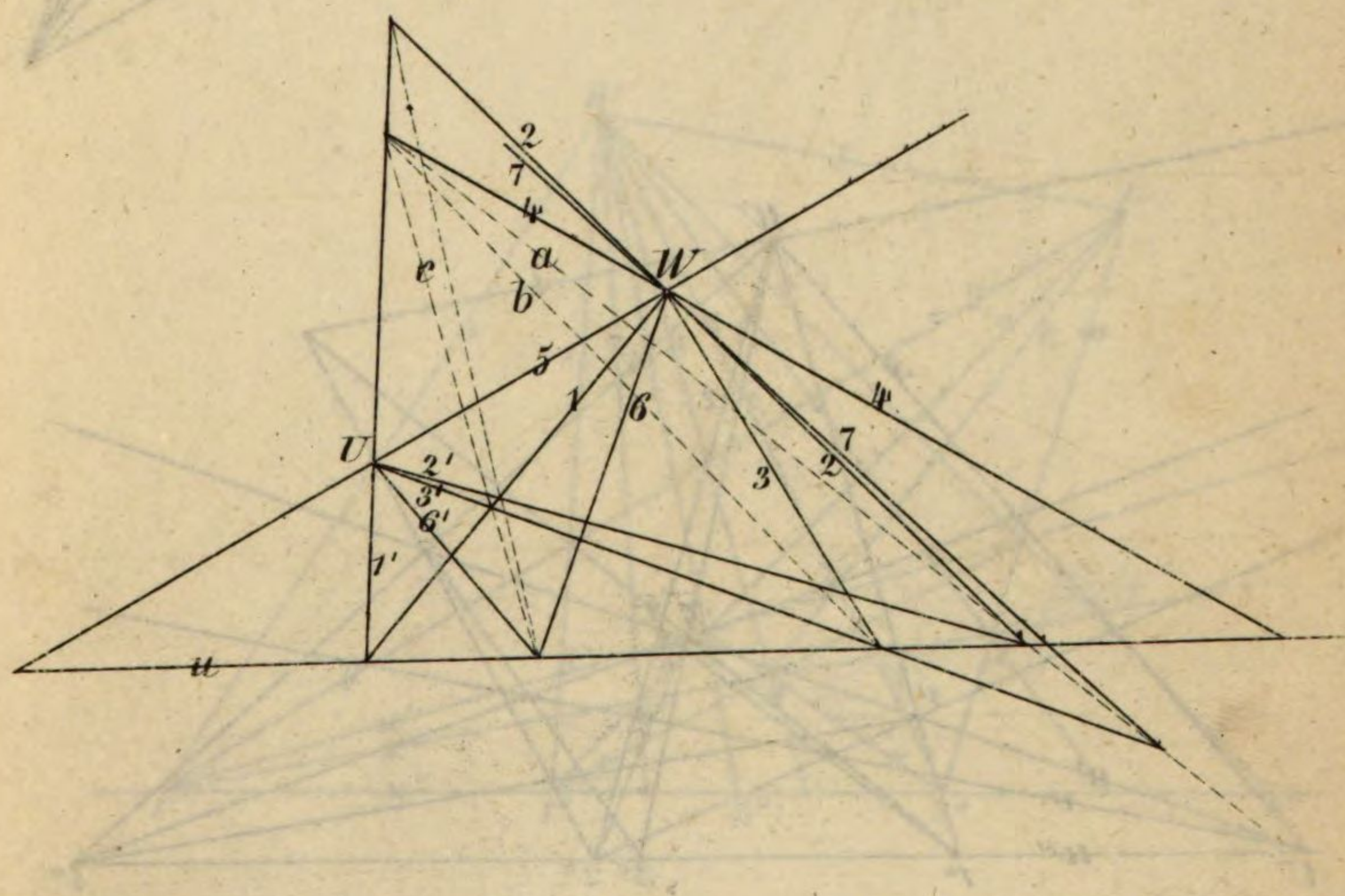
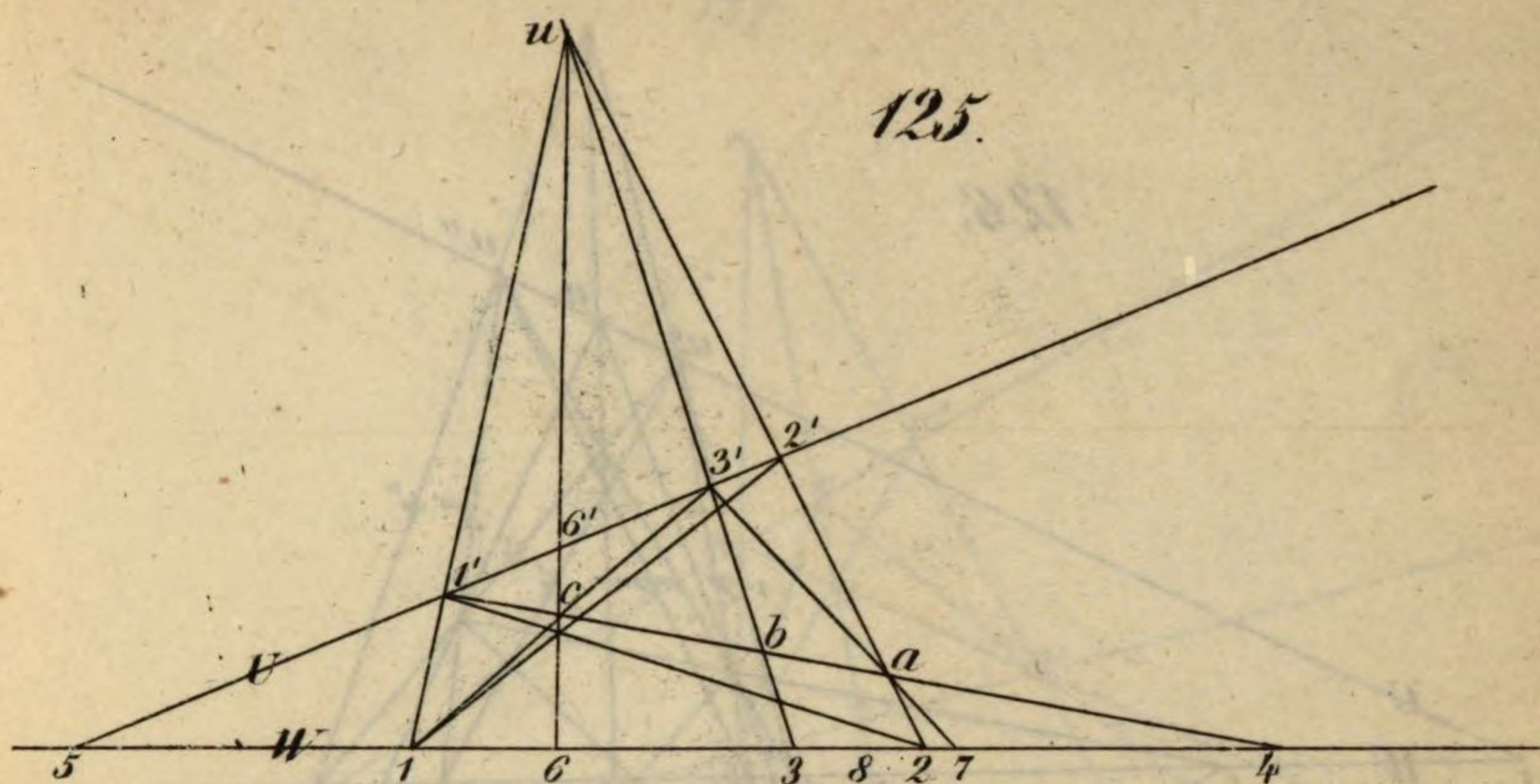
123.



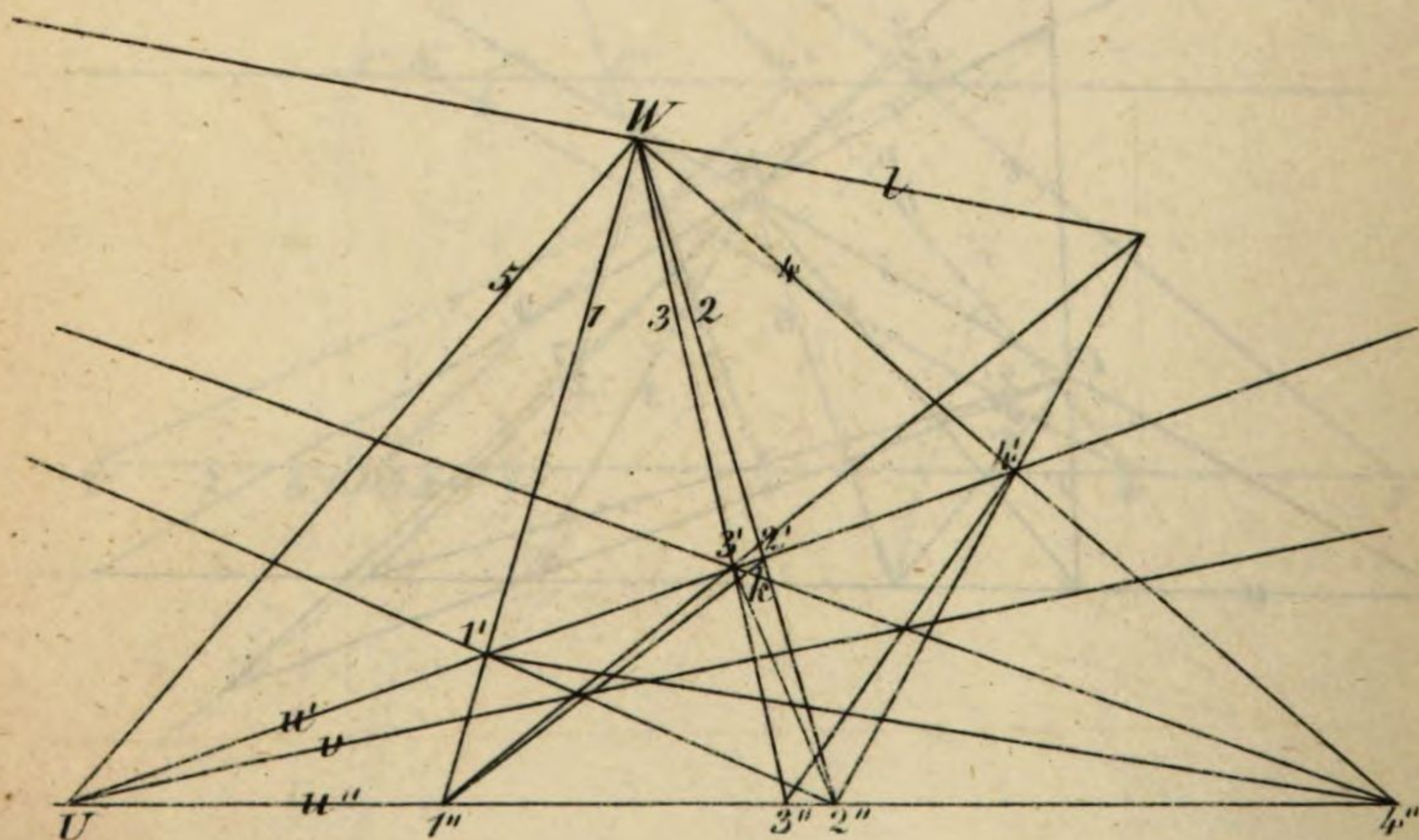
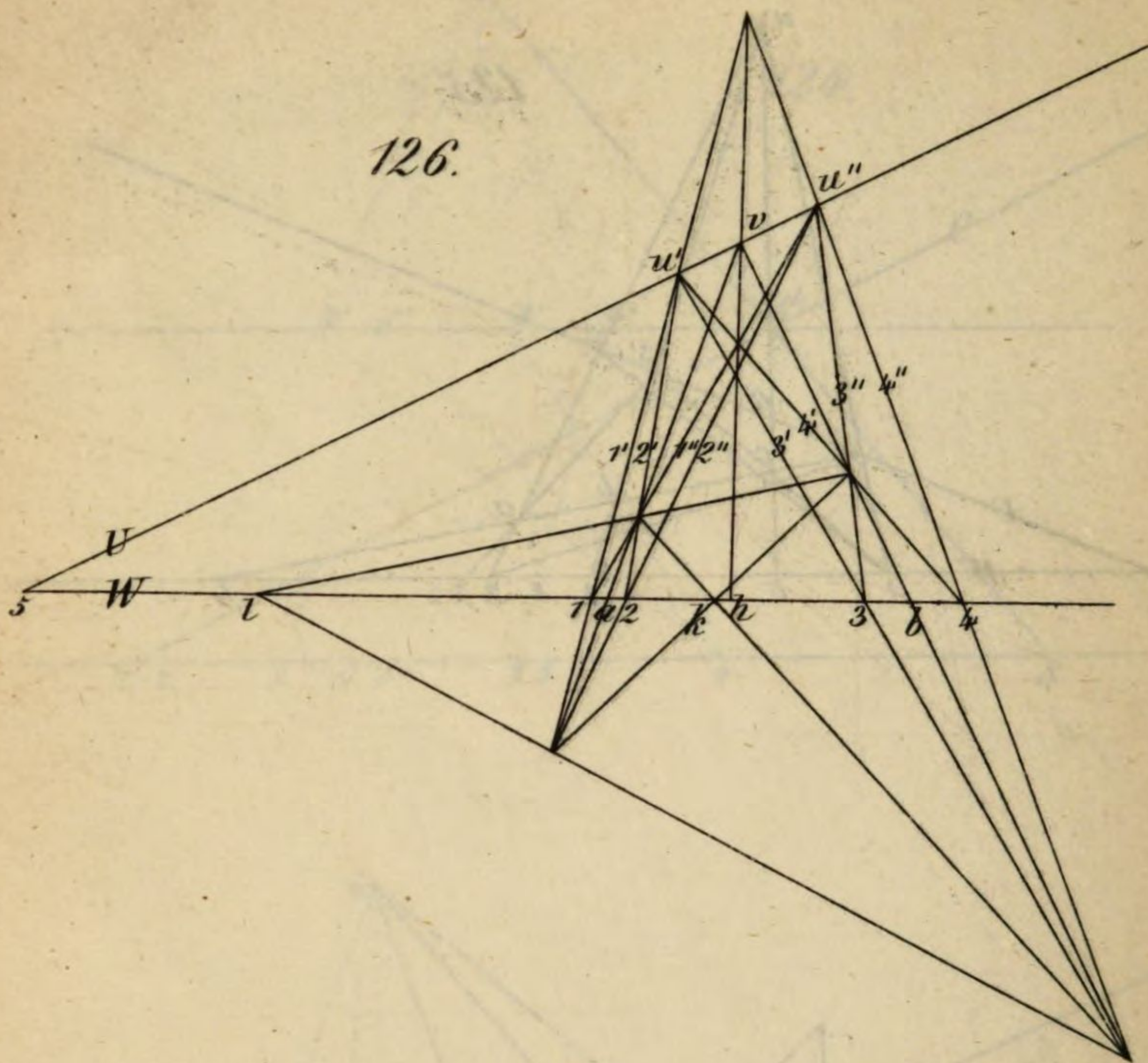
124.

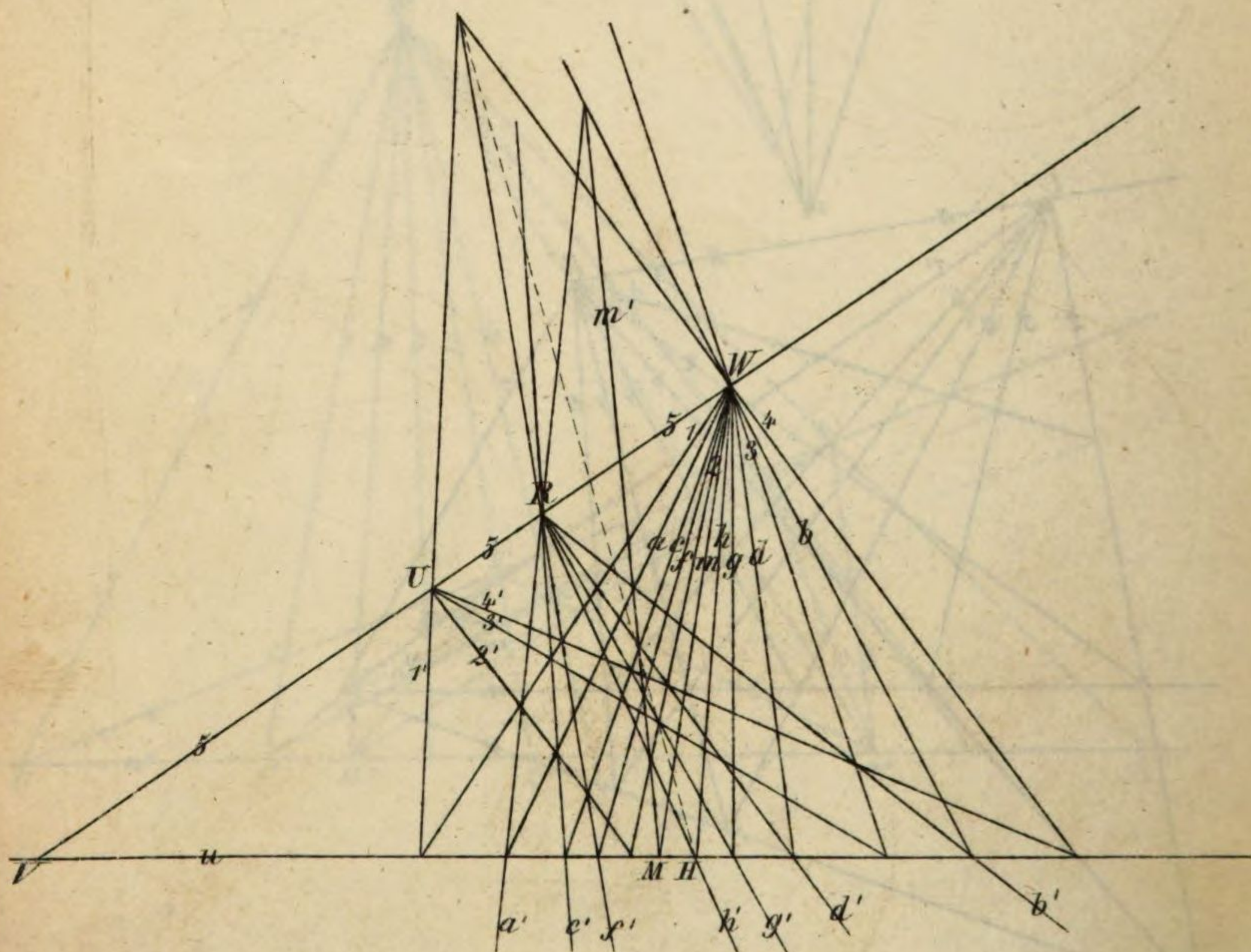
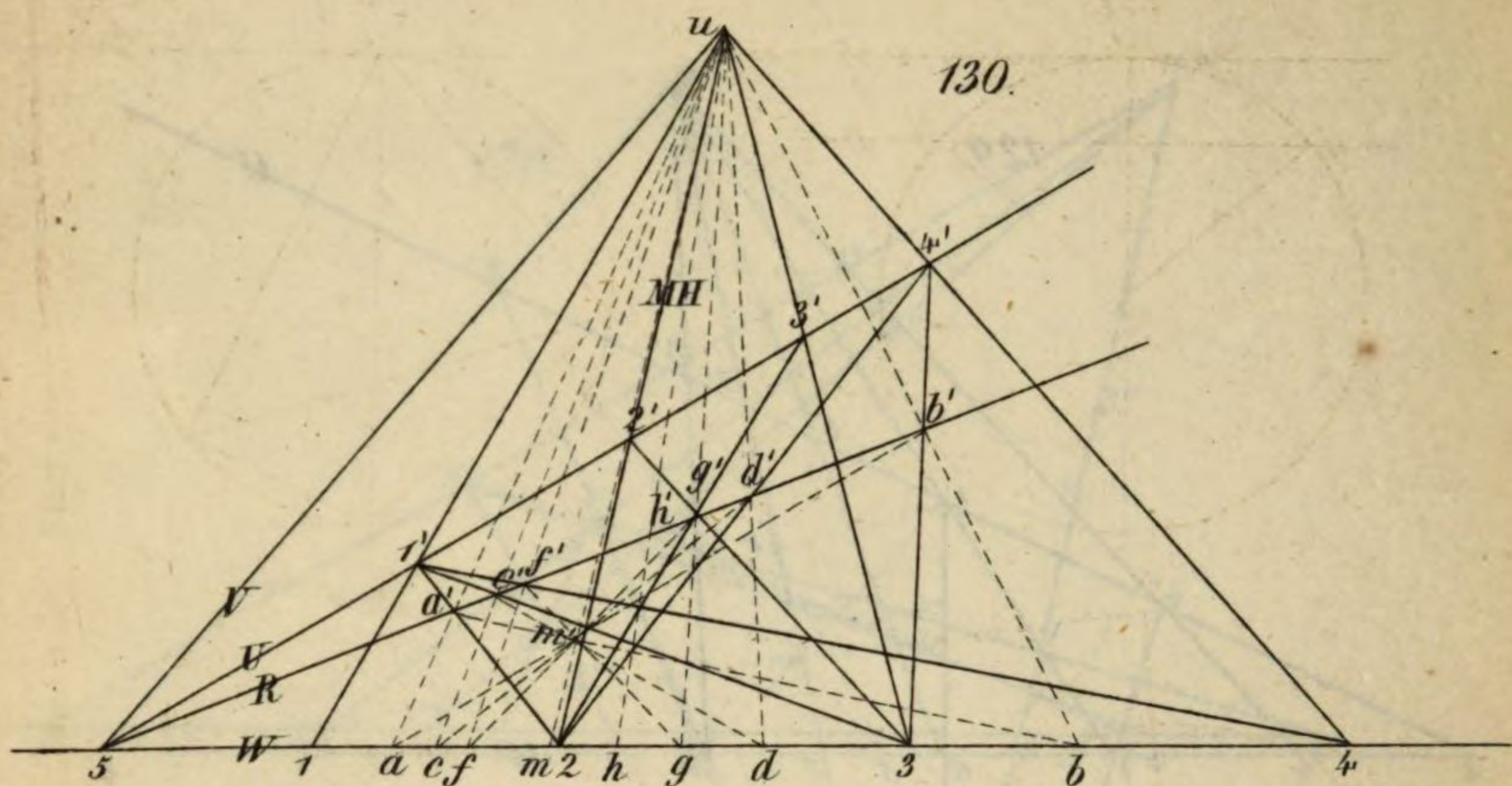


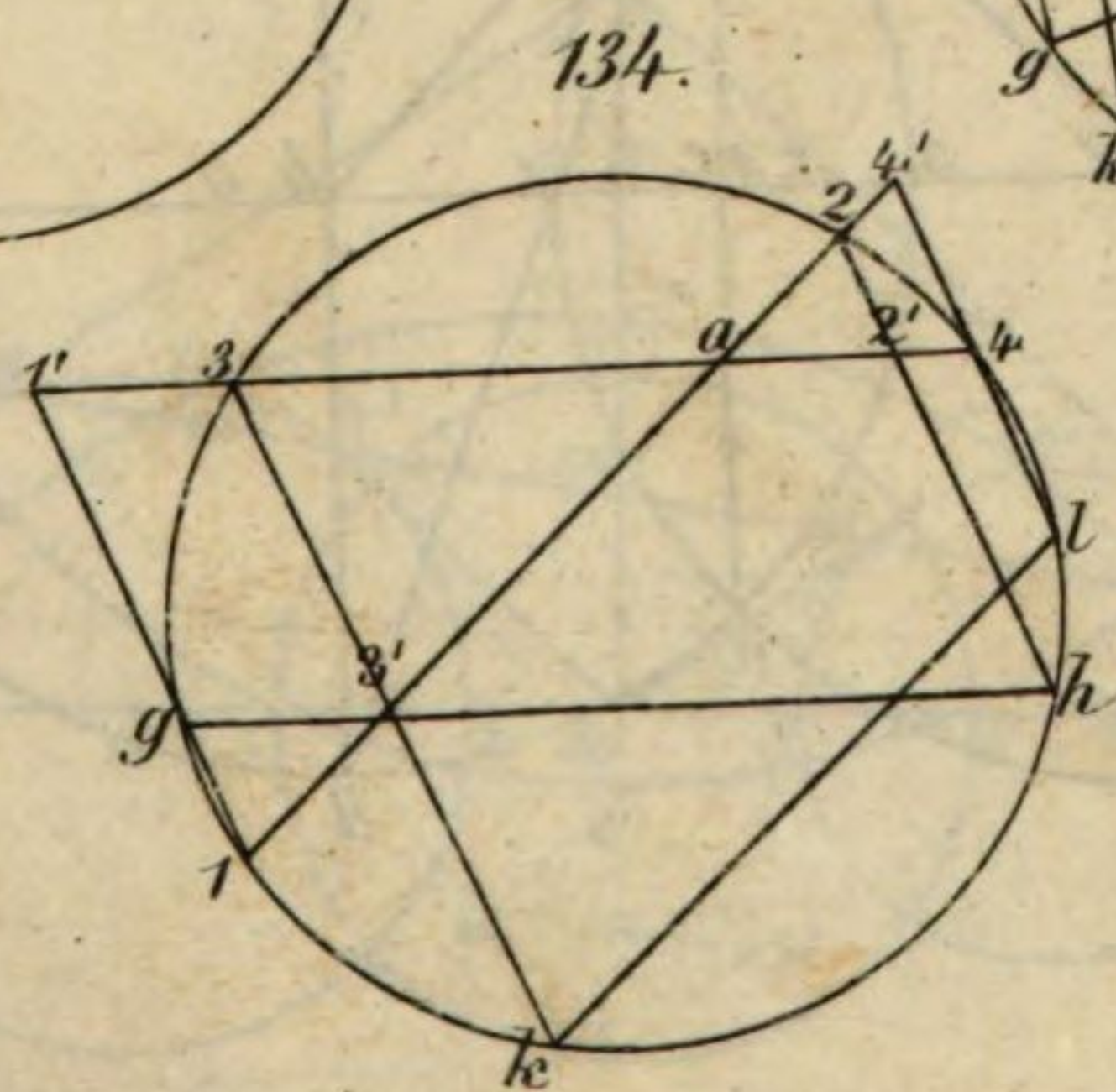
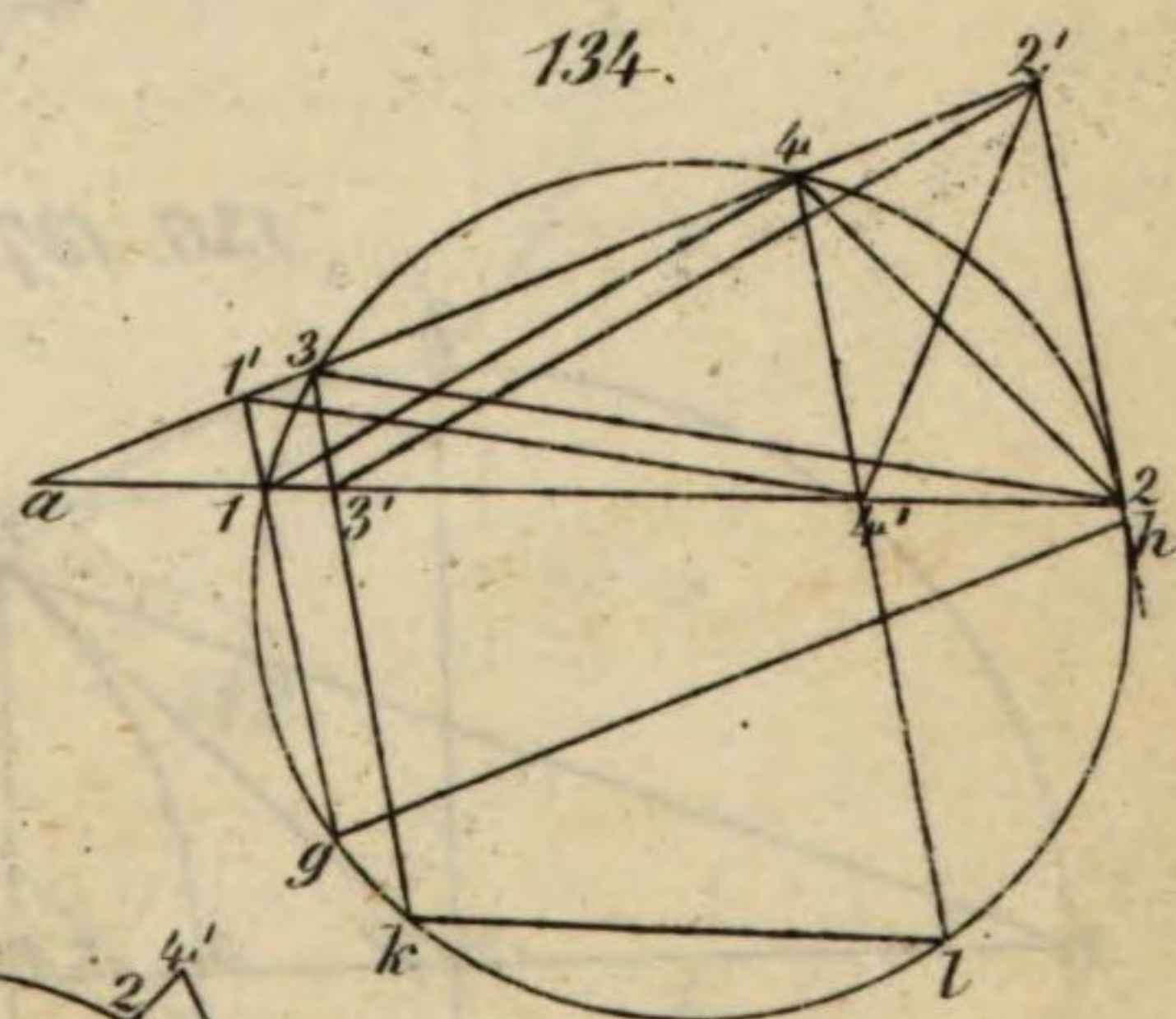
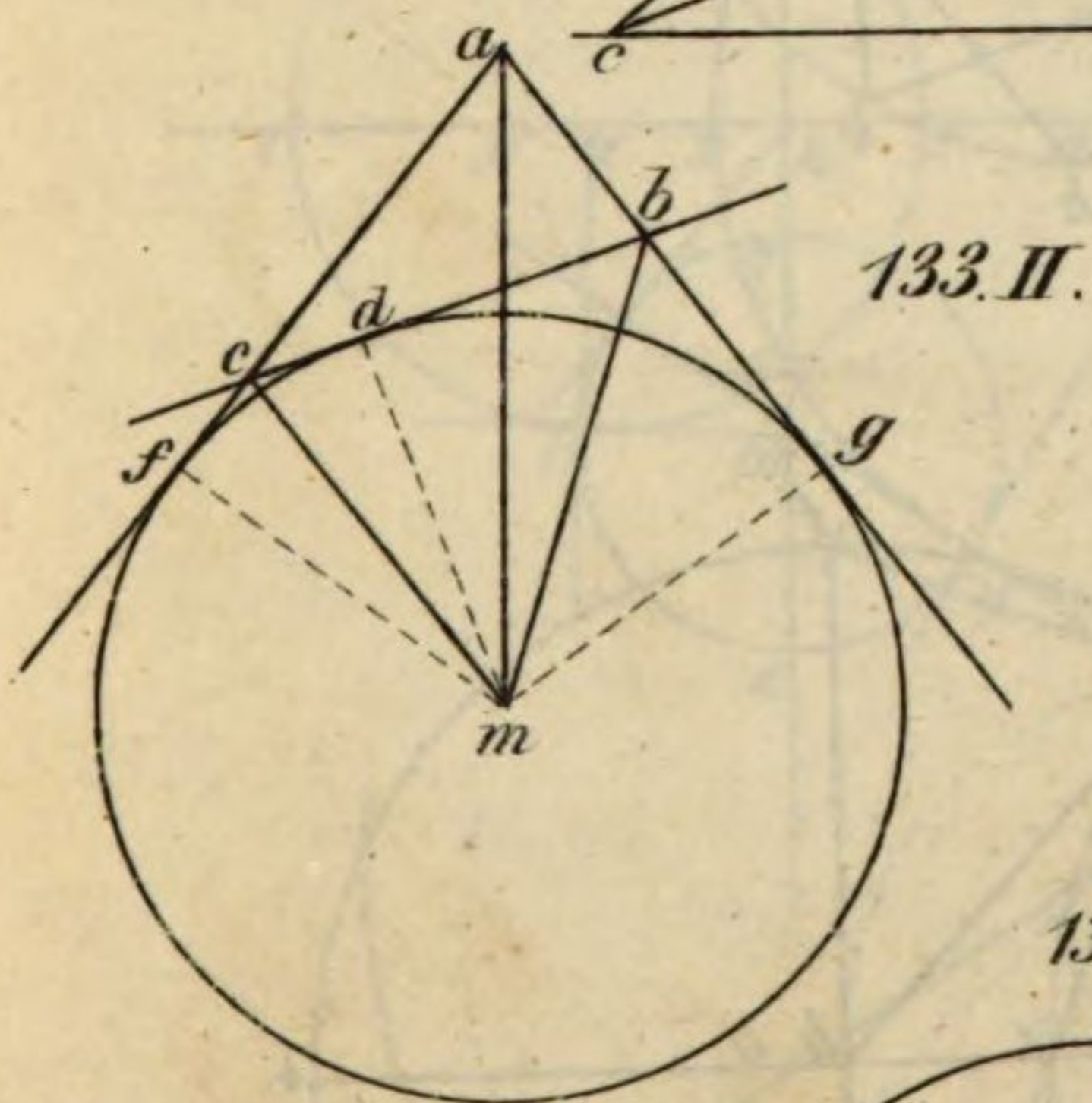
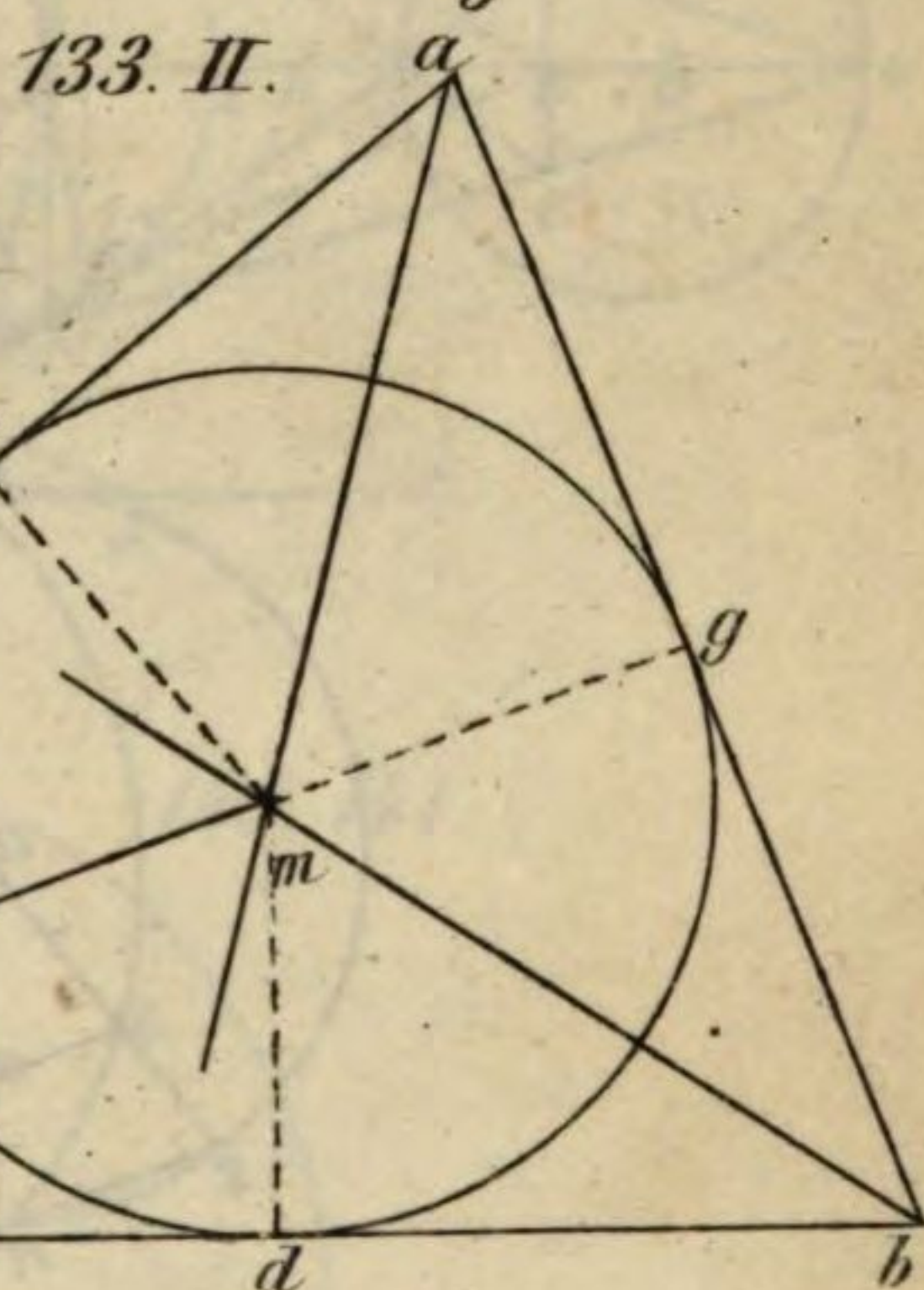
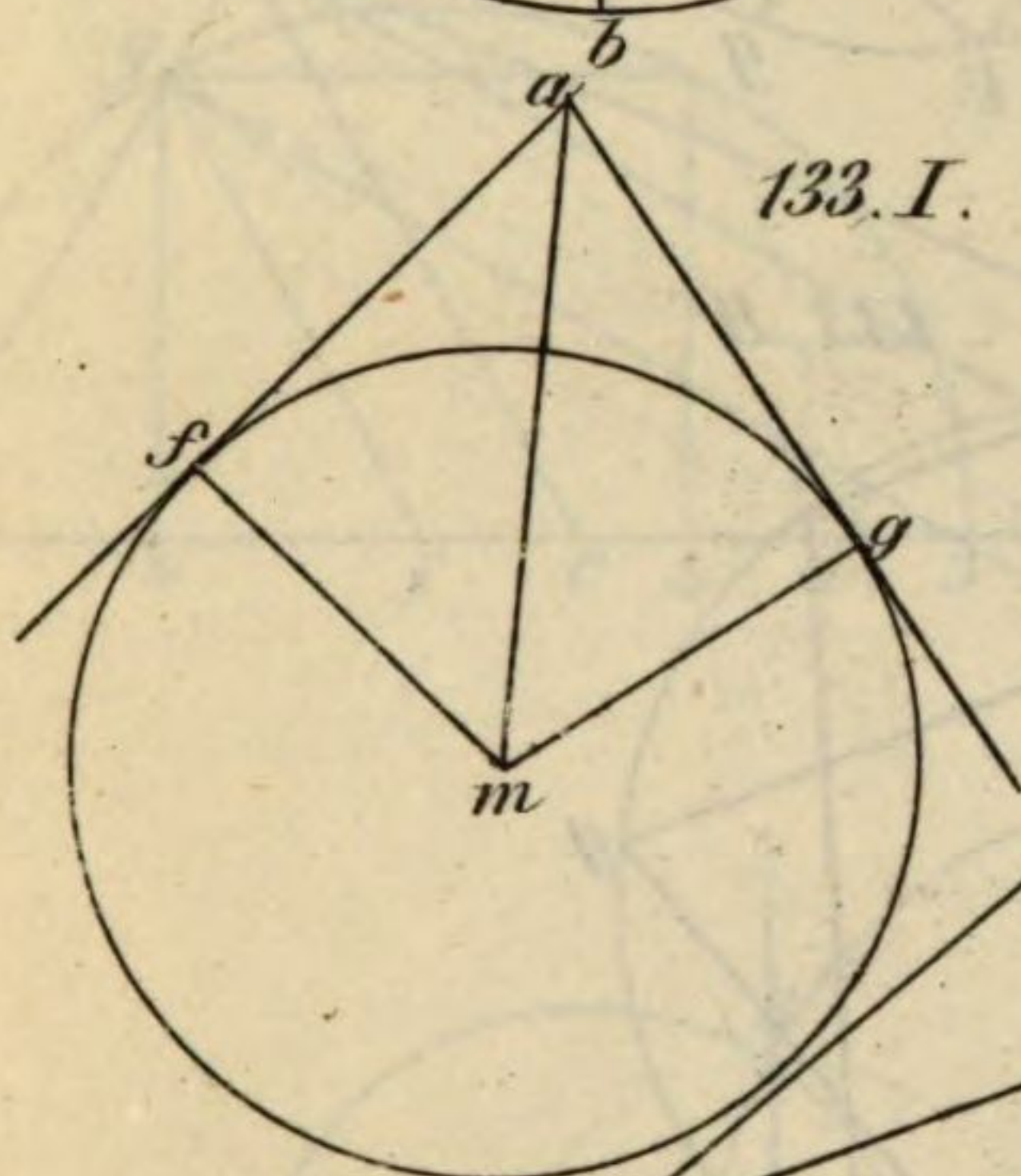
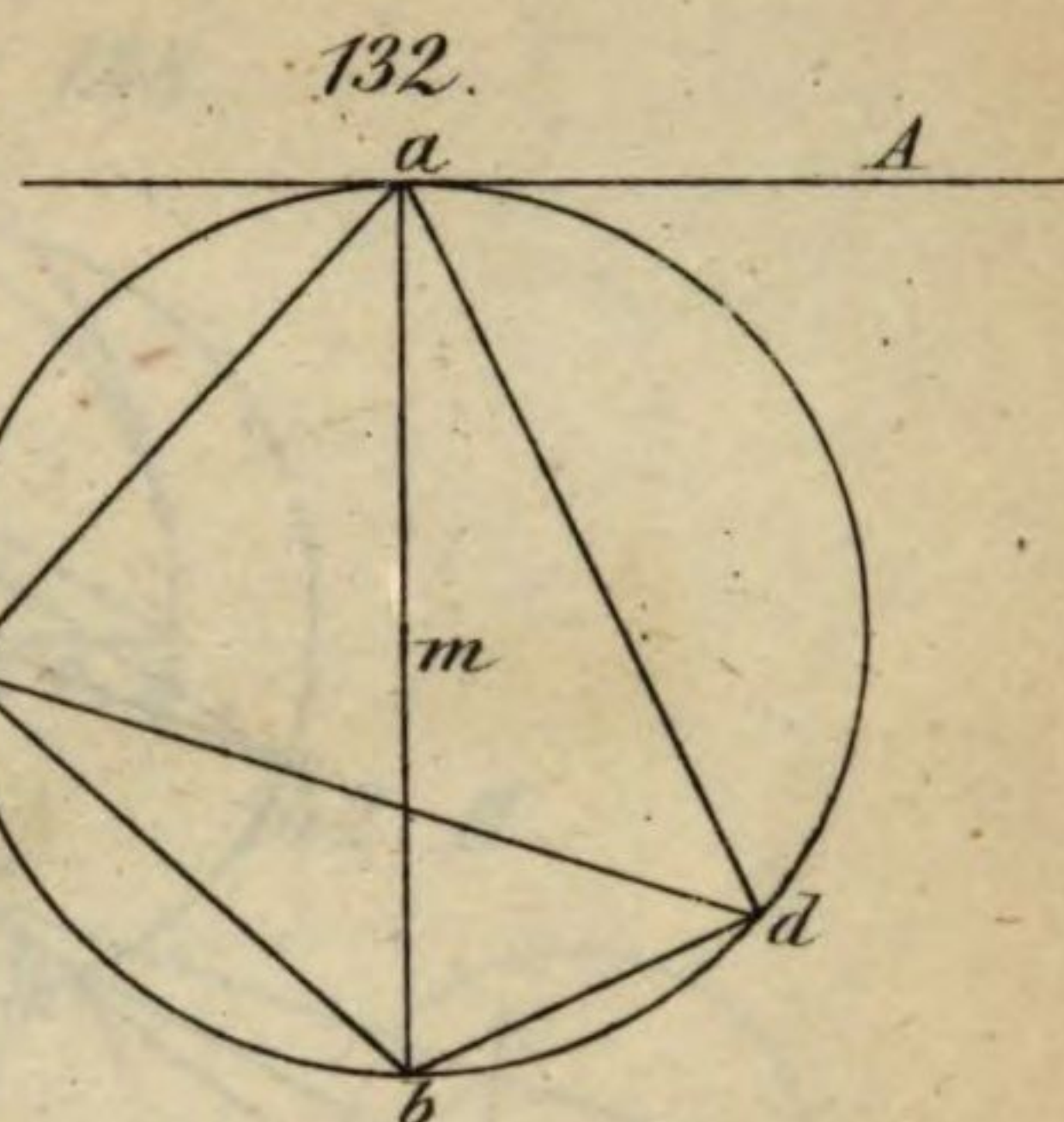
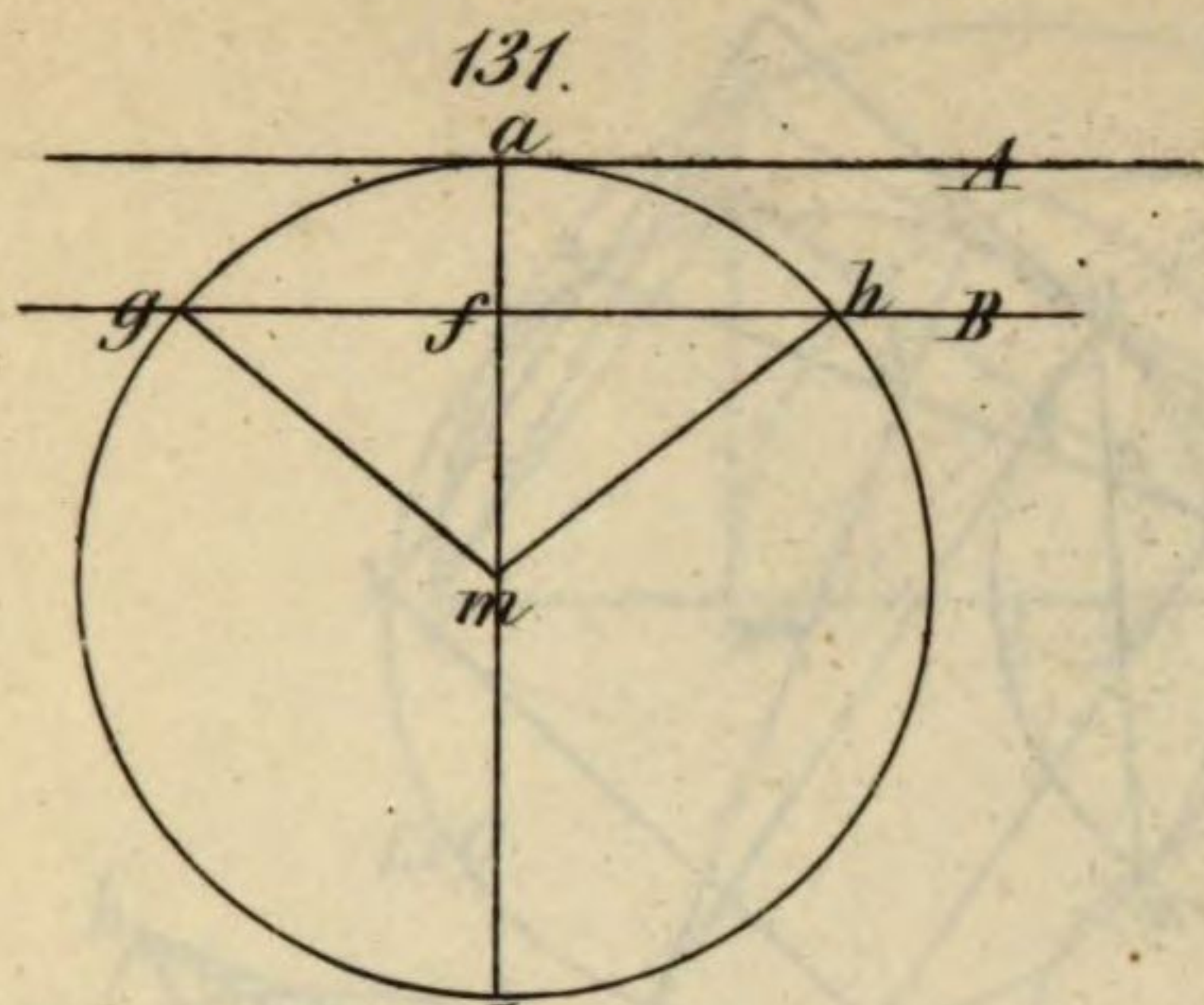
125.



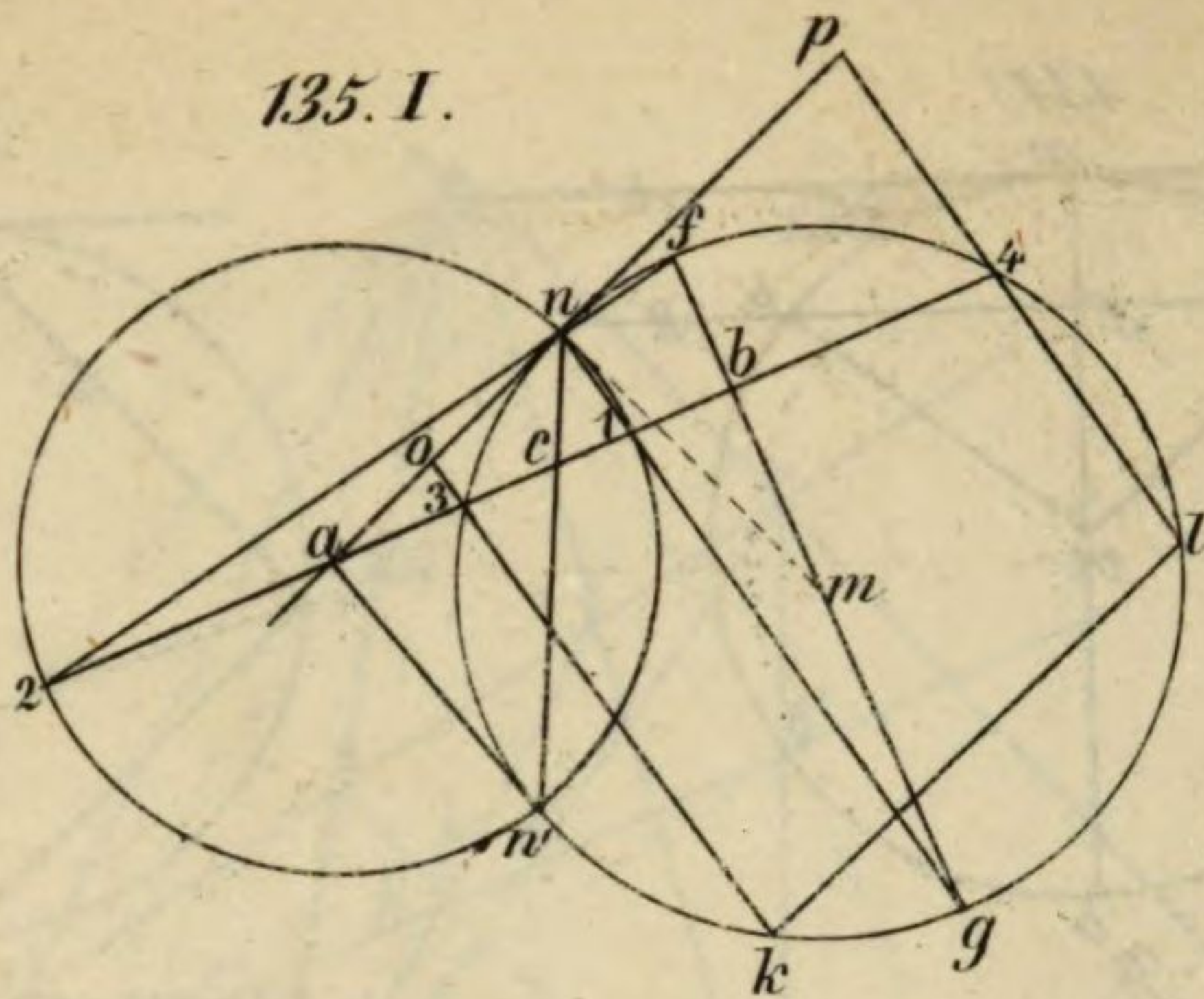
126.



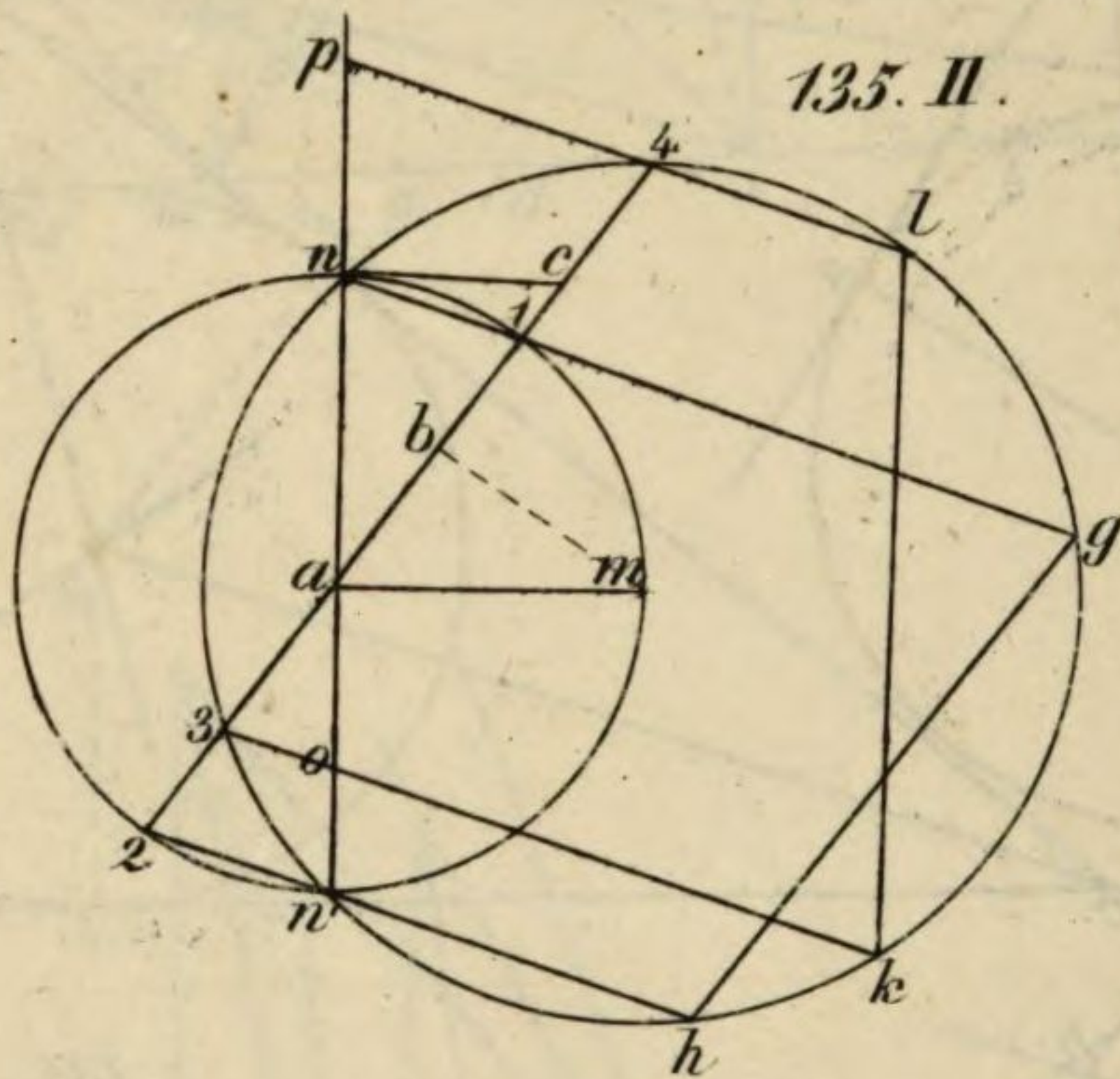




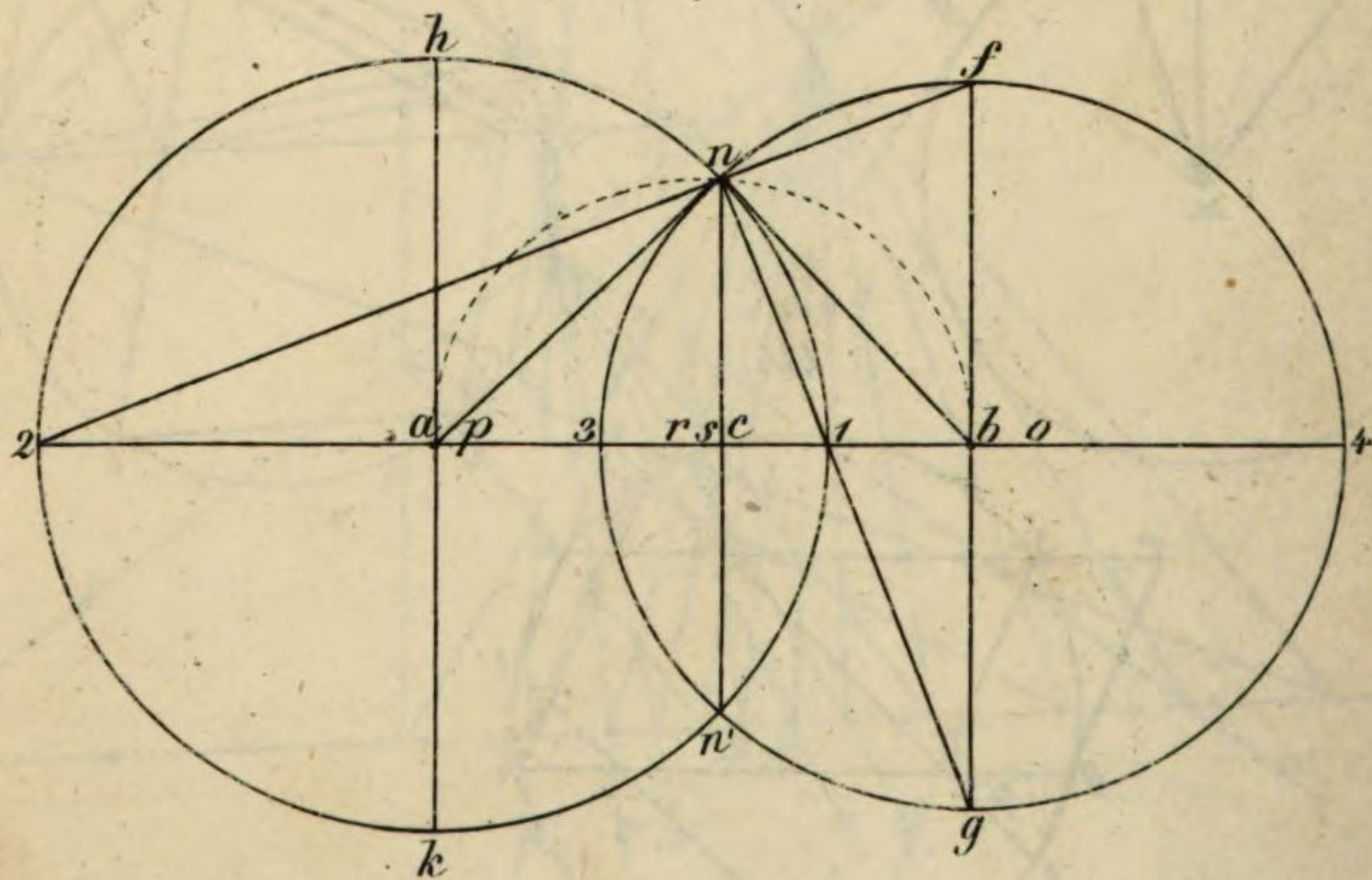
135. I.

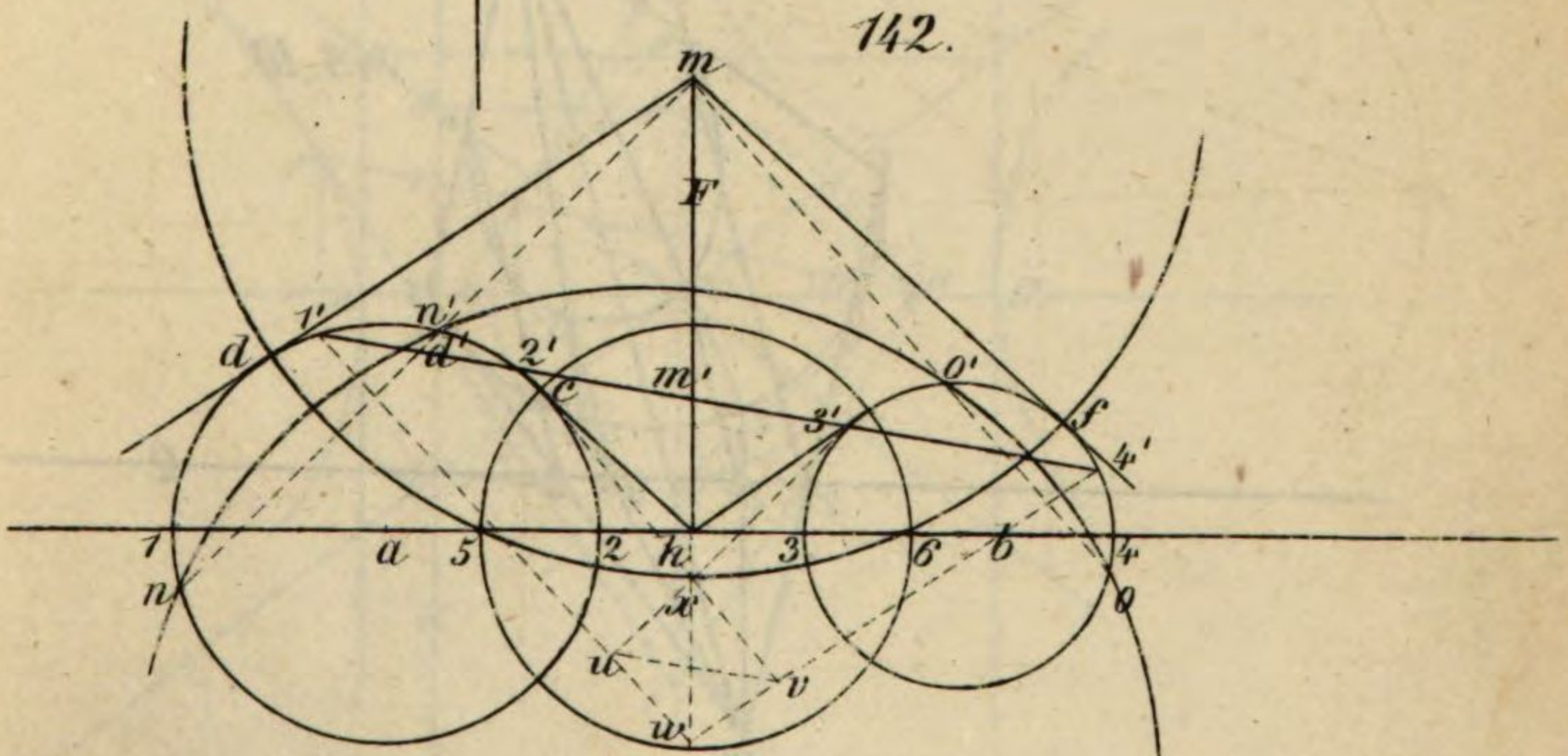
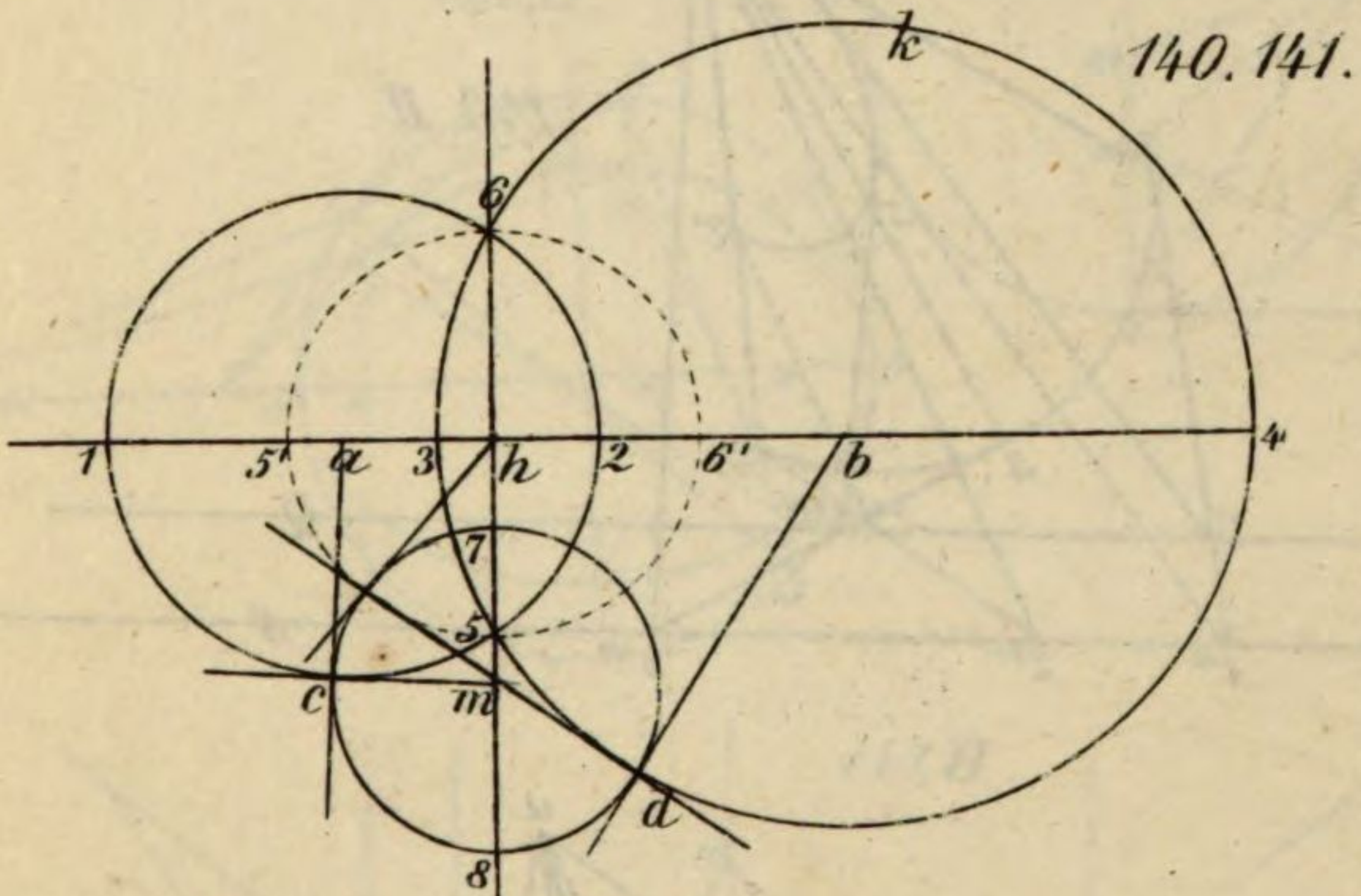
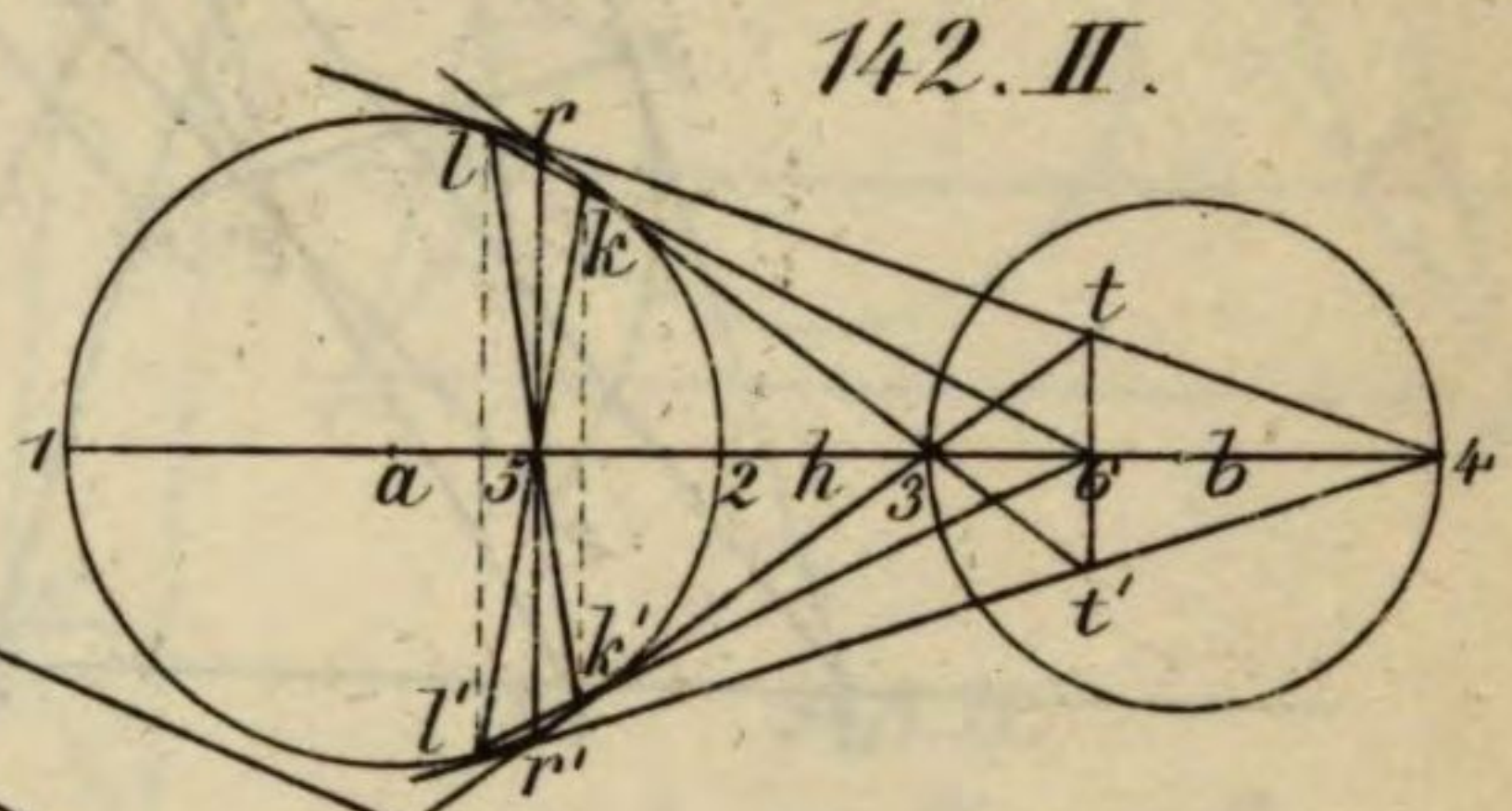
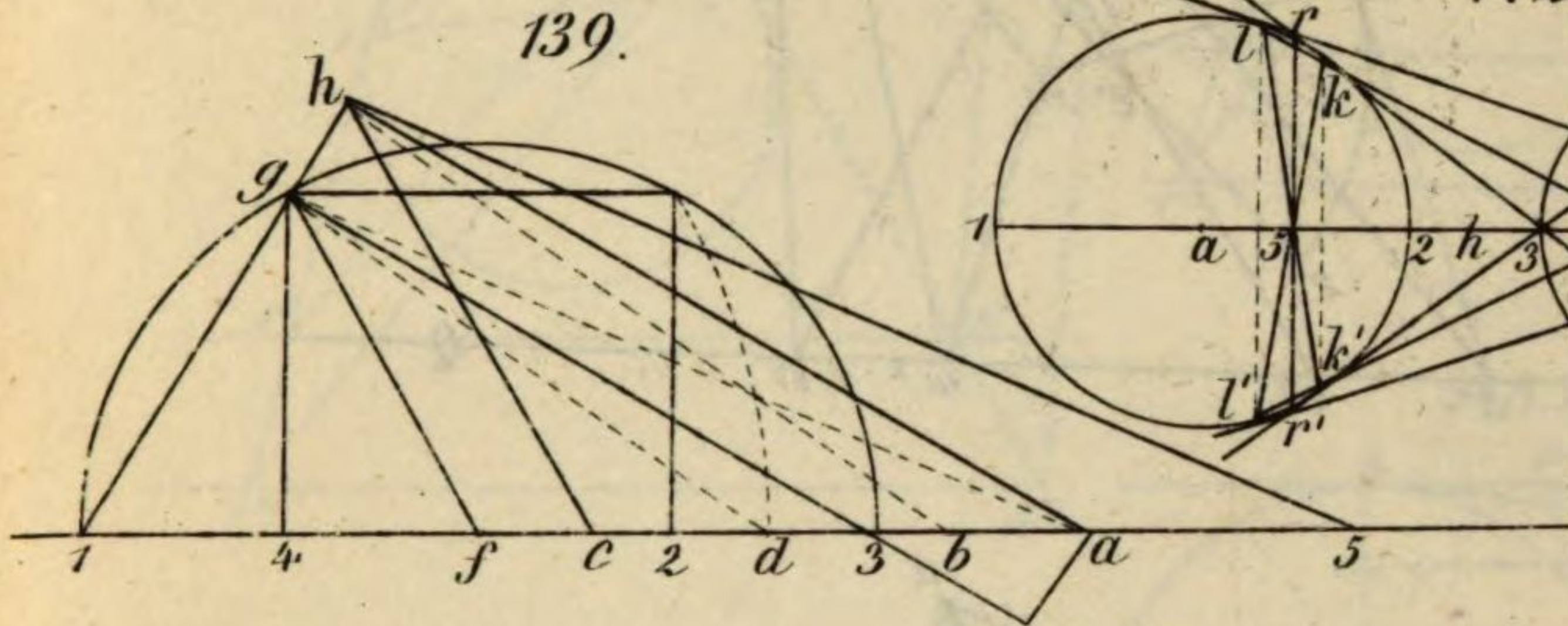
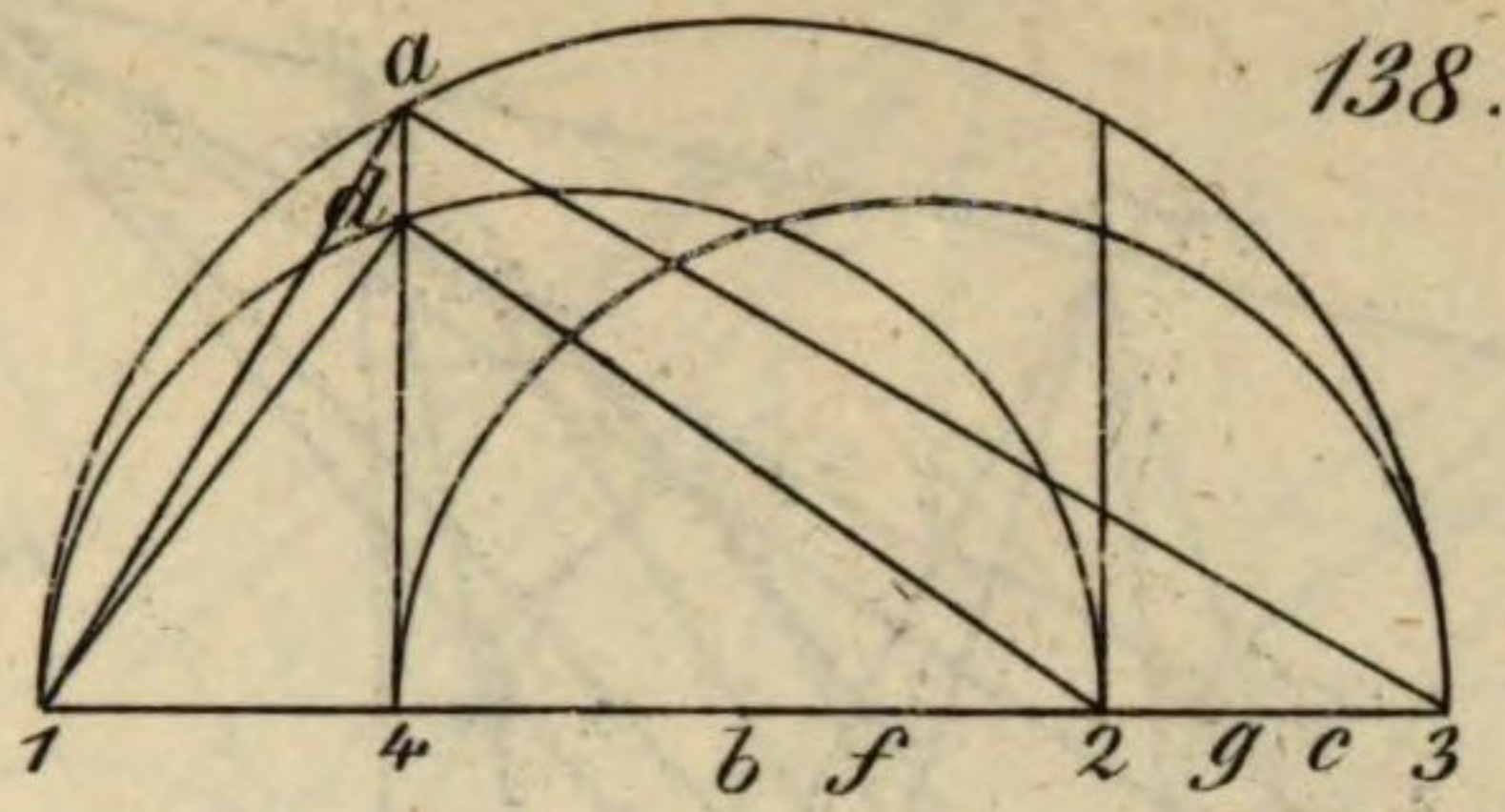


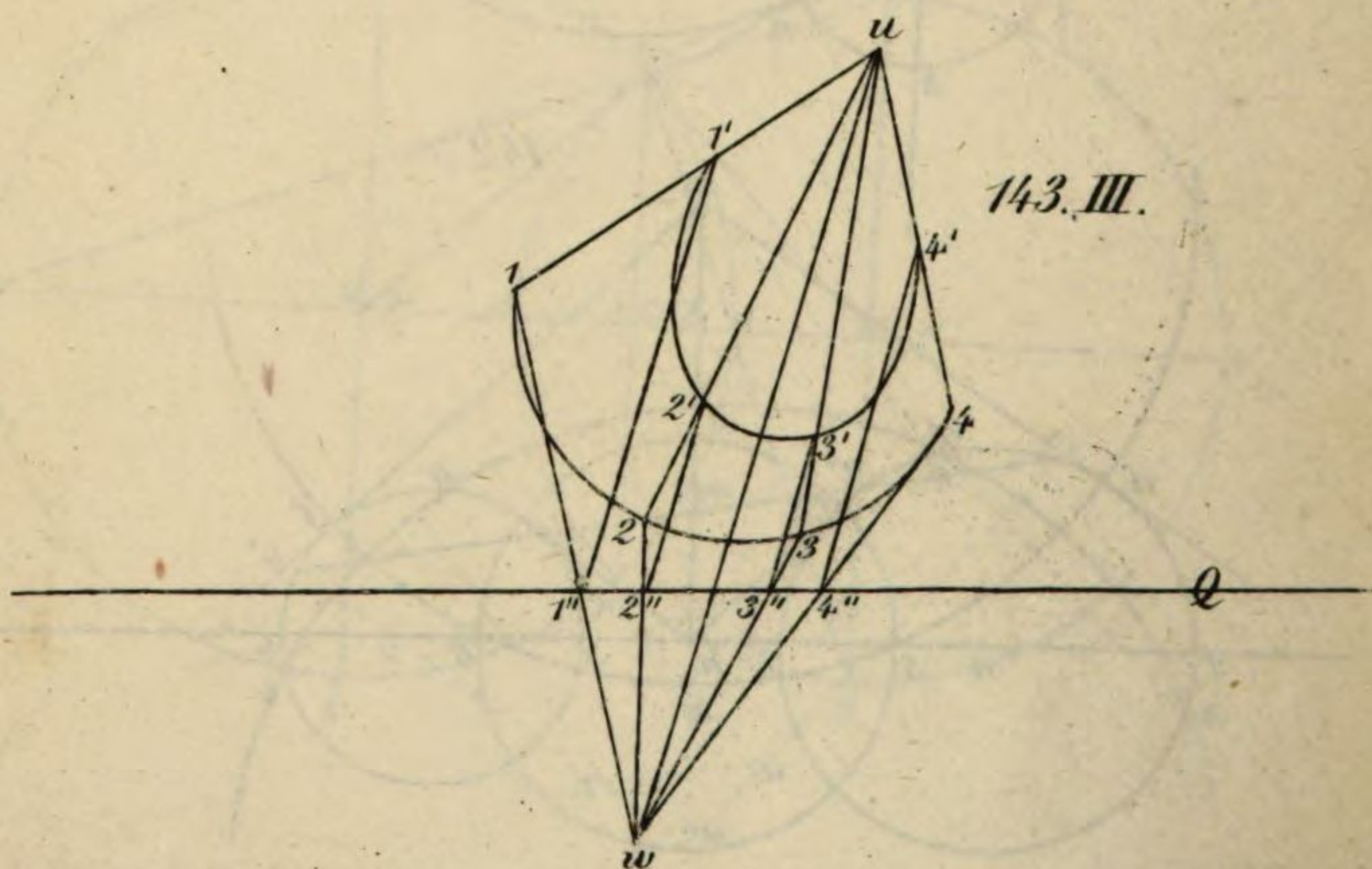
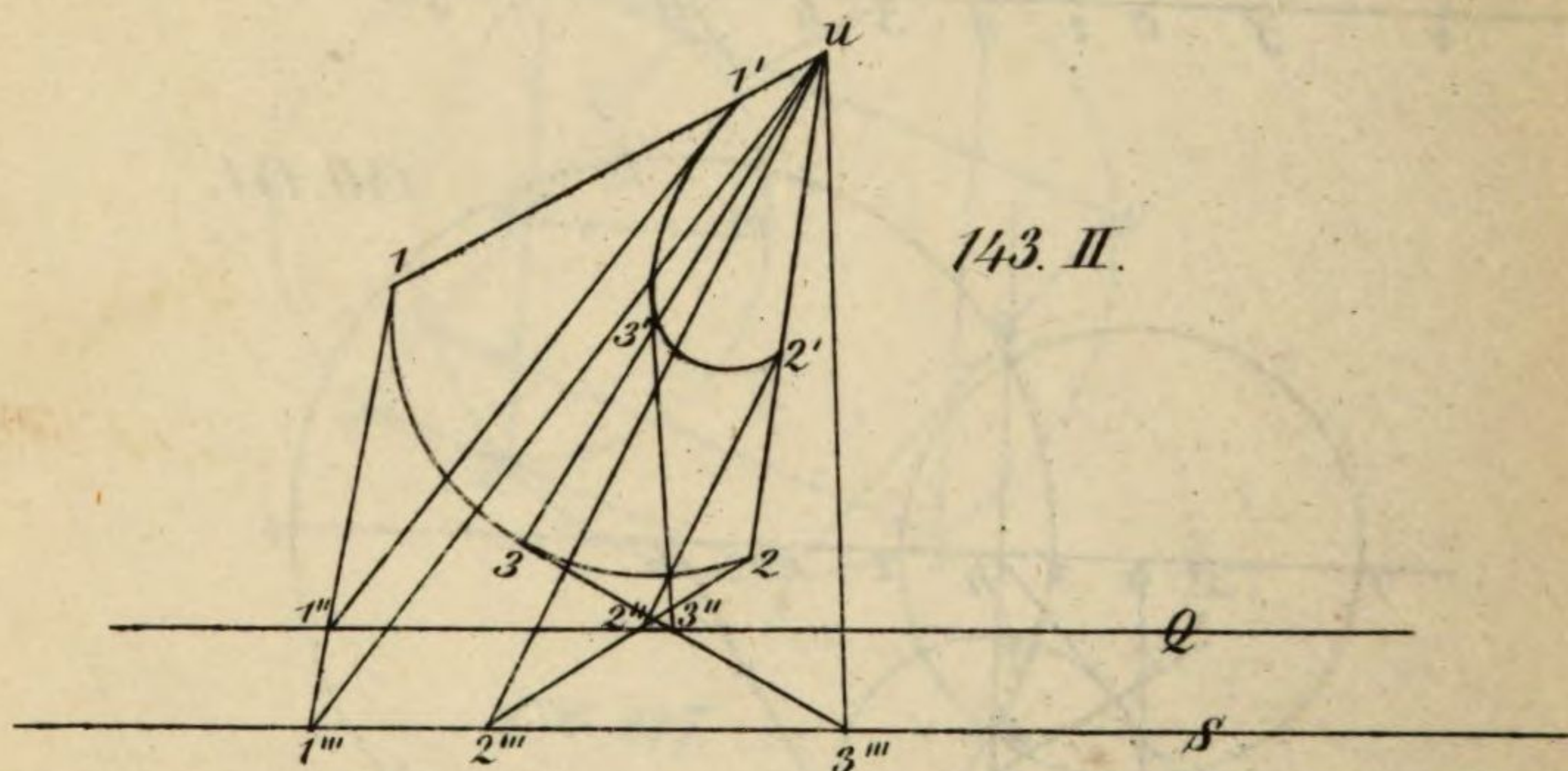
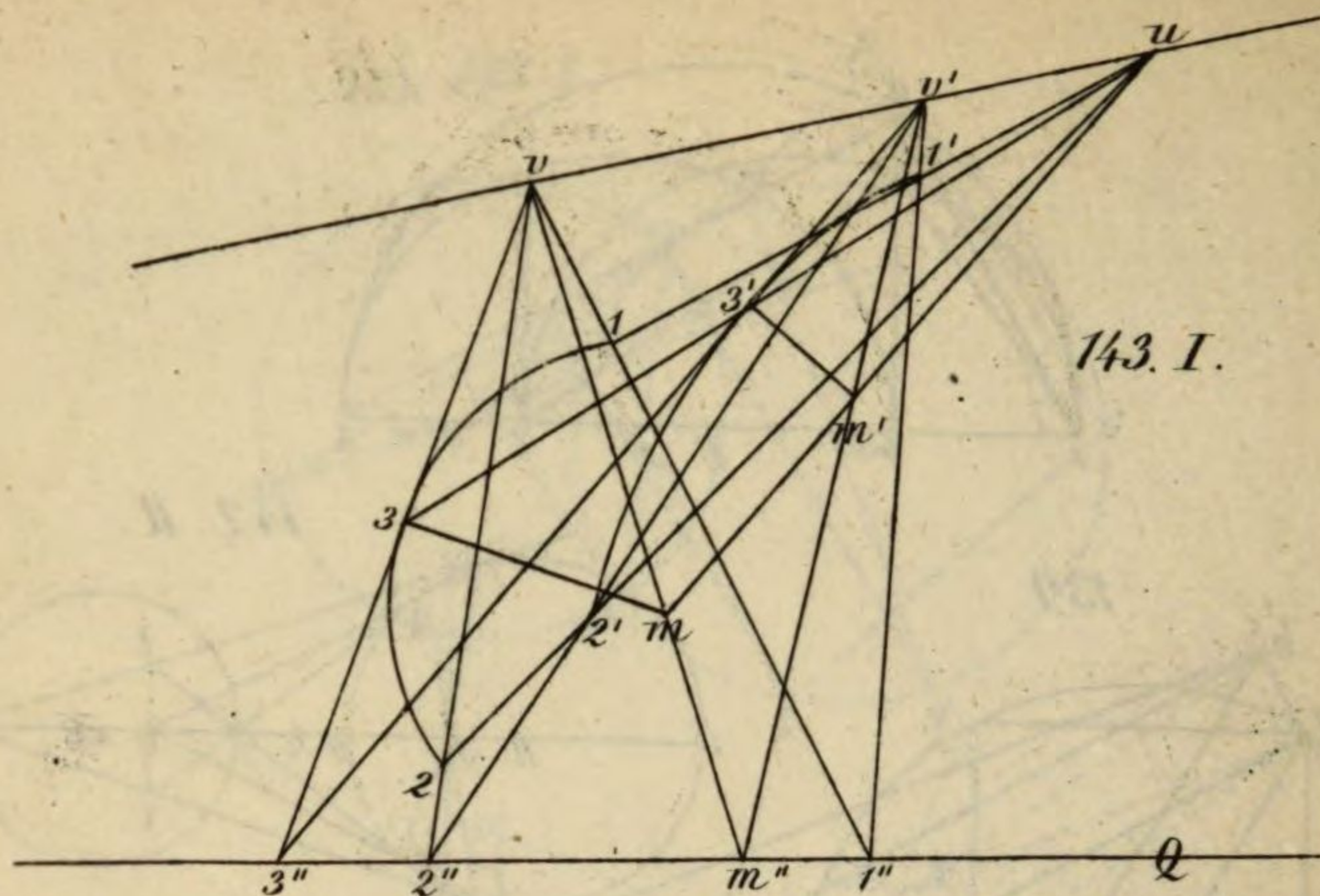
135. II.

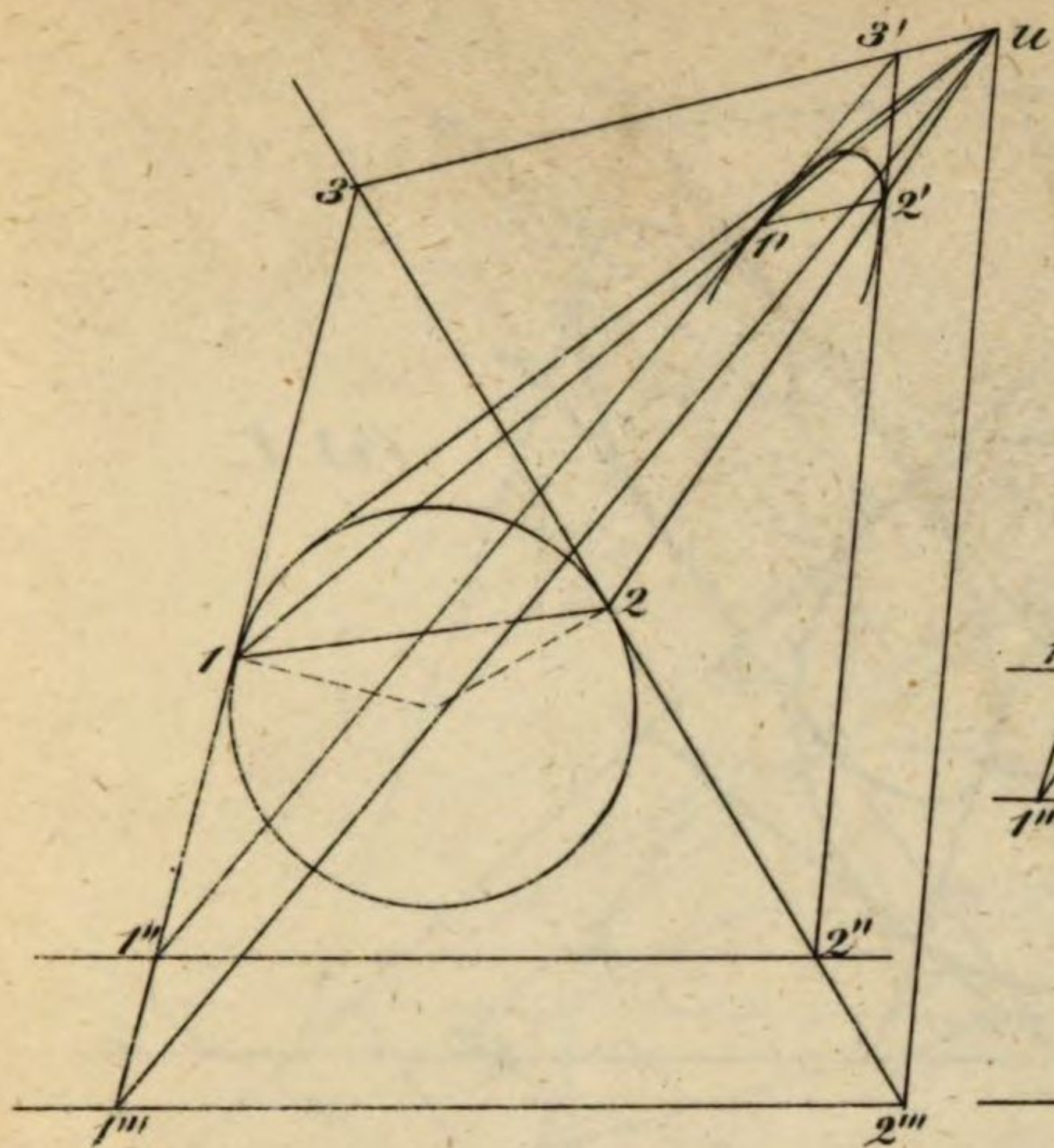


136. 137.

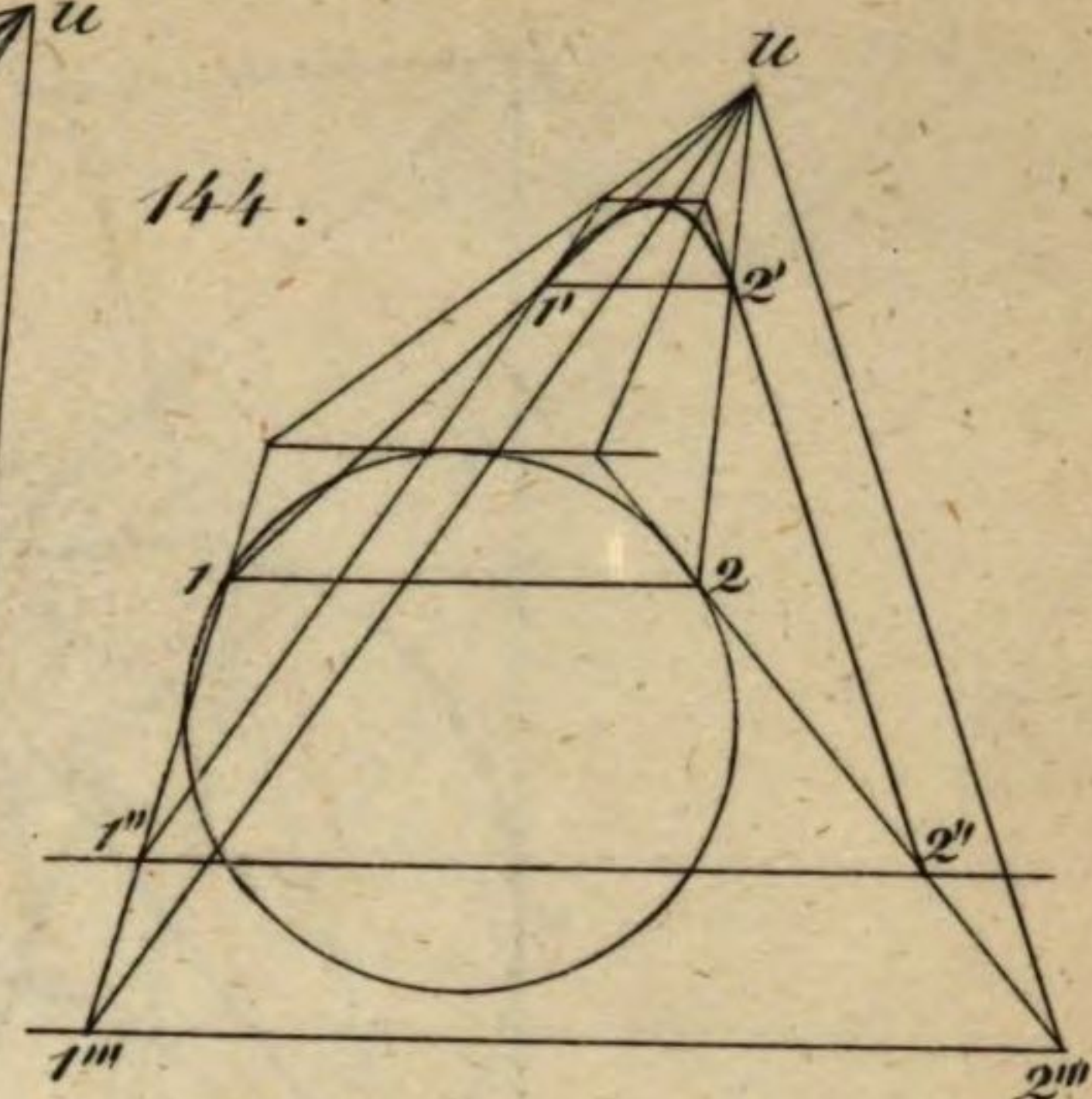




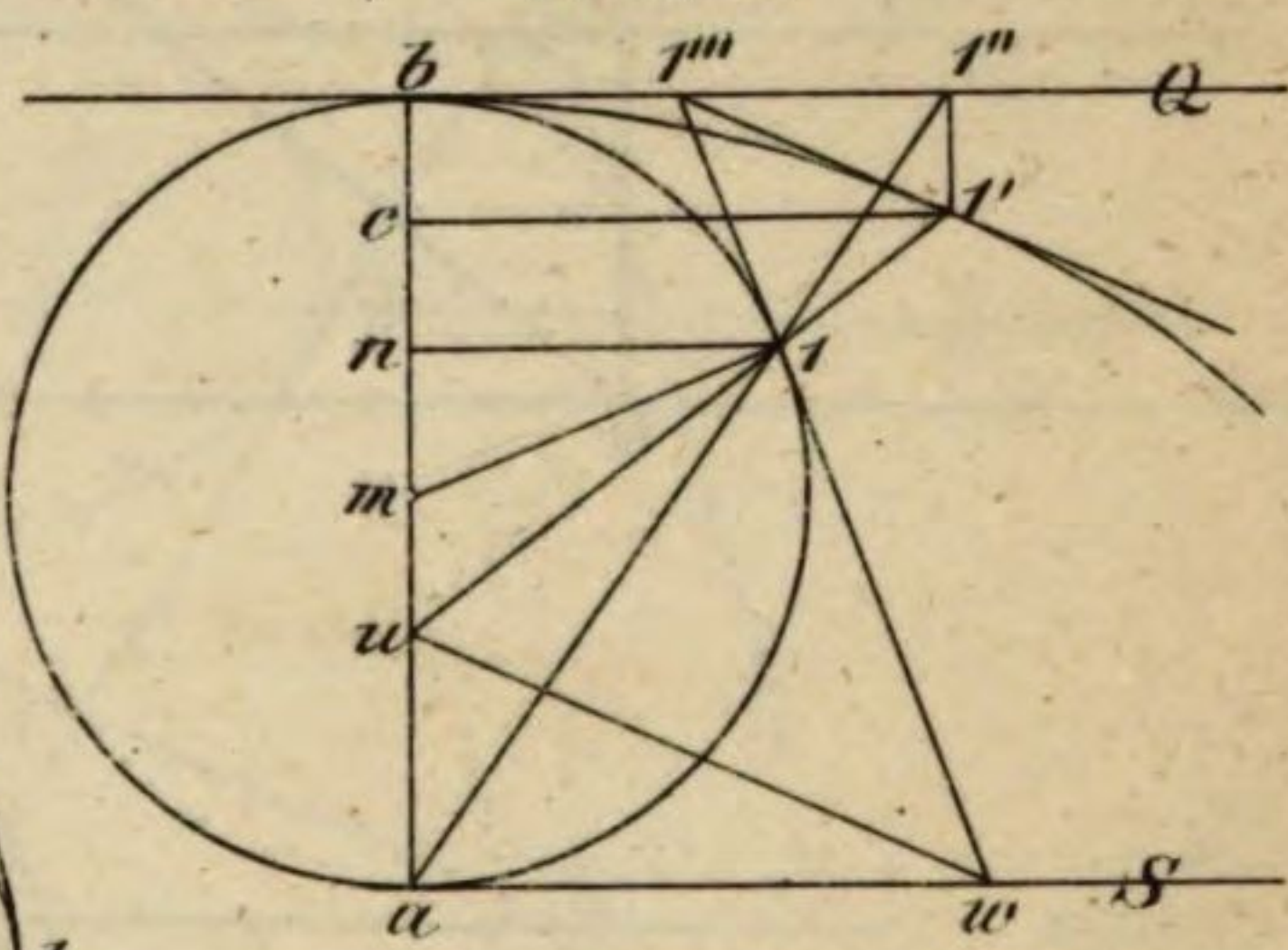




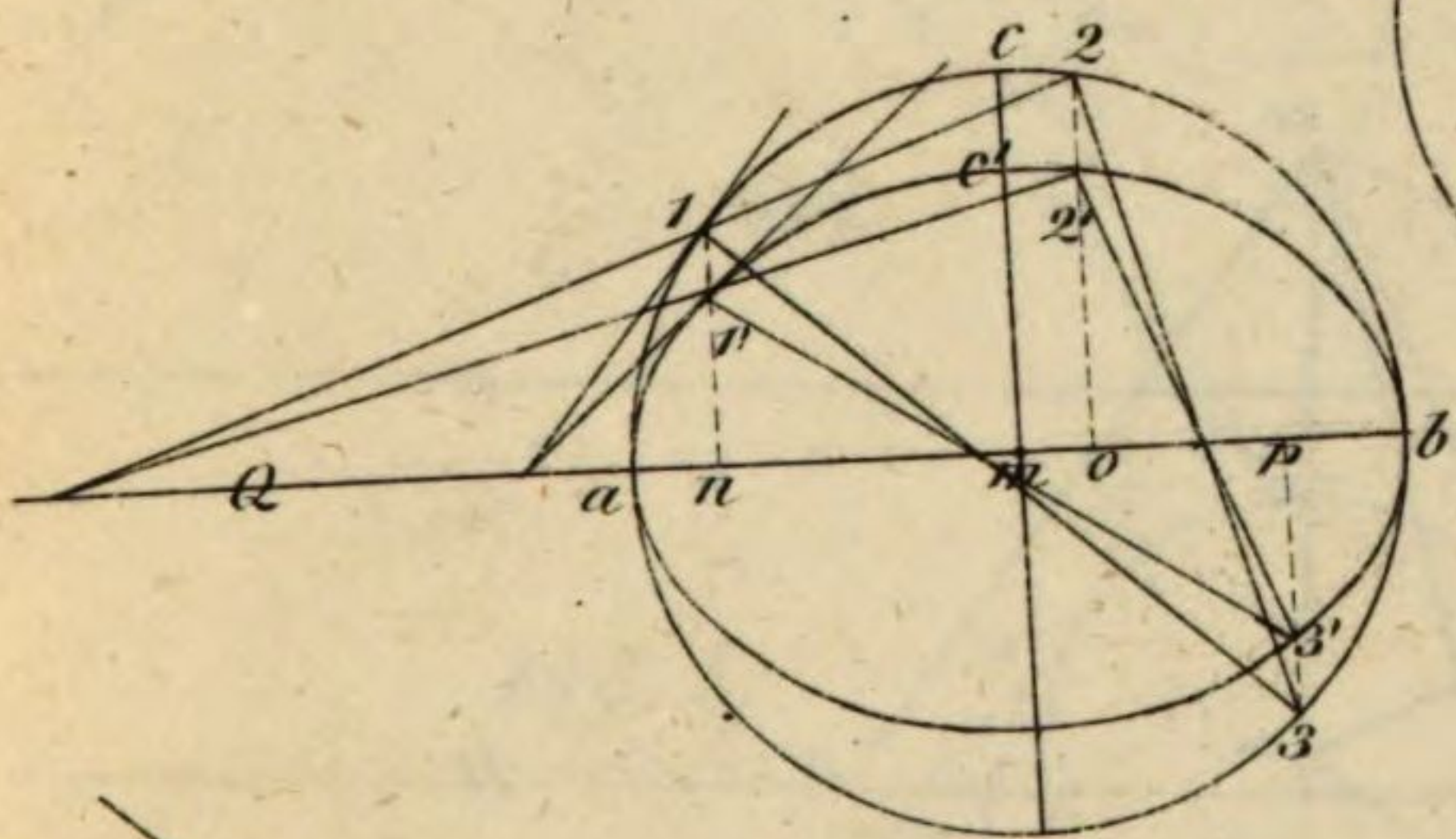
144.



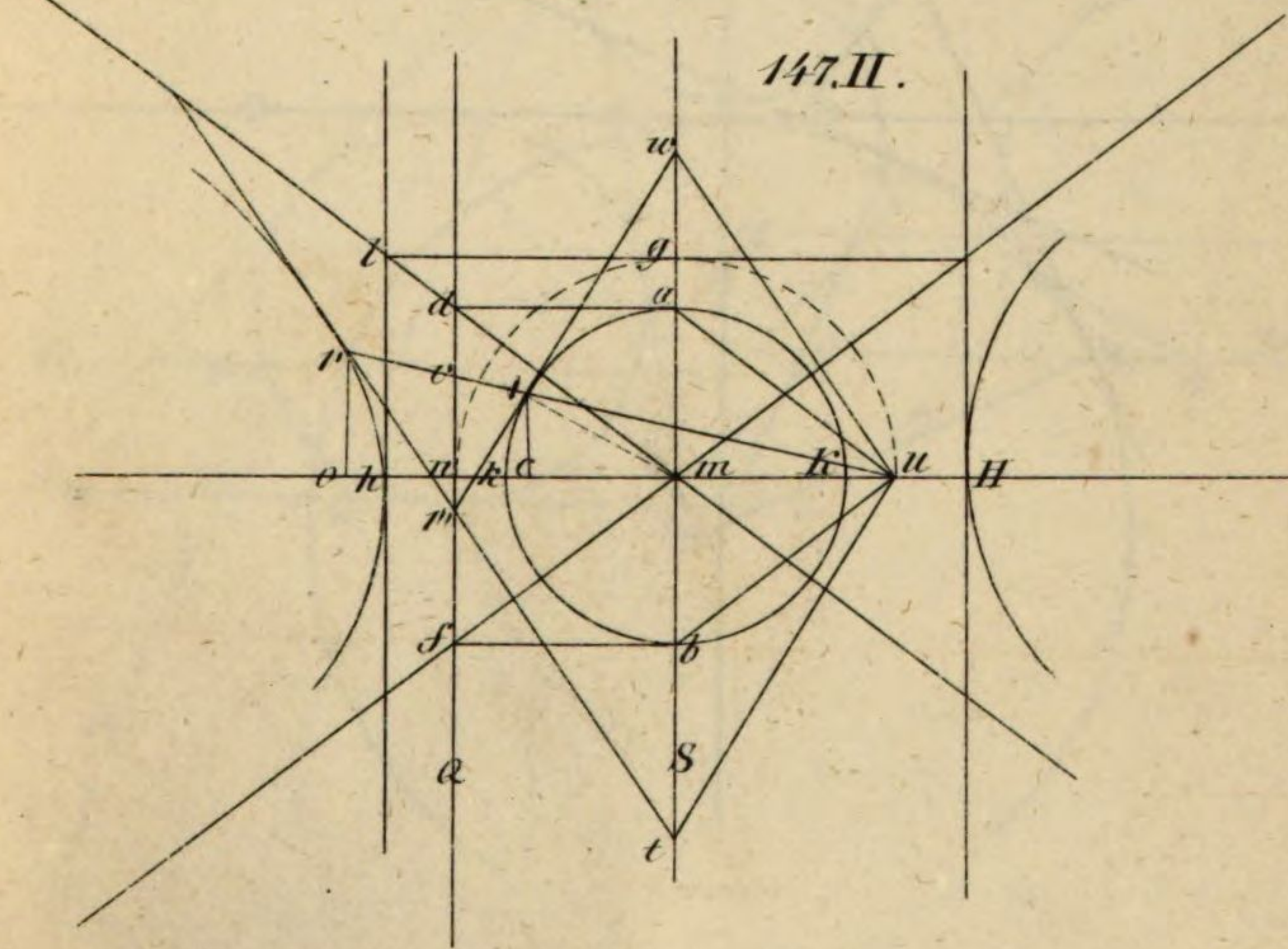
148.II.

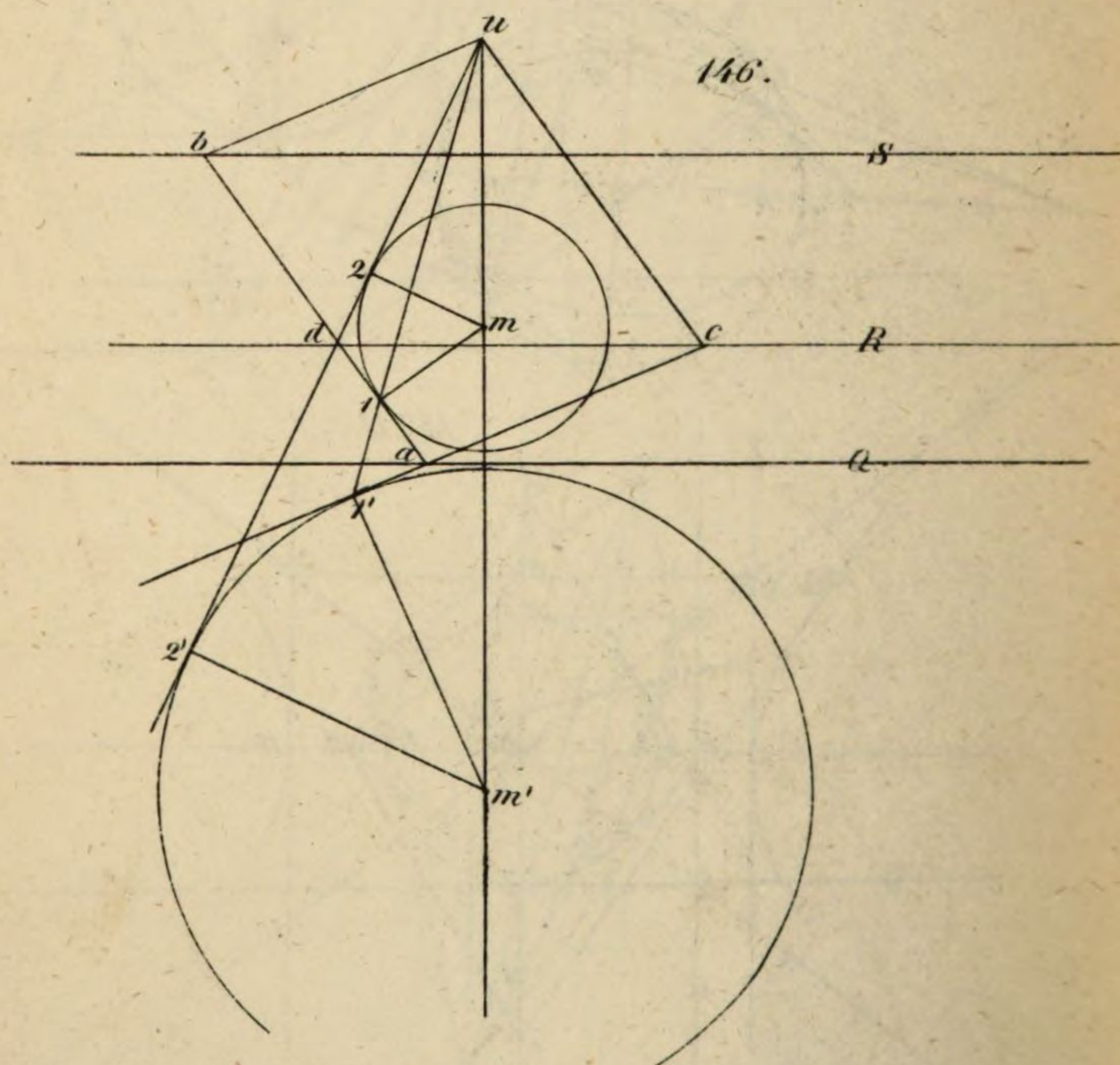
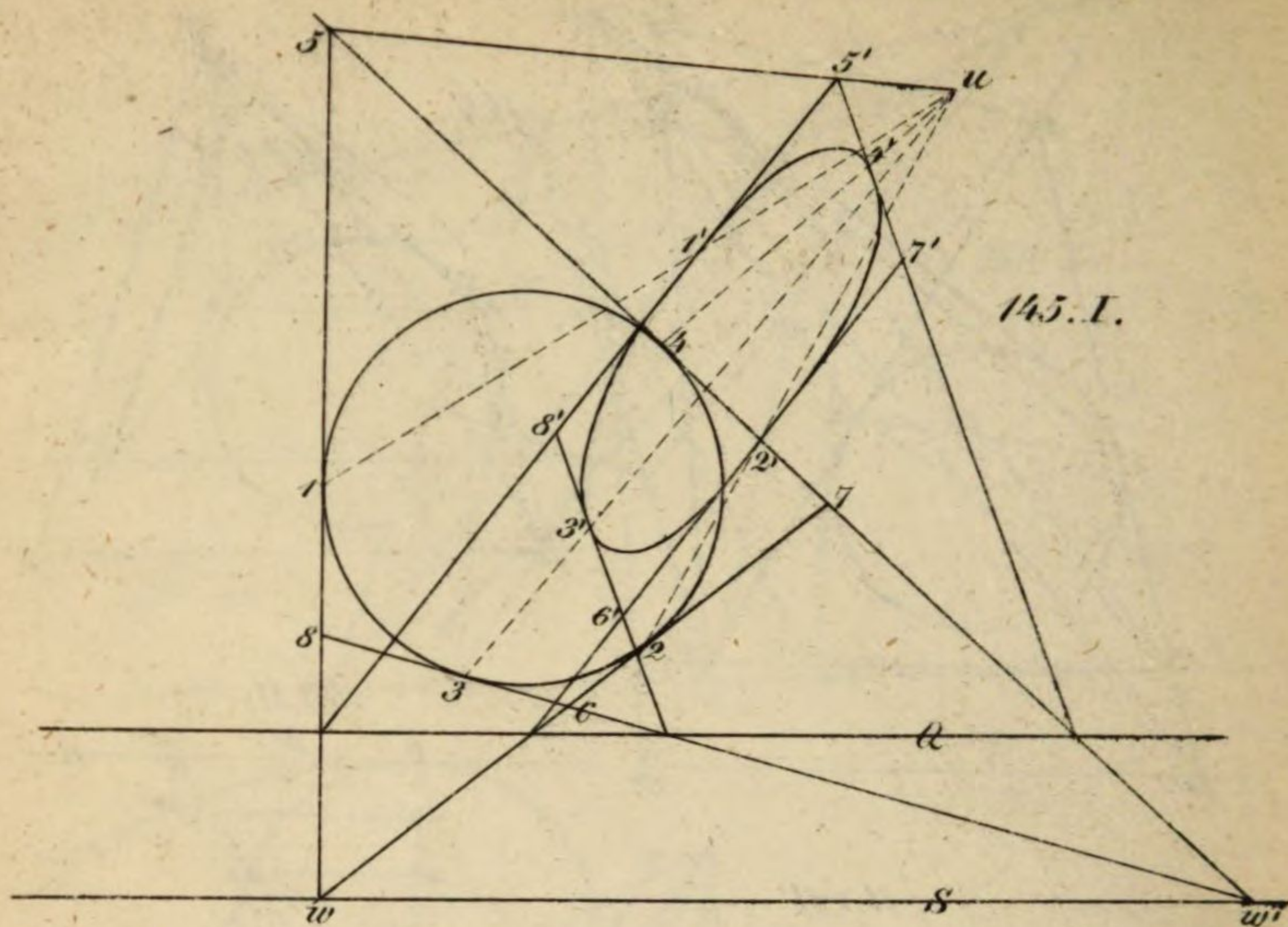


145.II.

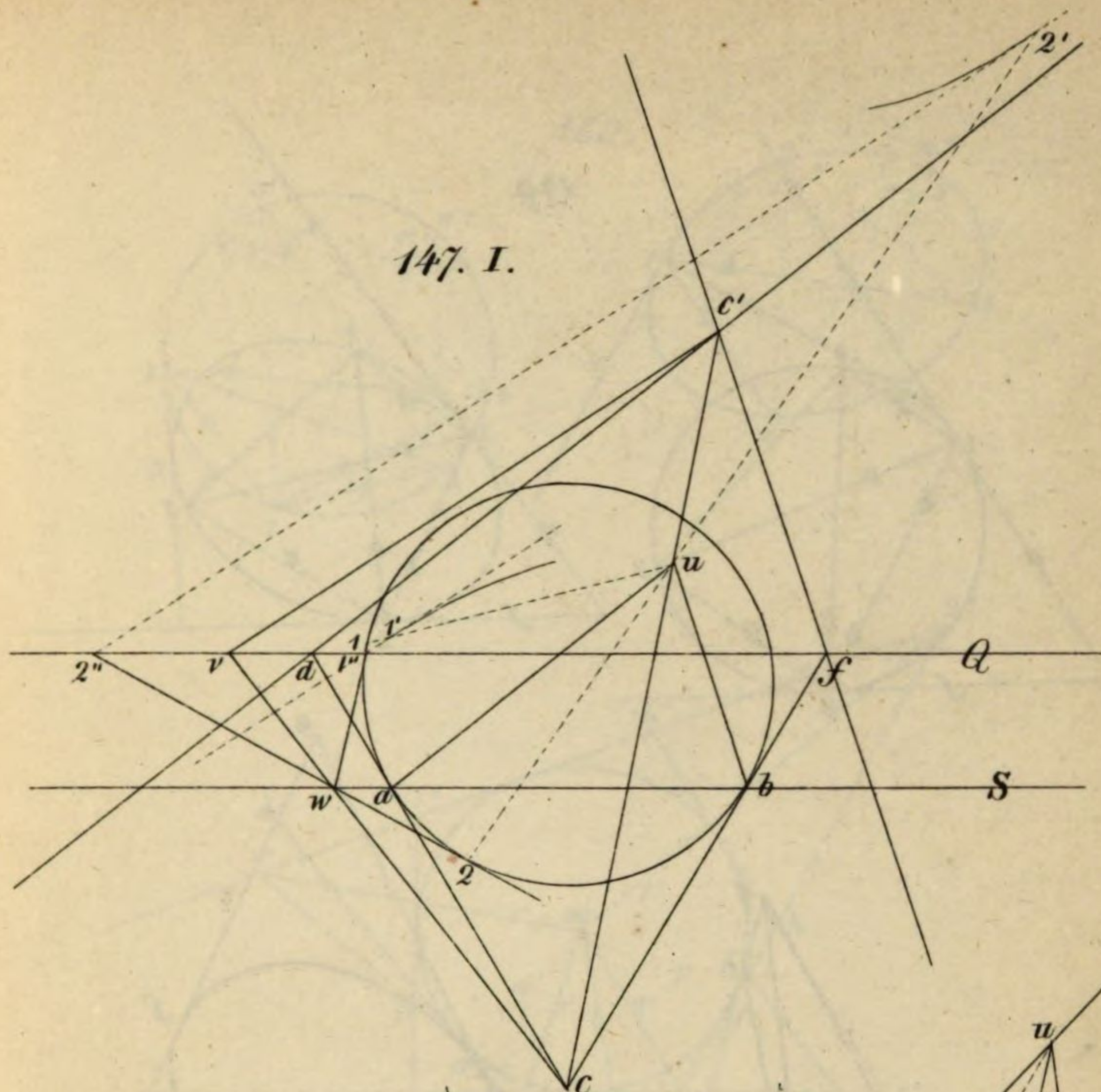


147.II.

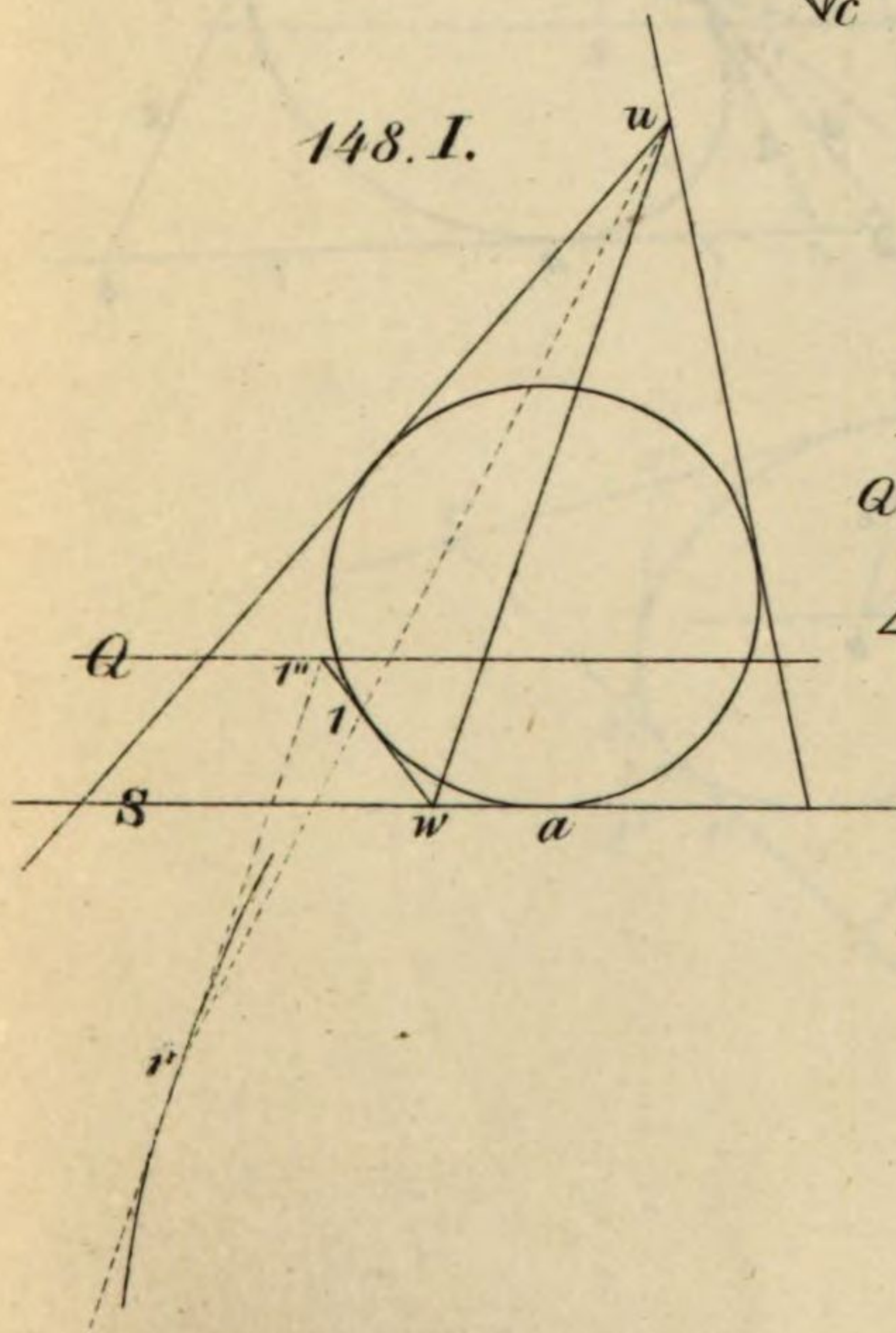




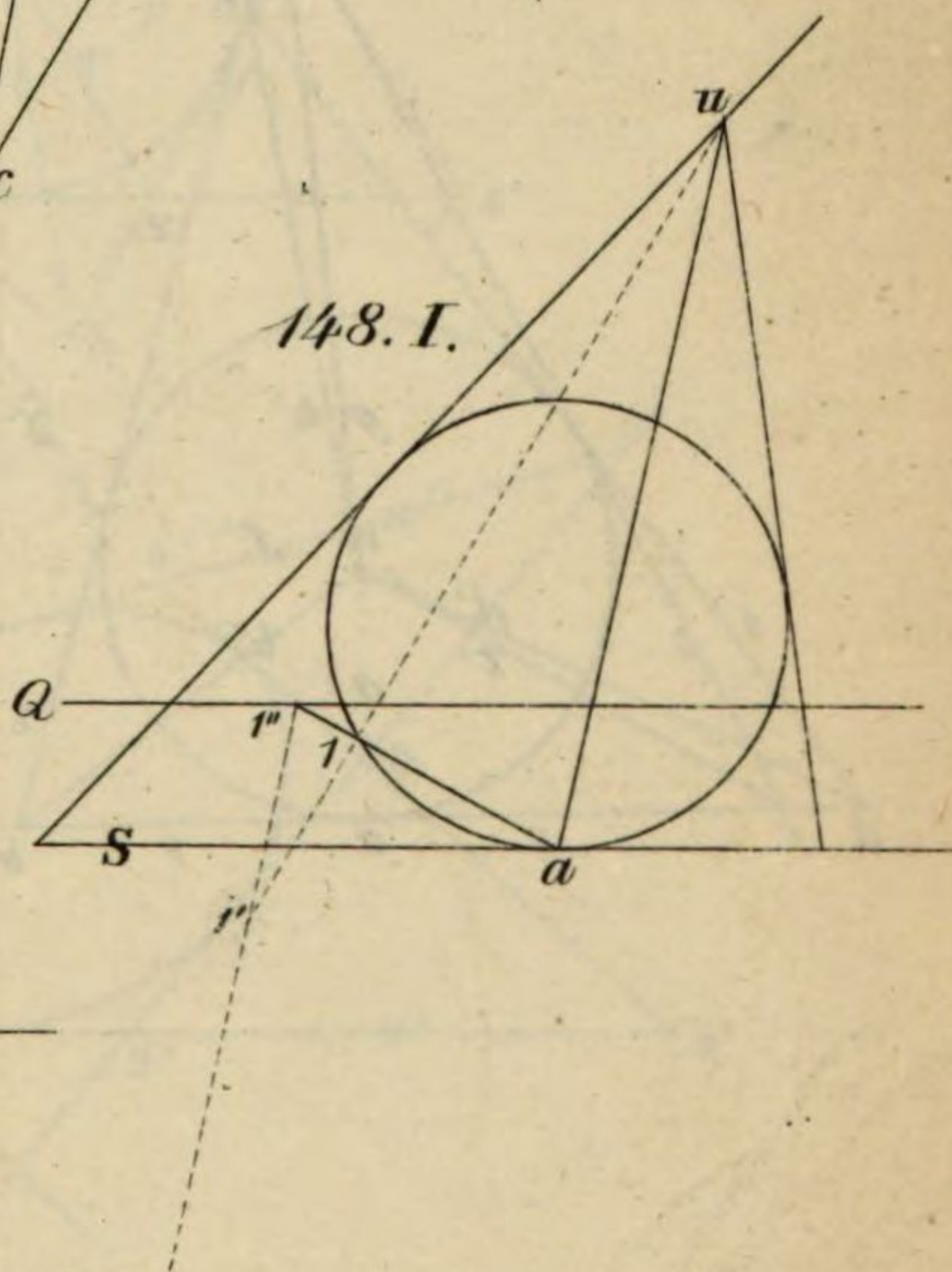
147. I.



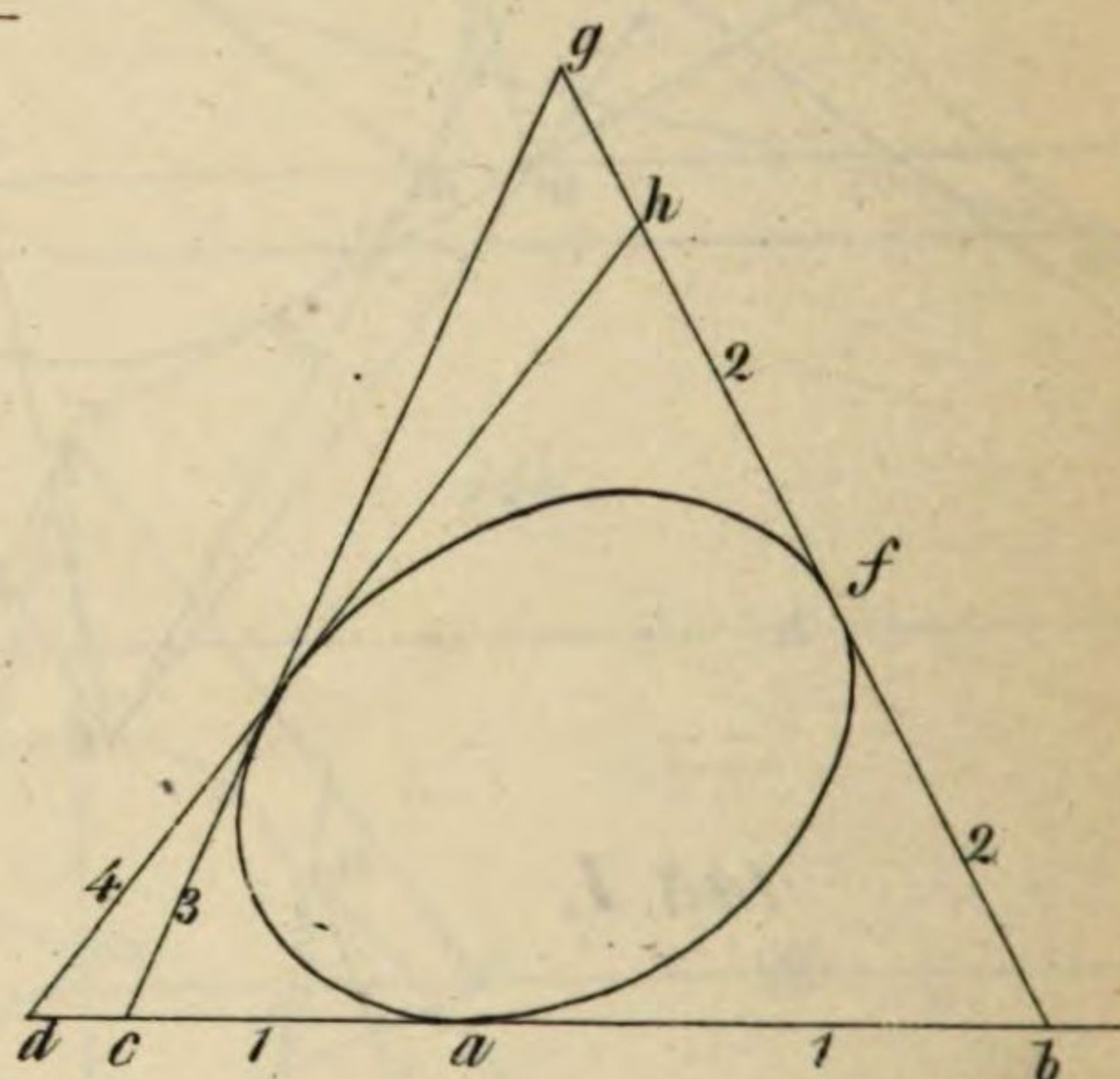
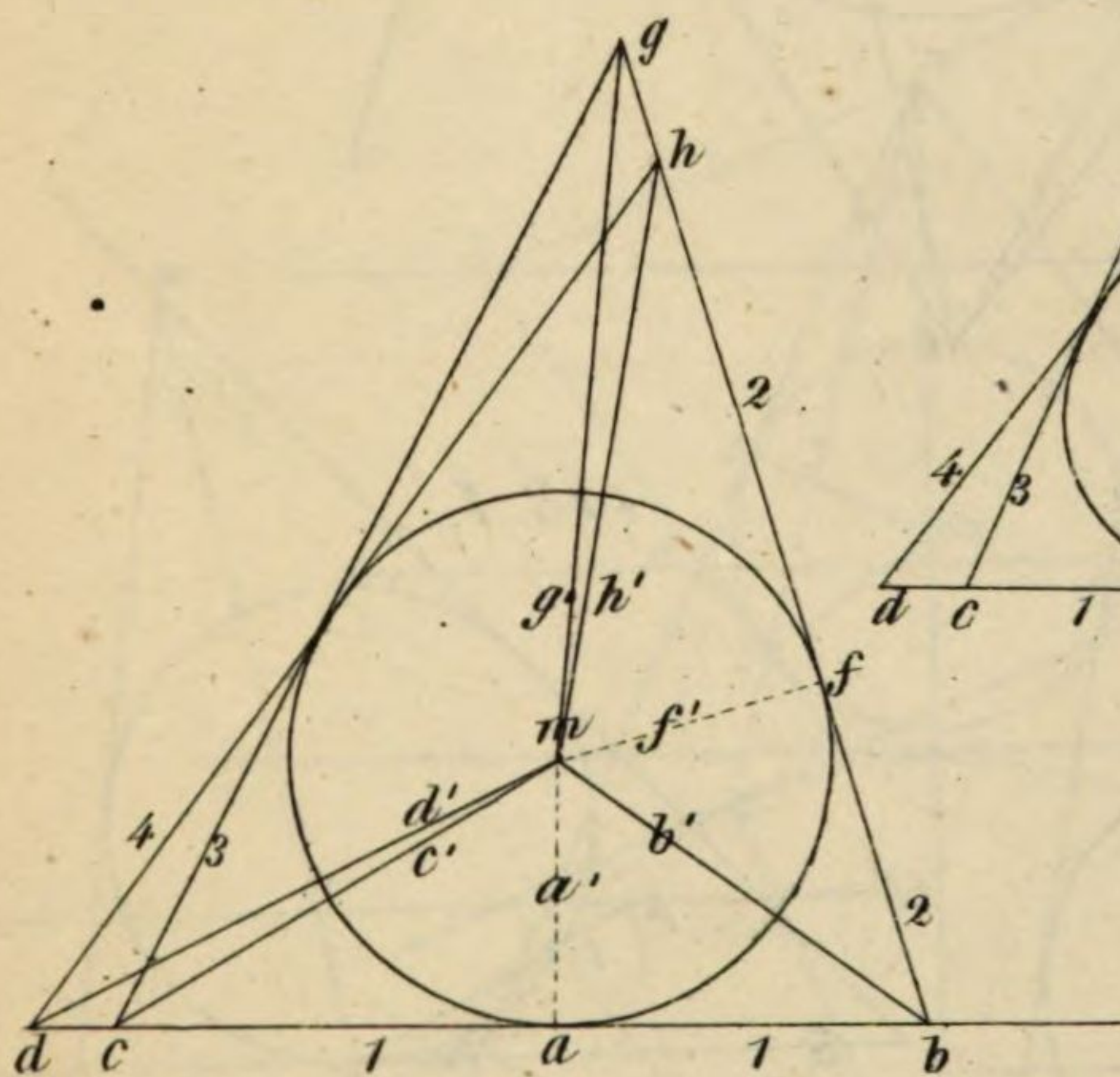
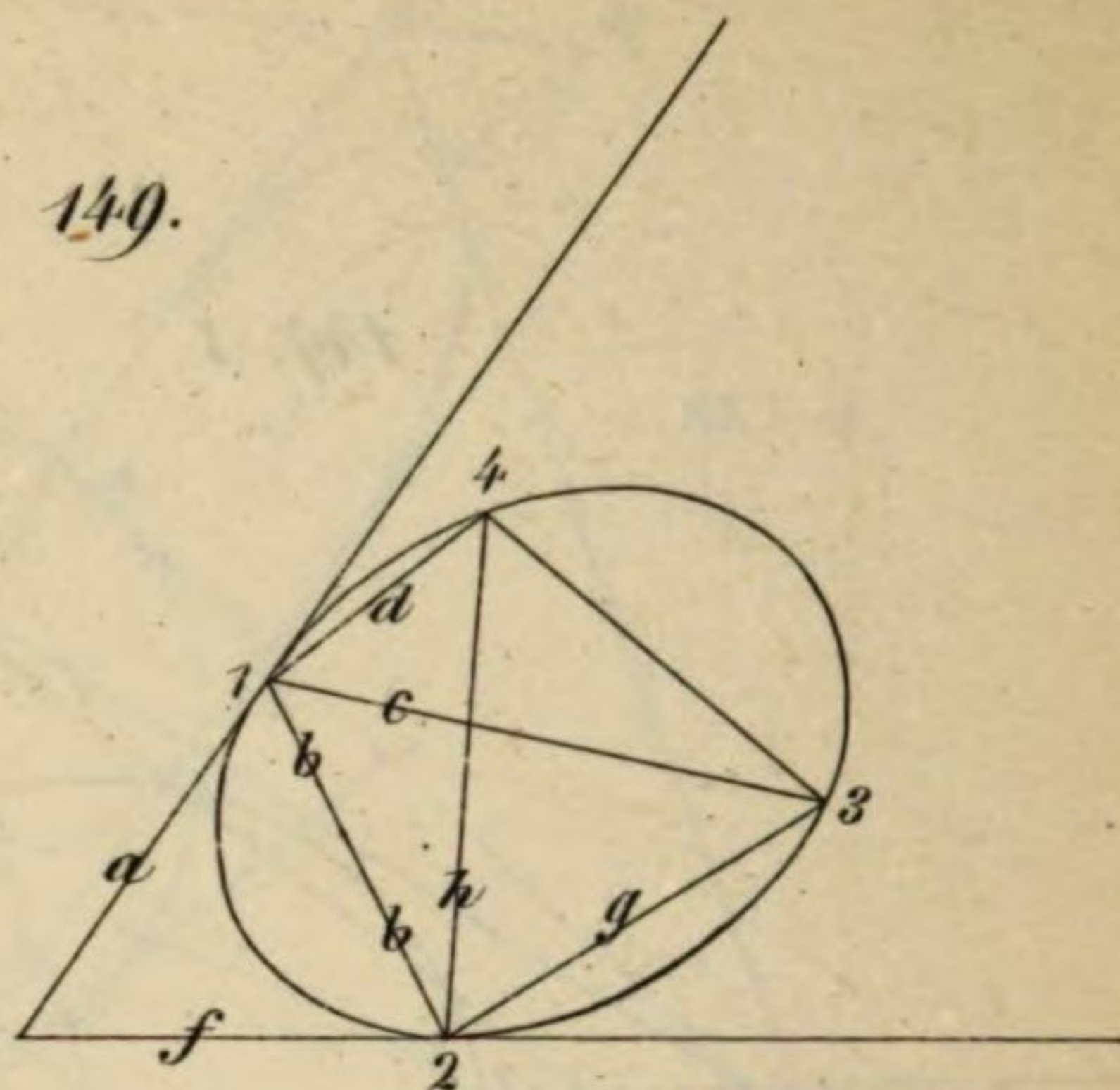
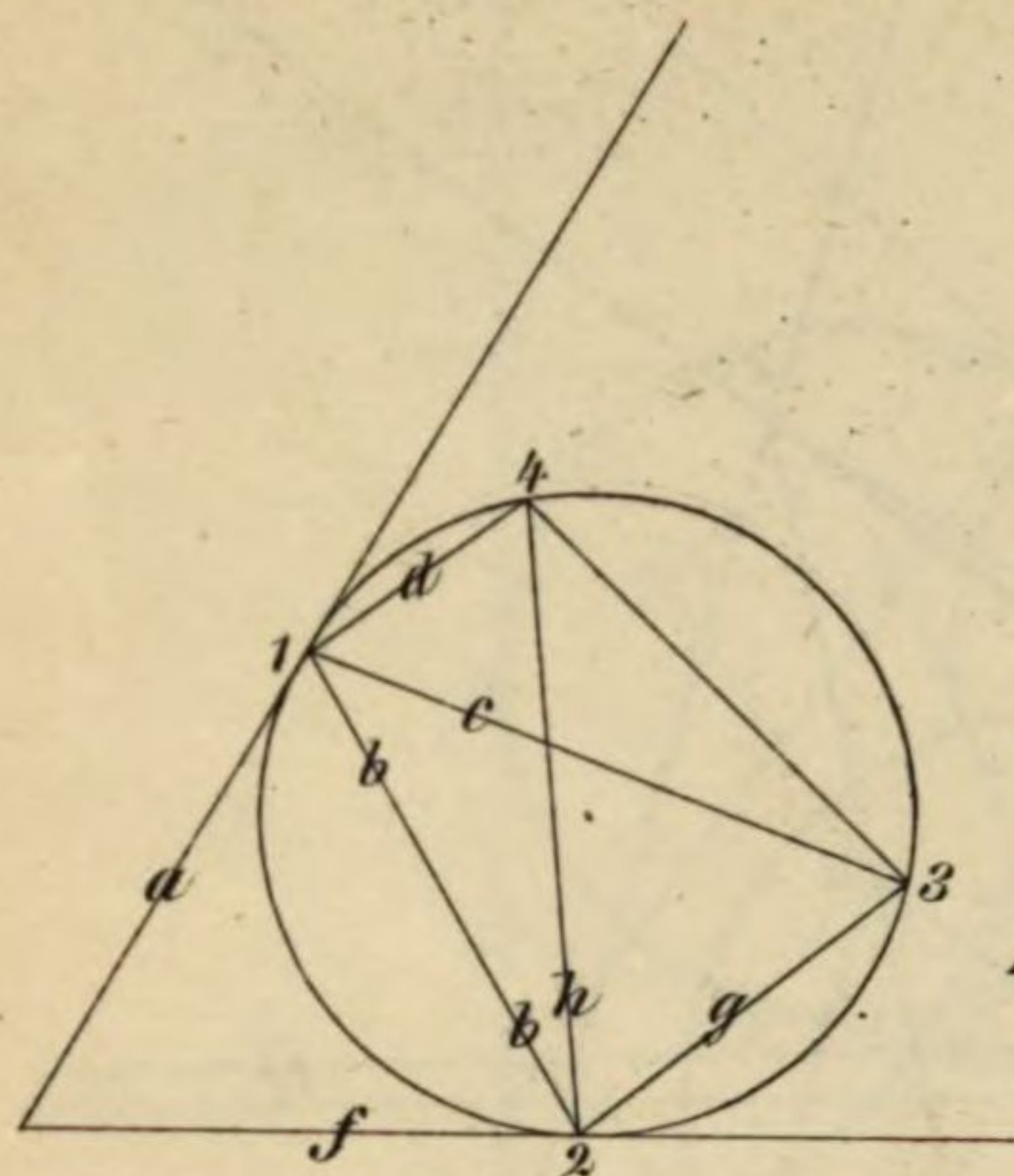
148. I.



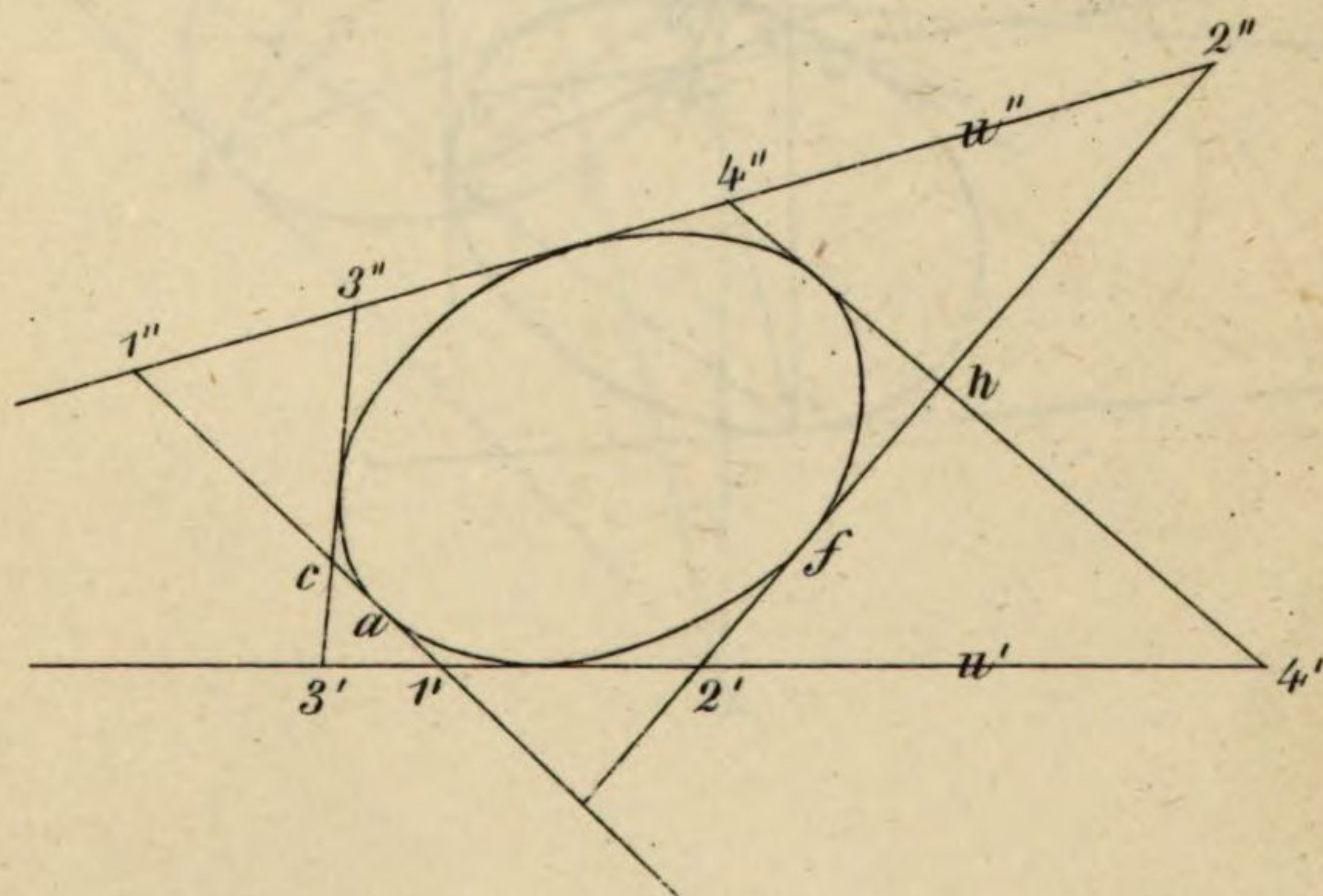
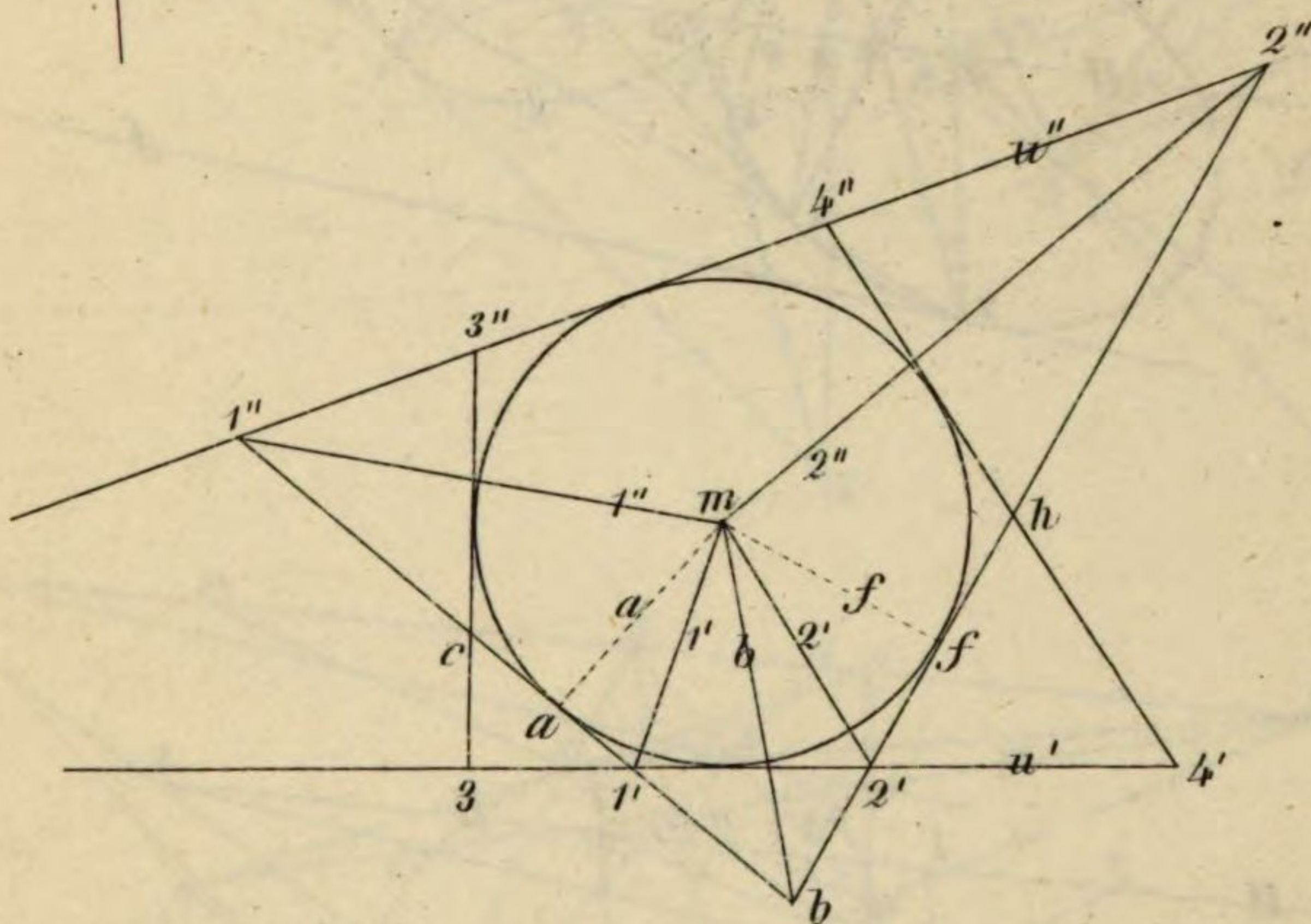
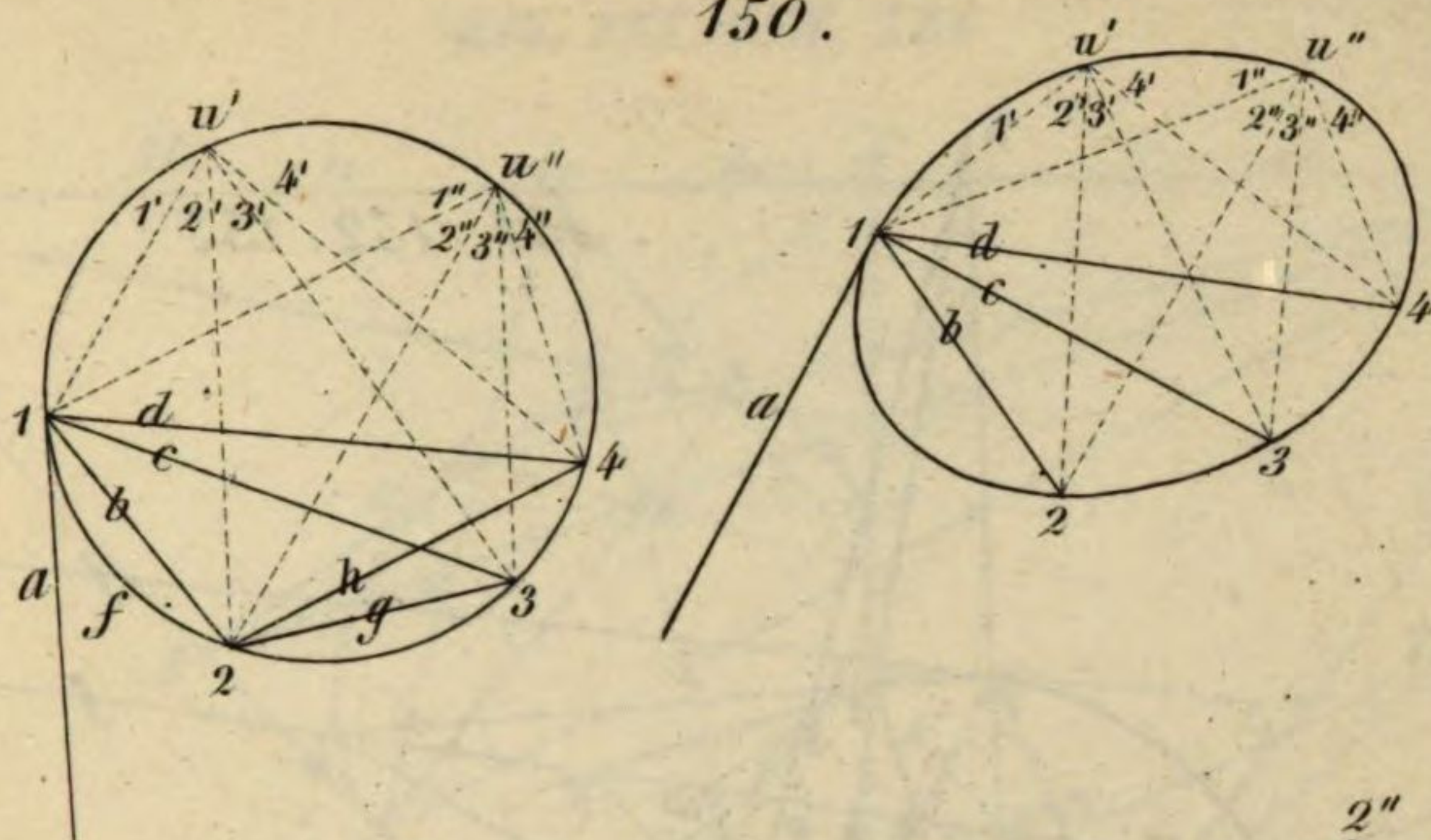
148. I.



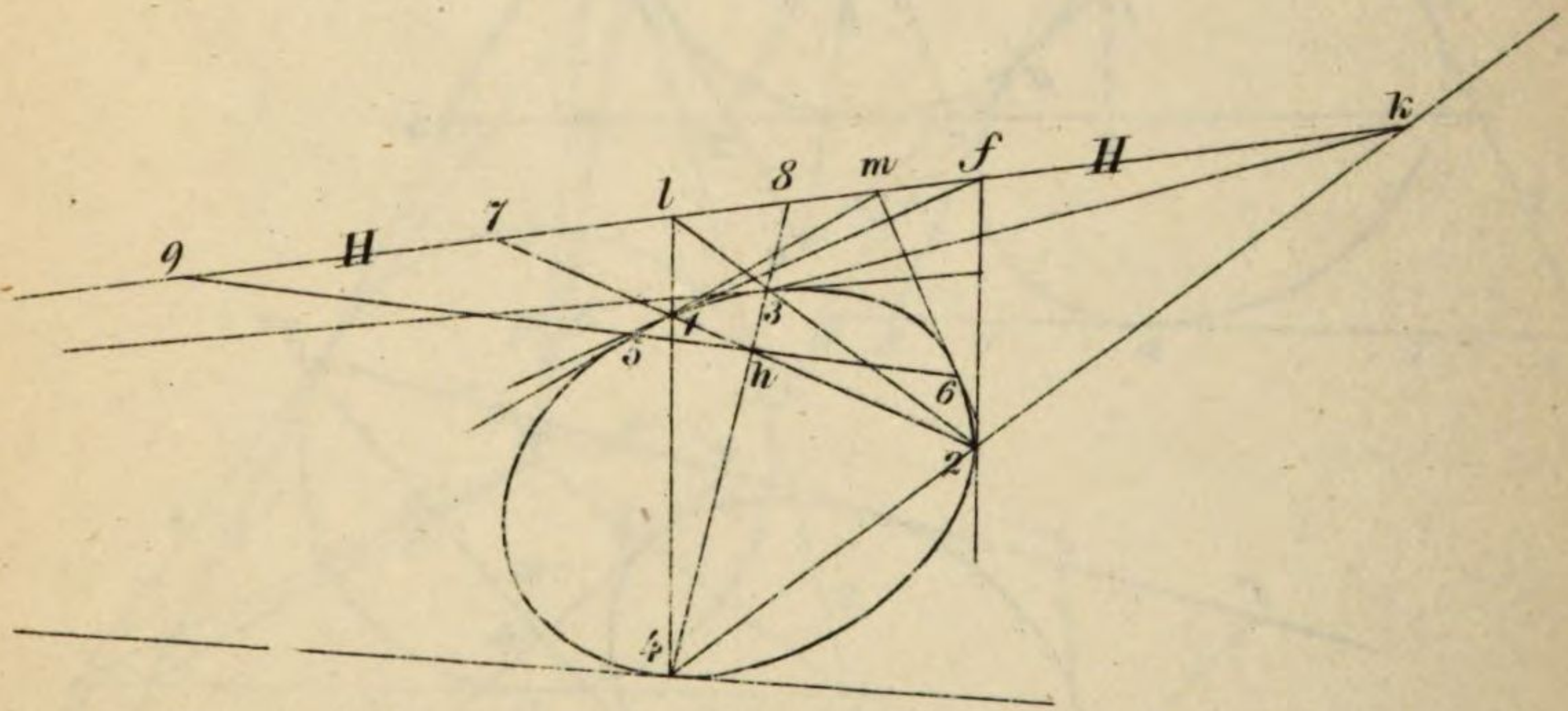
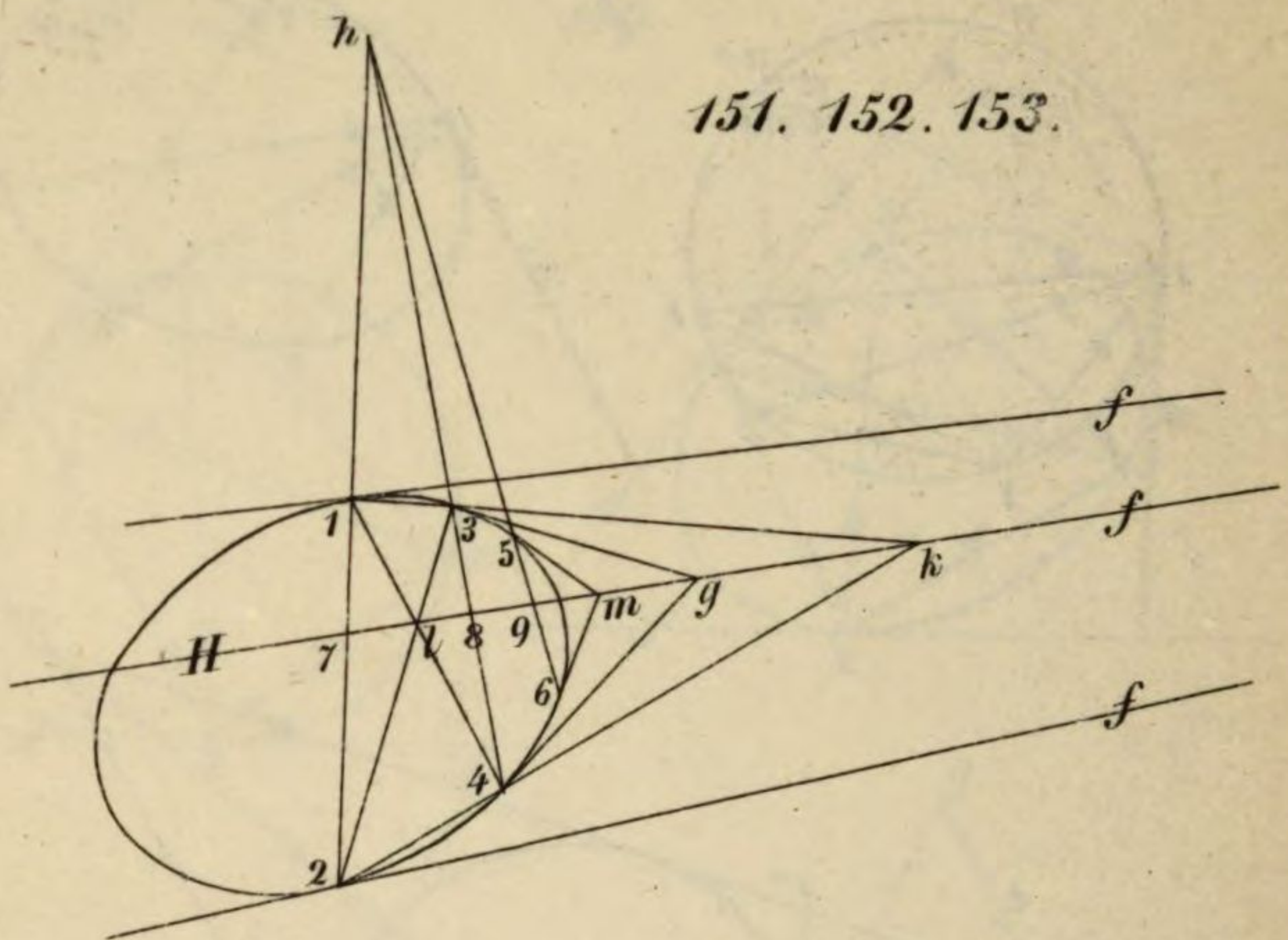
149.

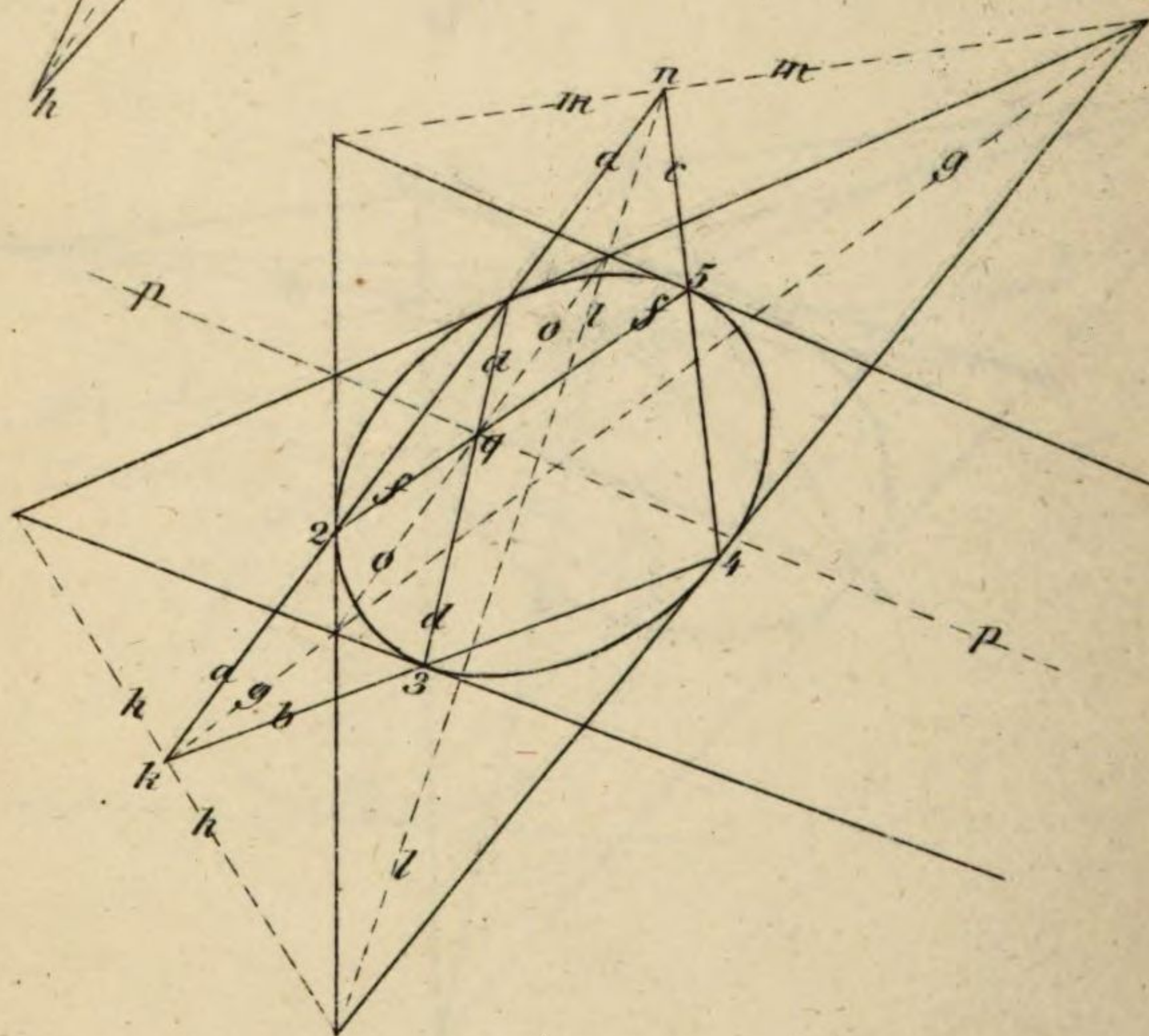
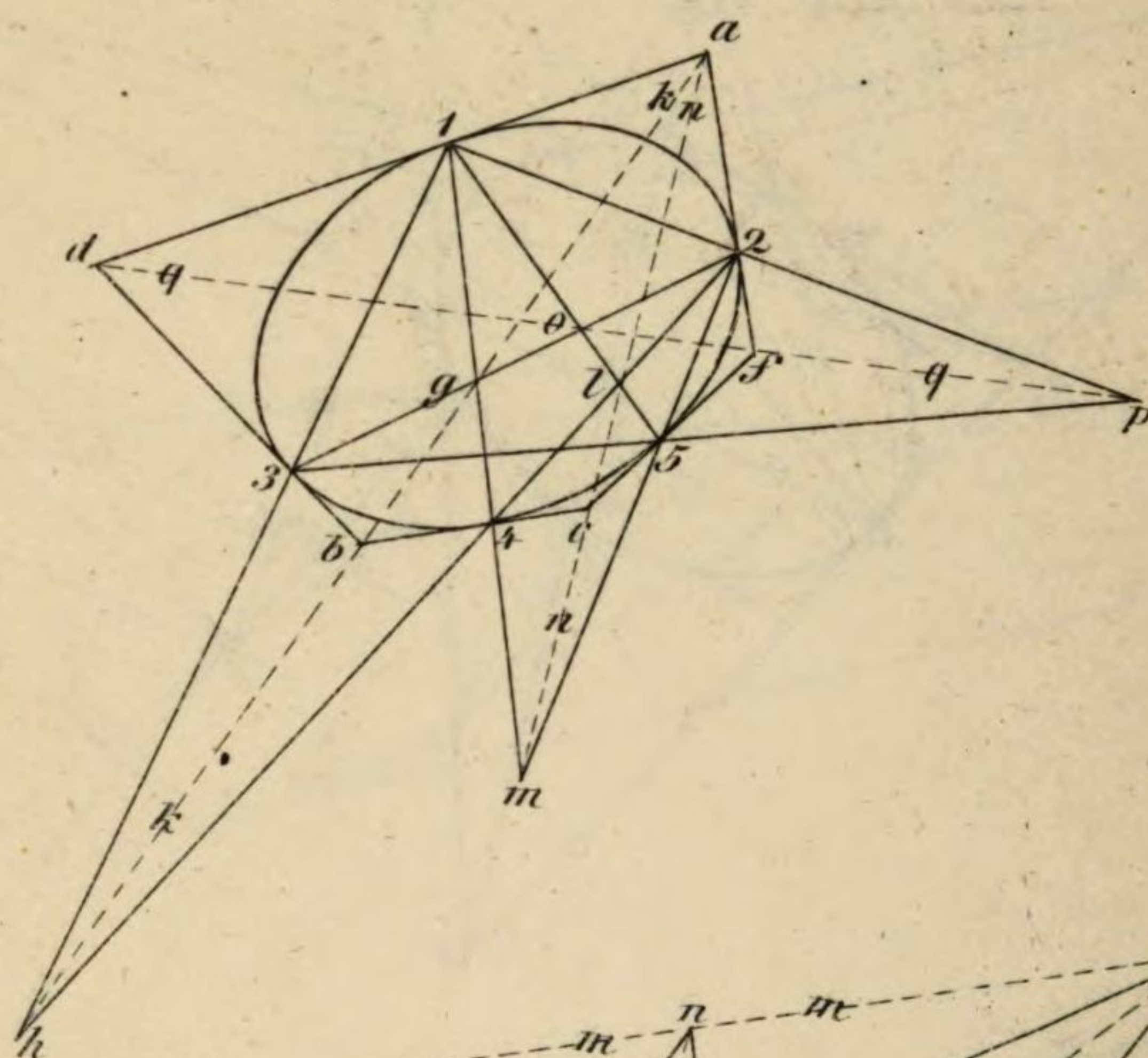


150.

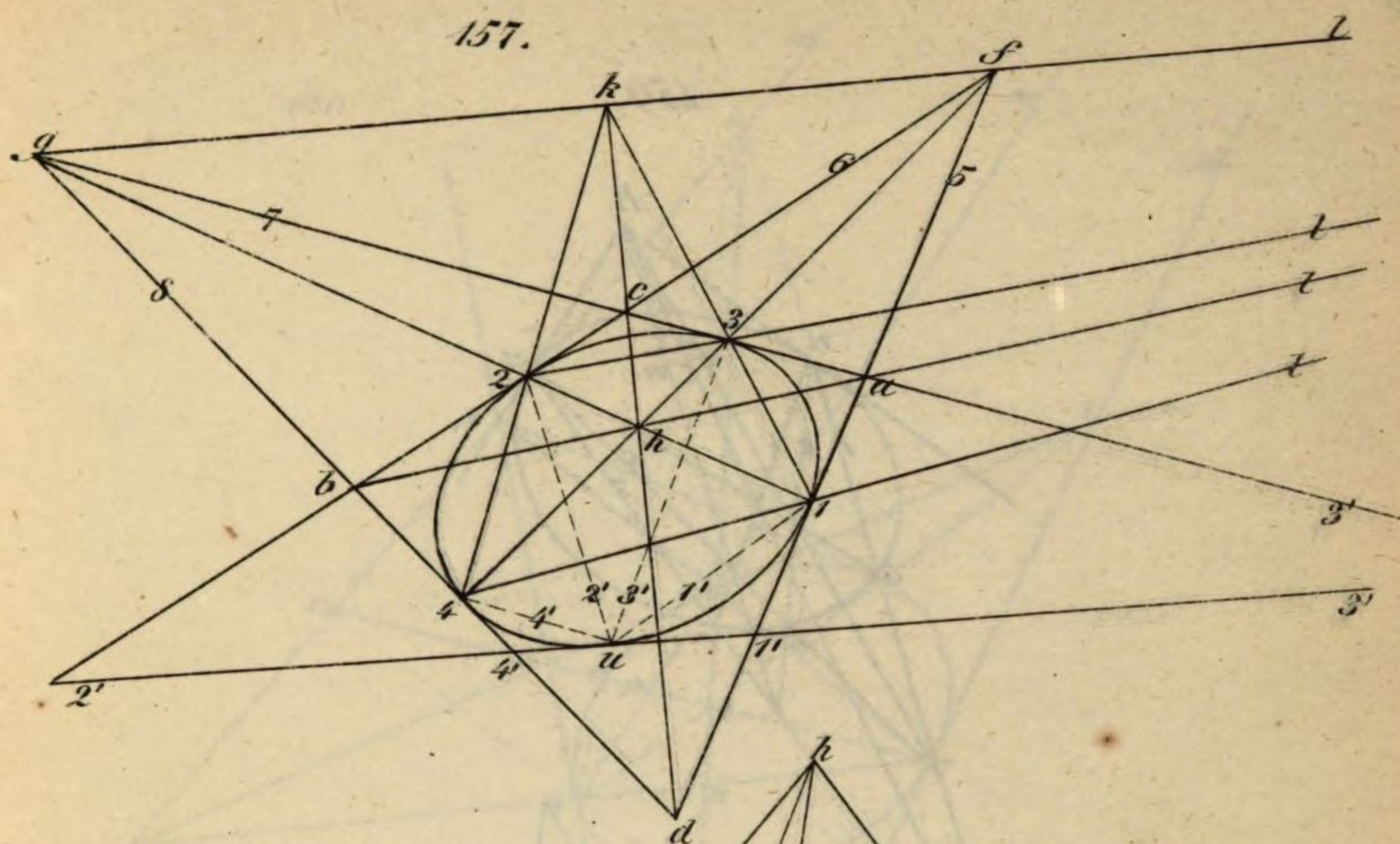


151. 152. 153.

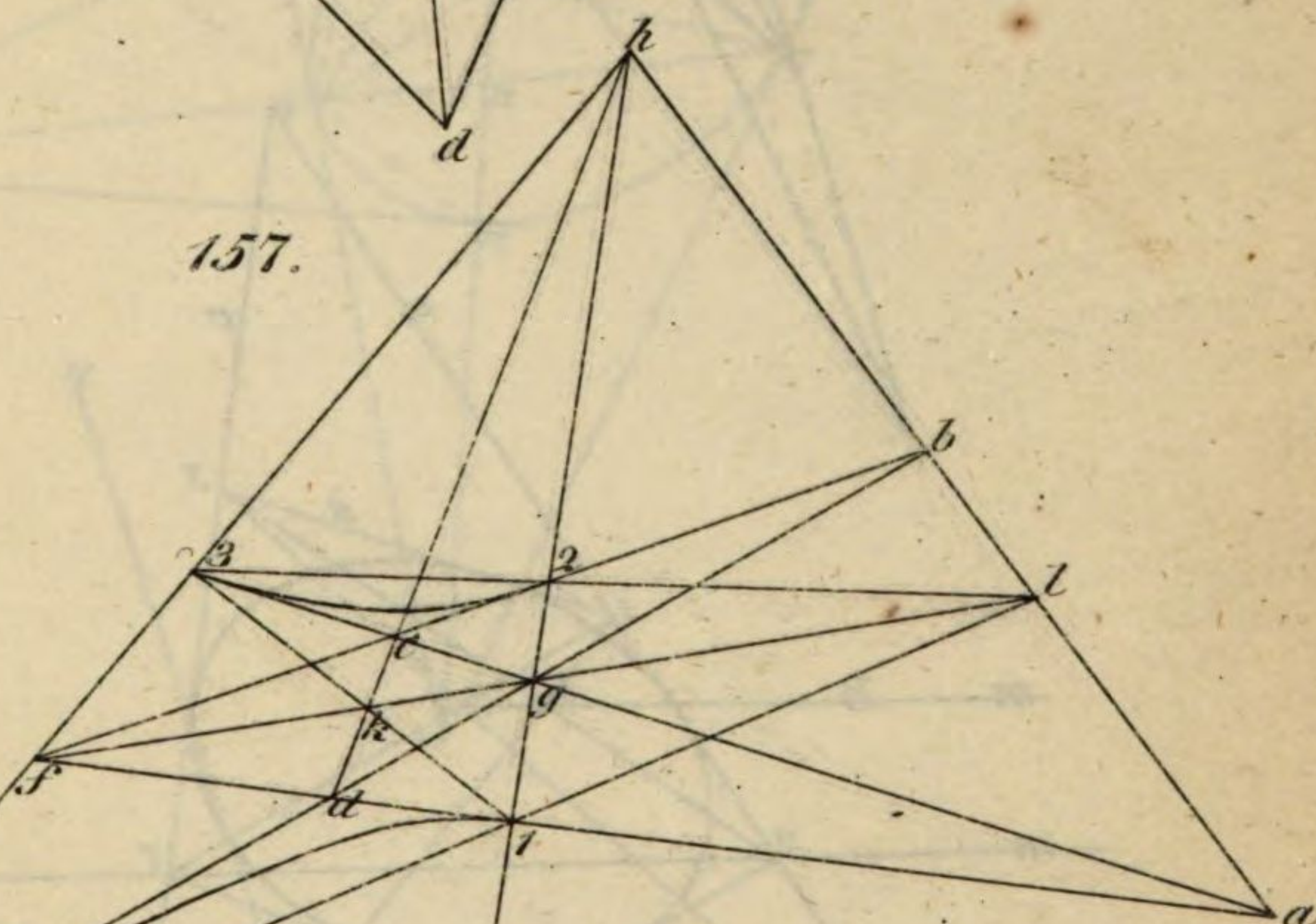




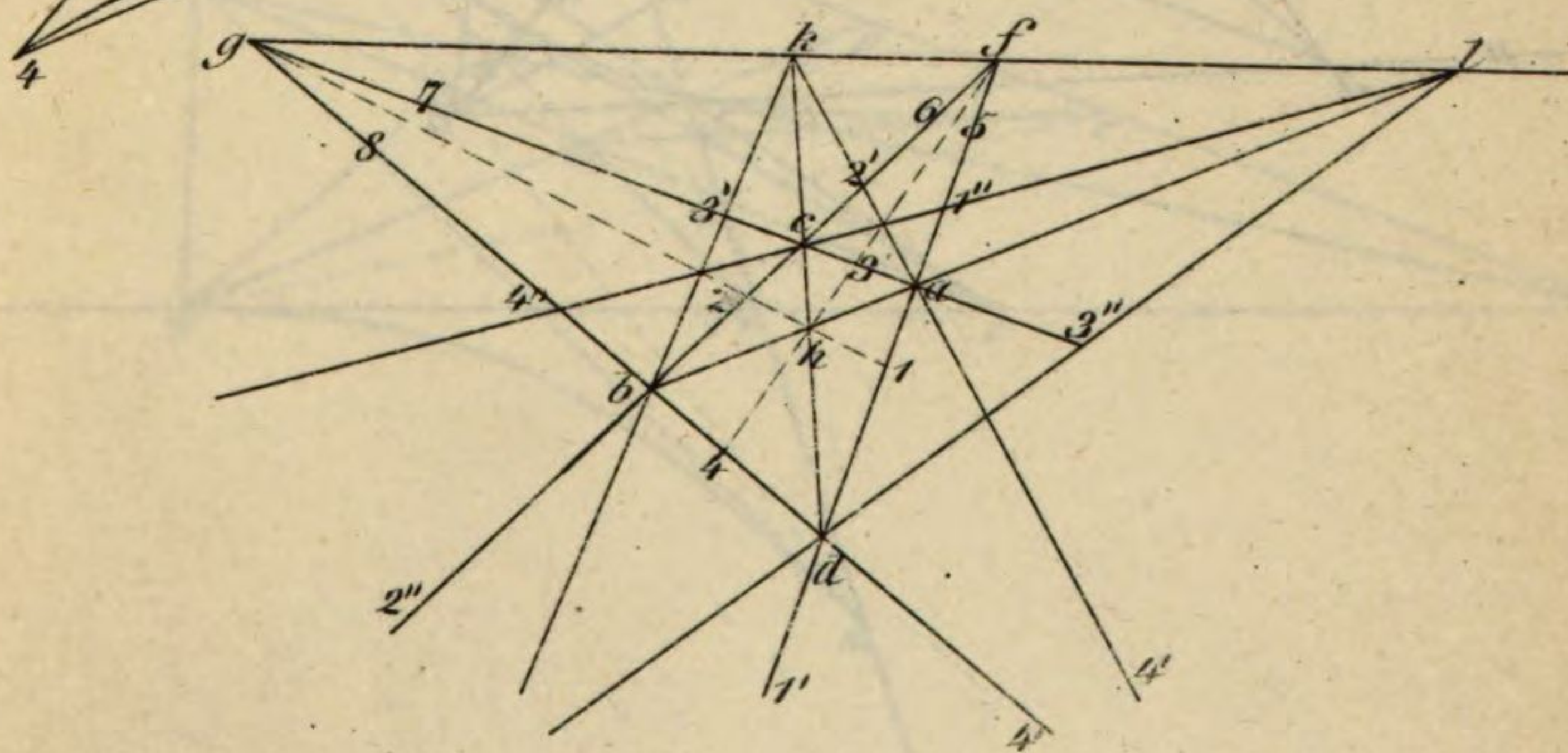
157.

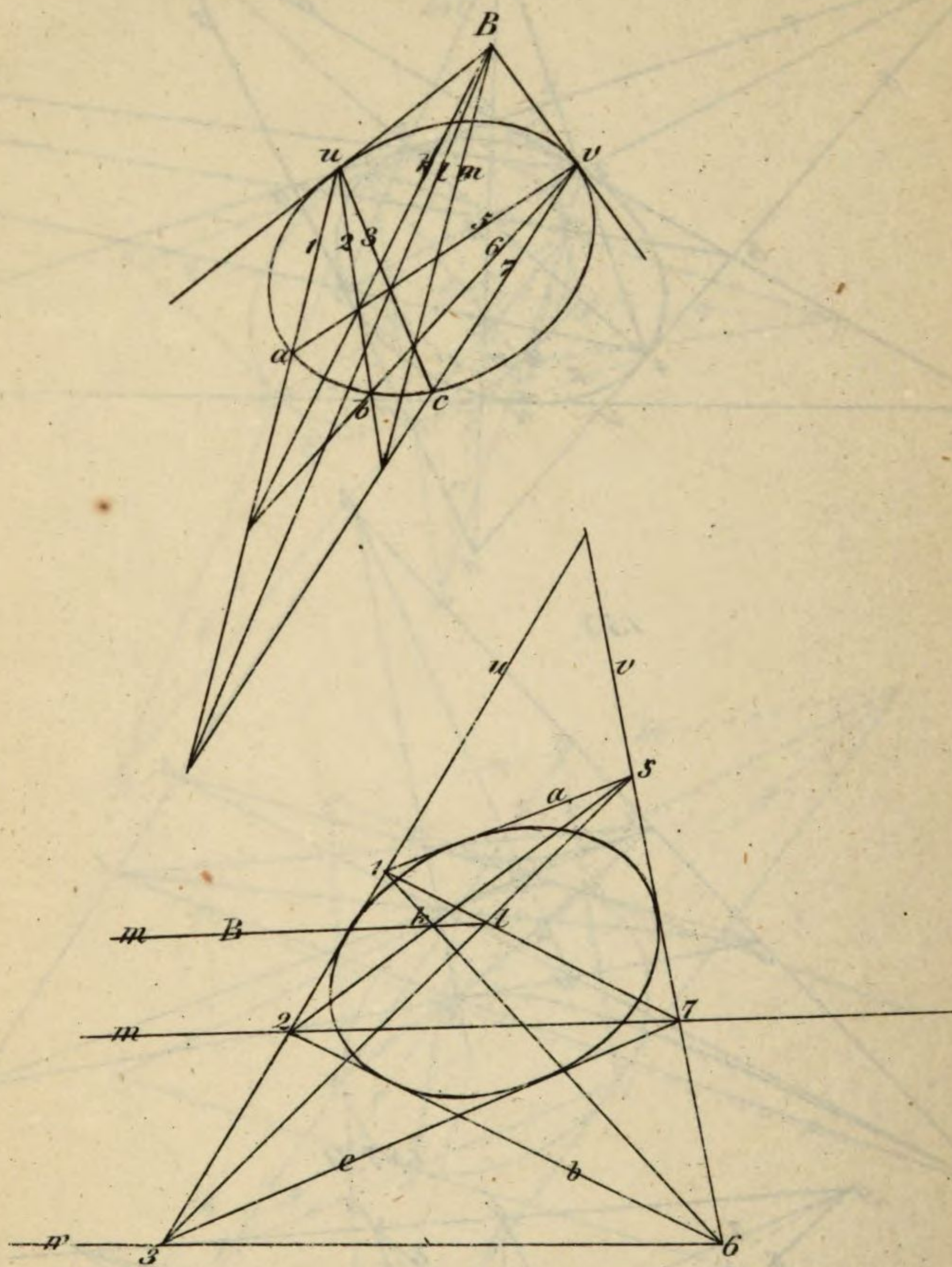


157.

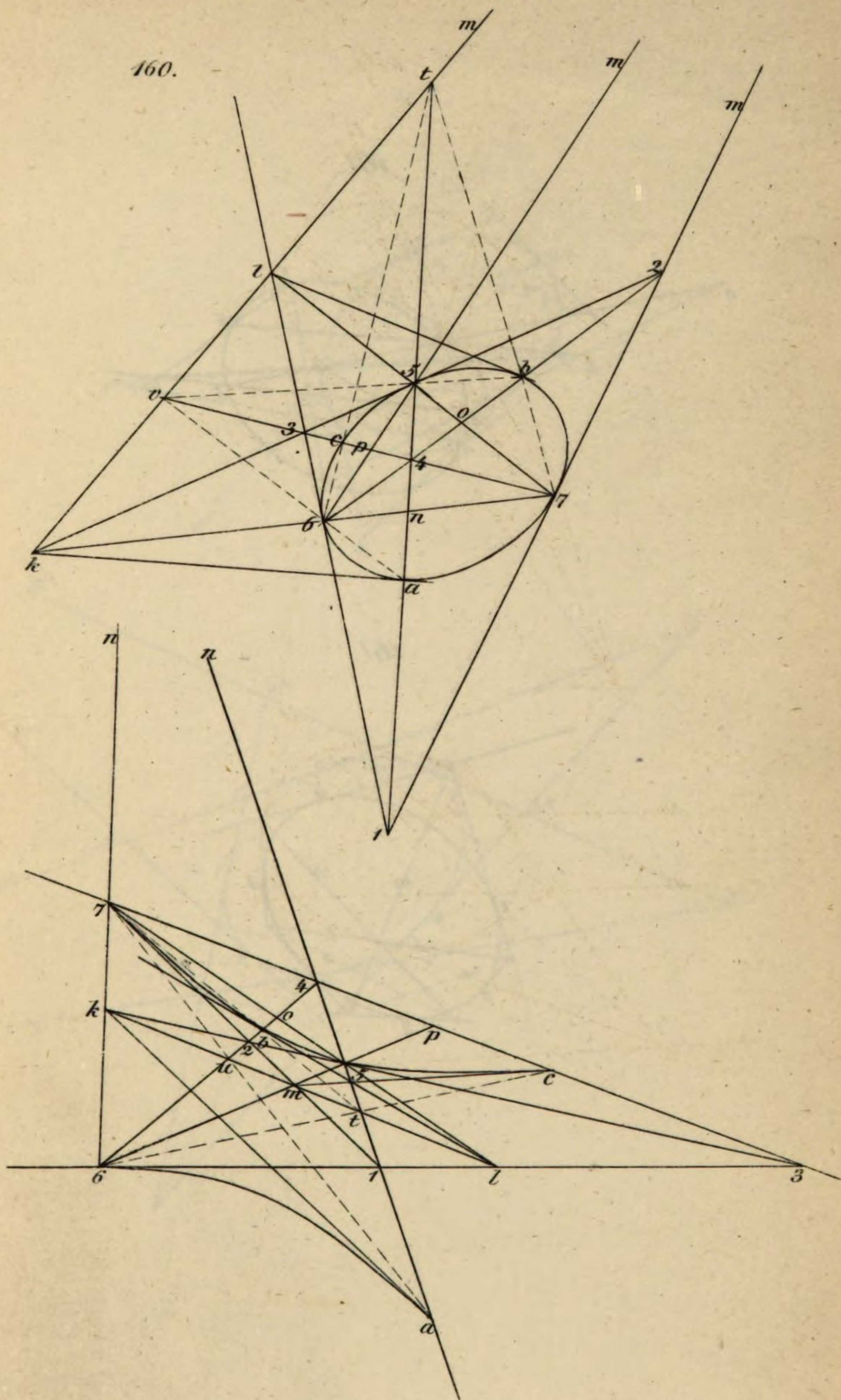


157.II.

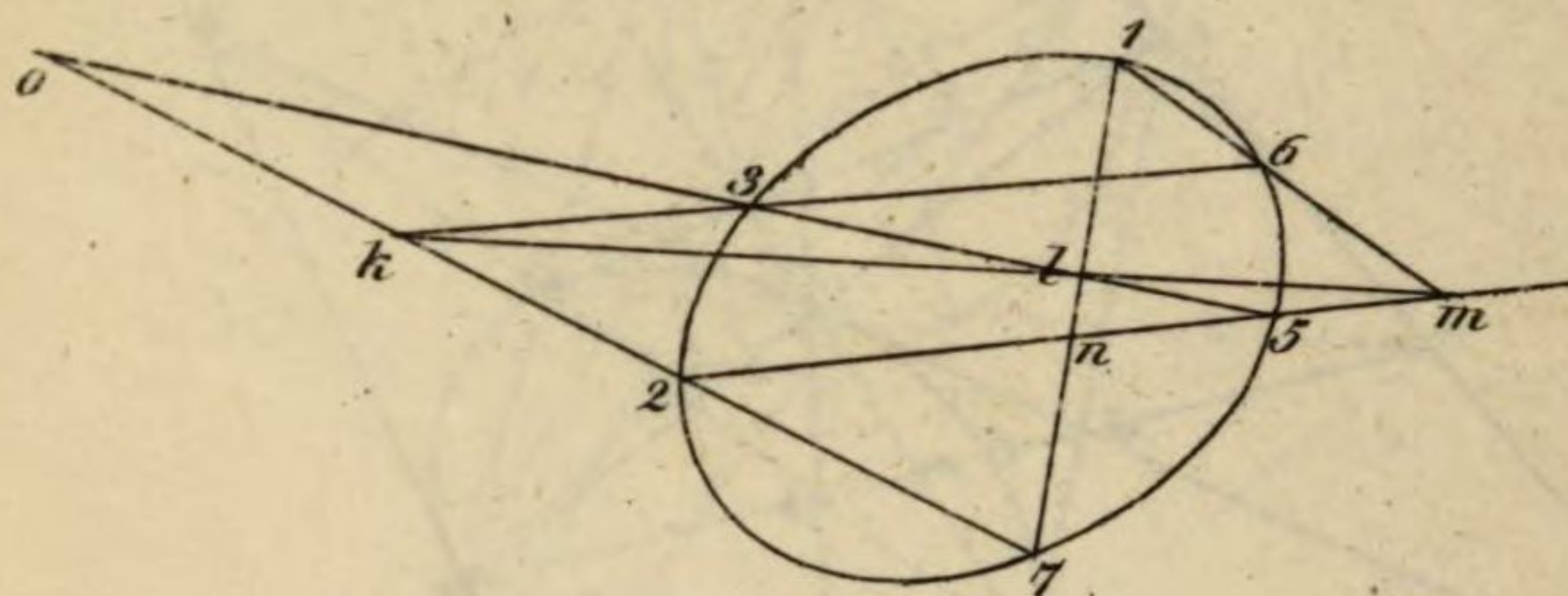




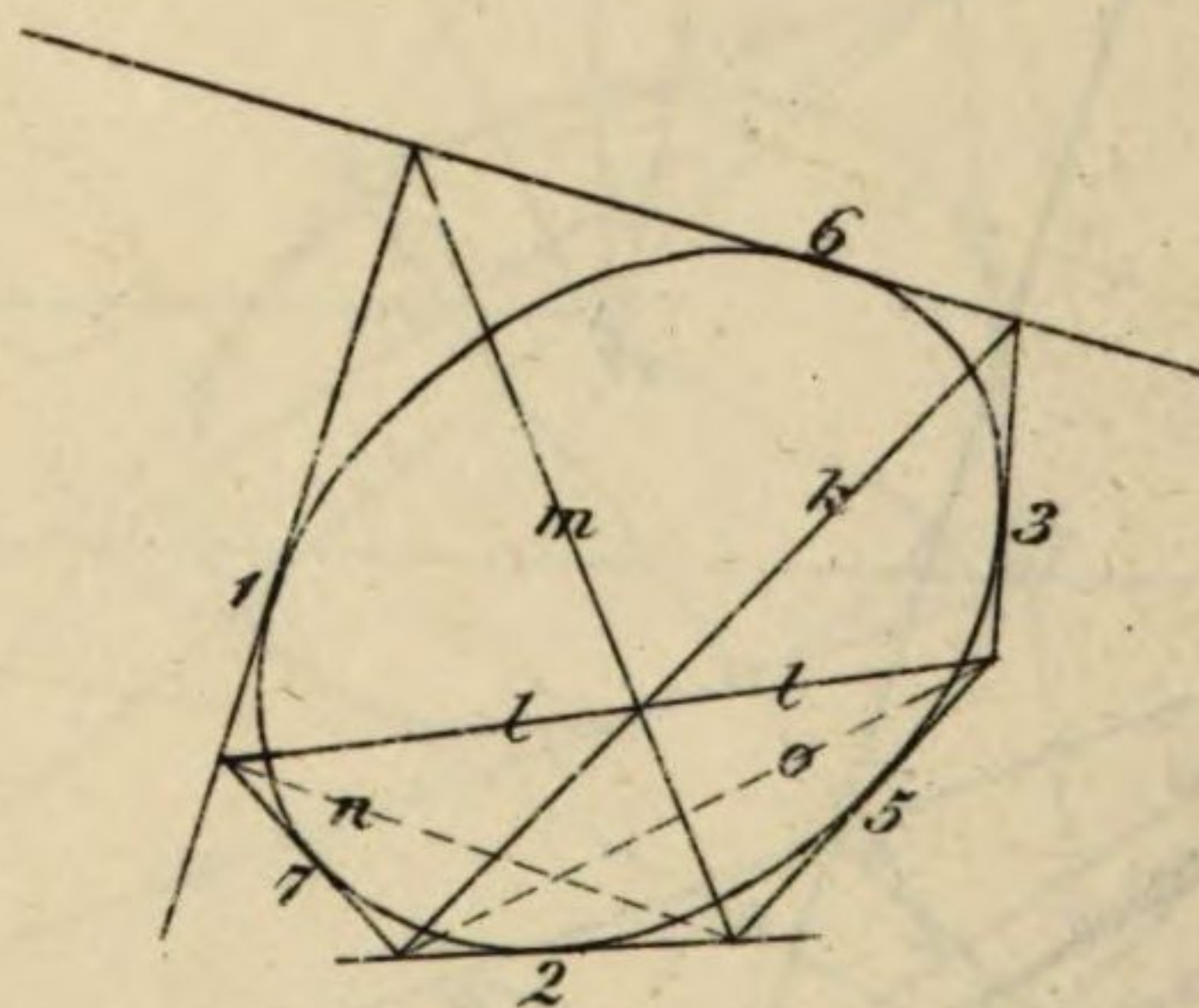
160.



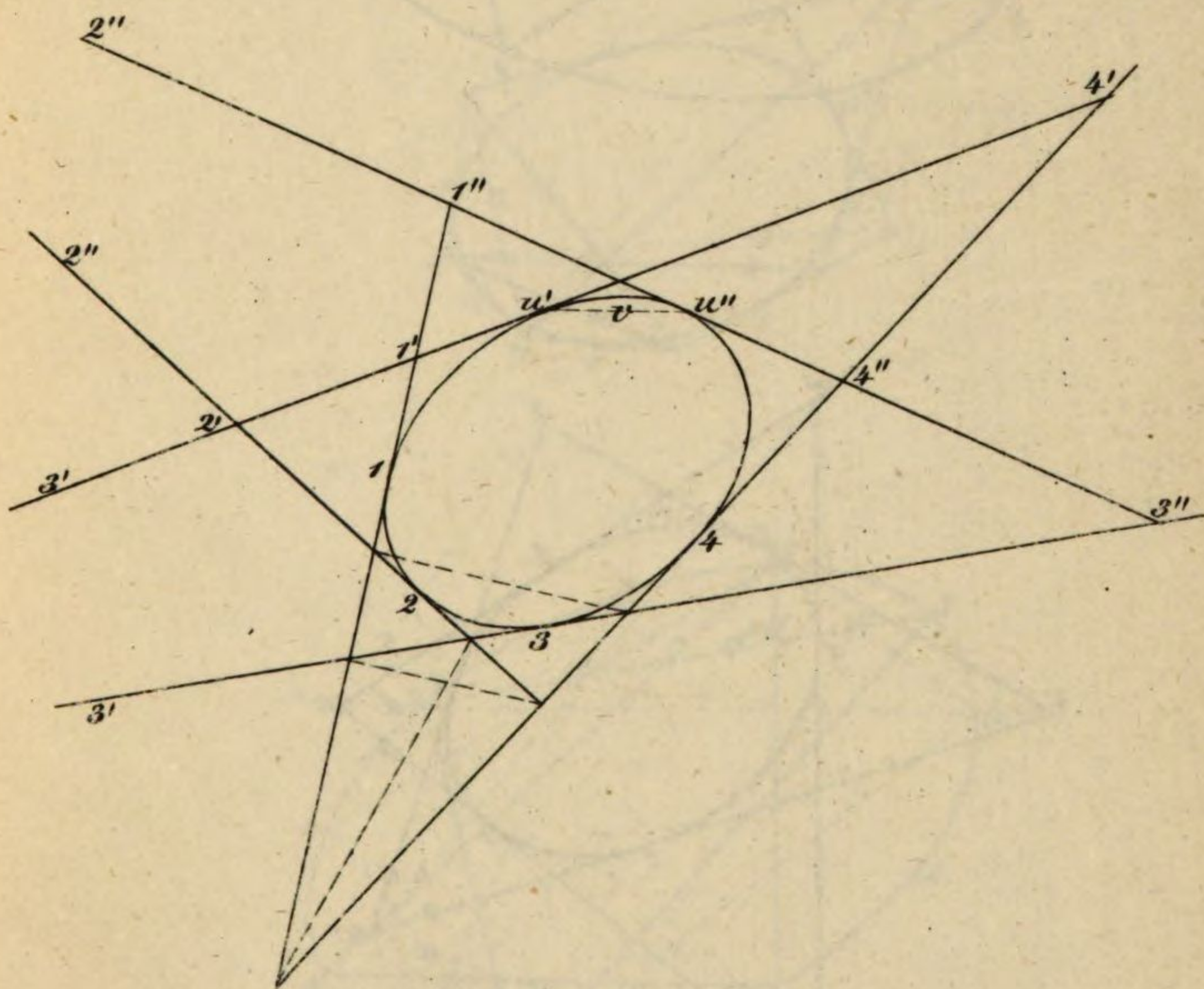
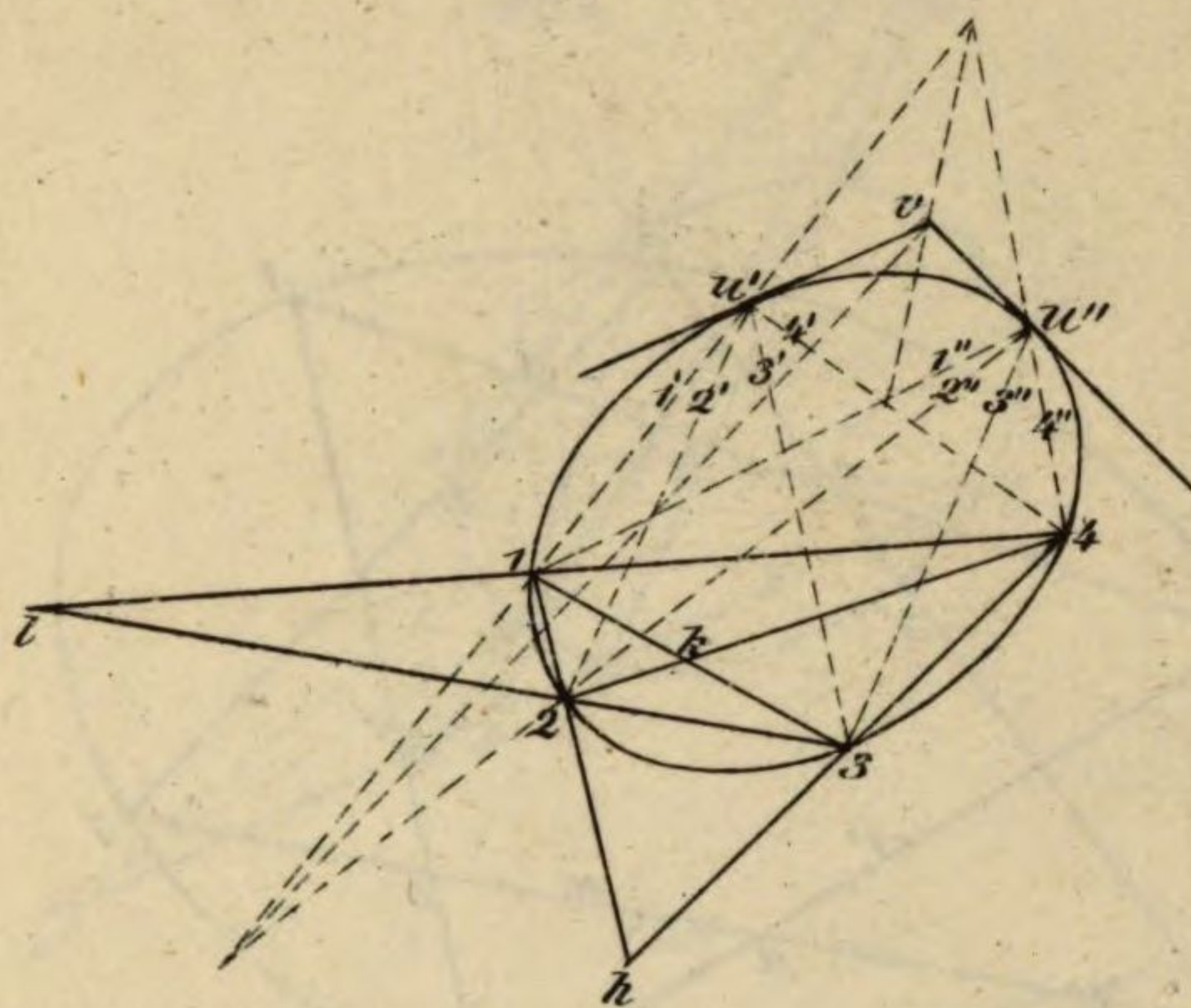
161.



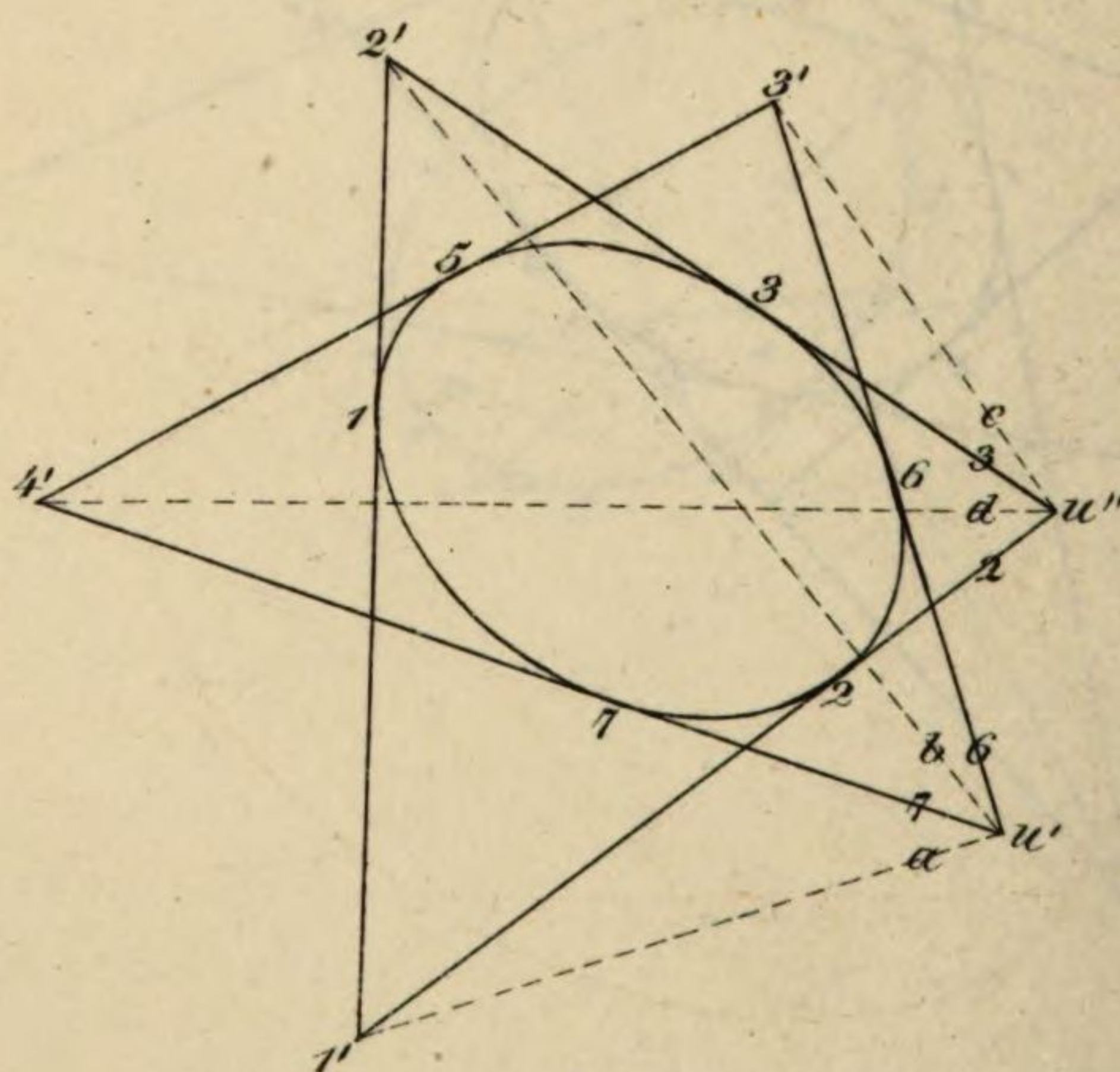
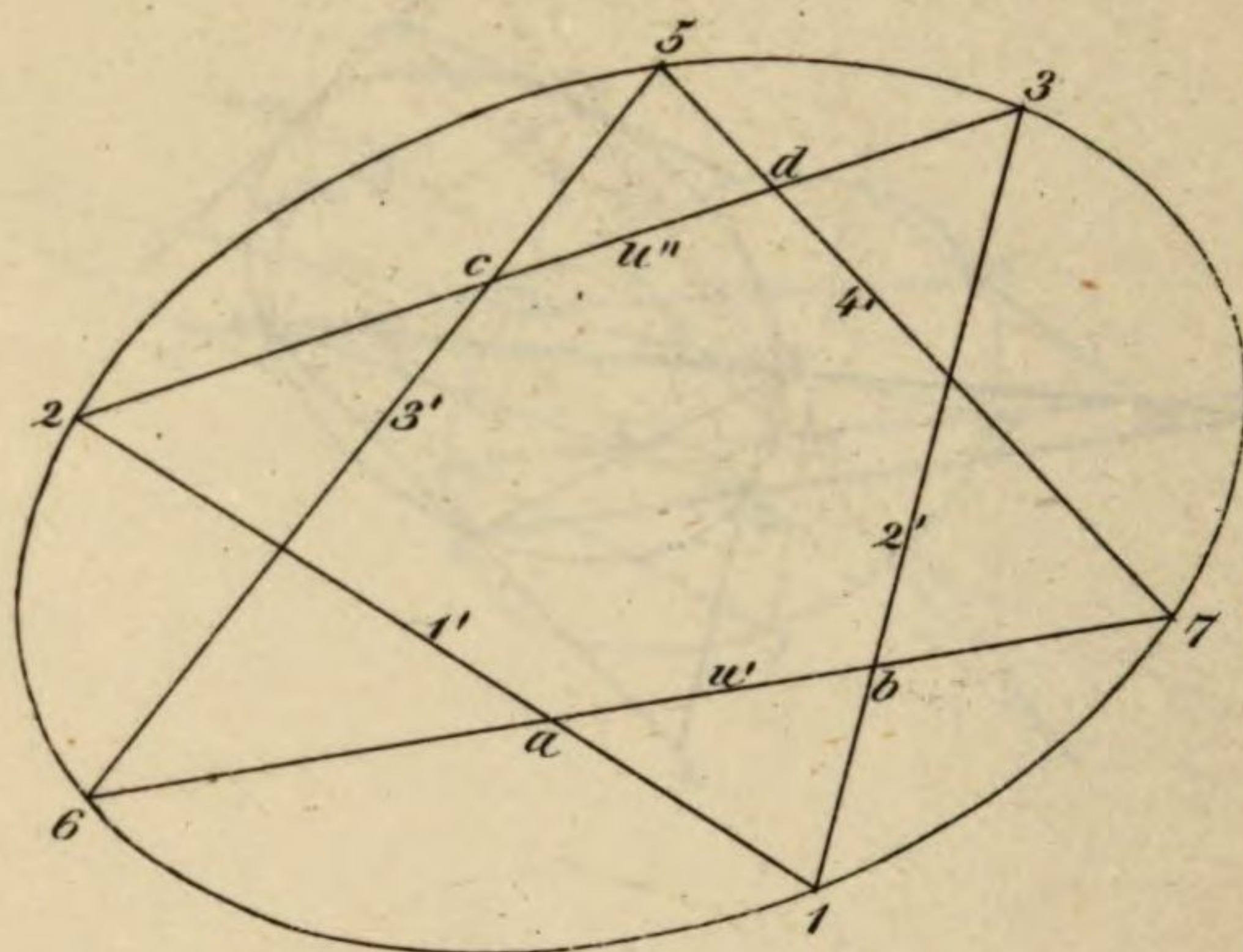
161.



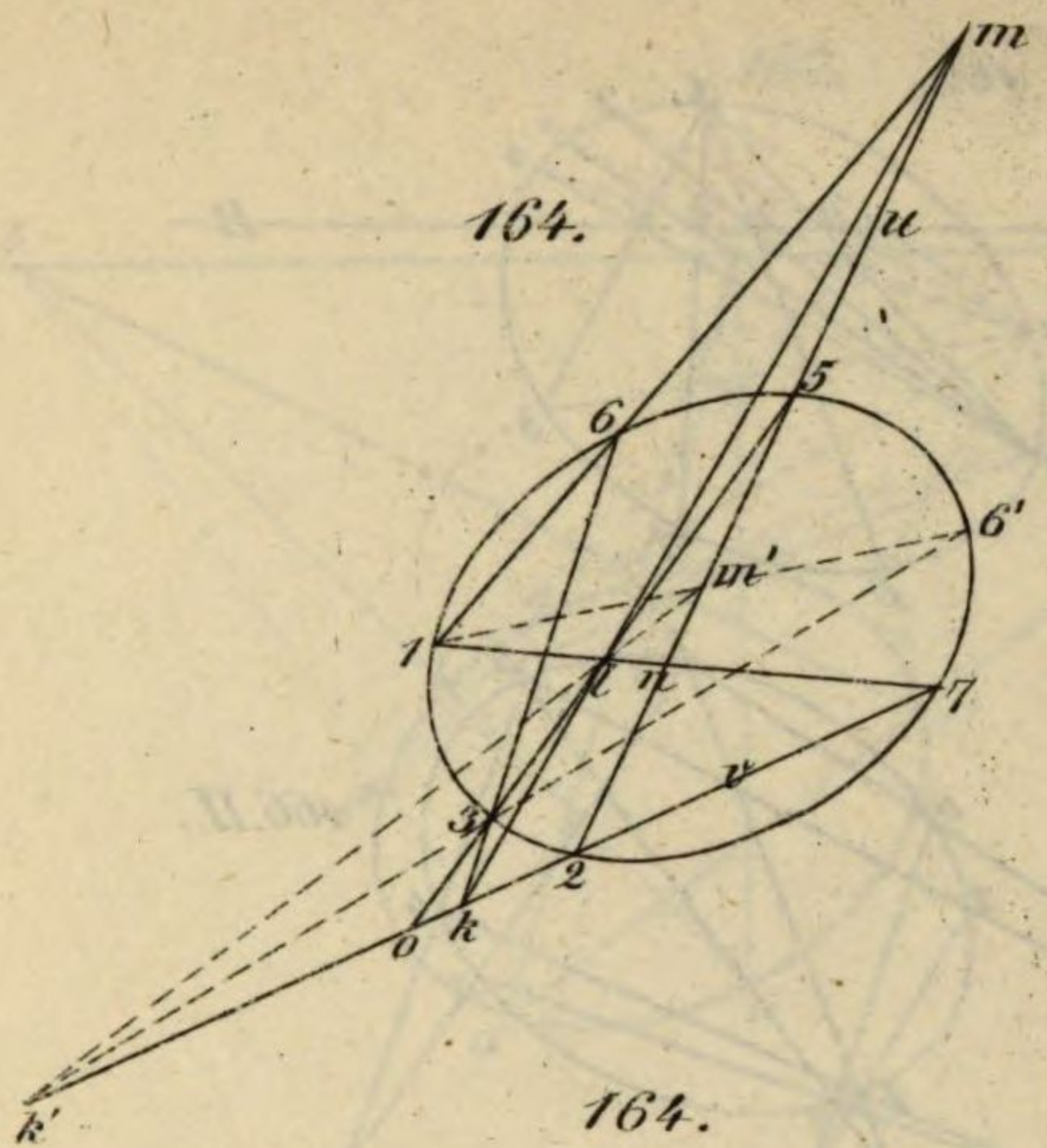
162.



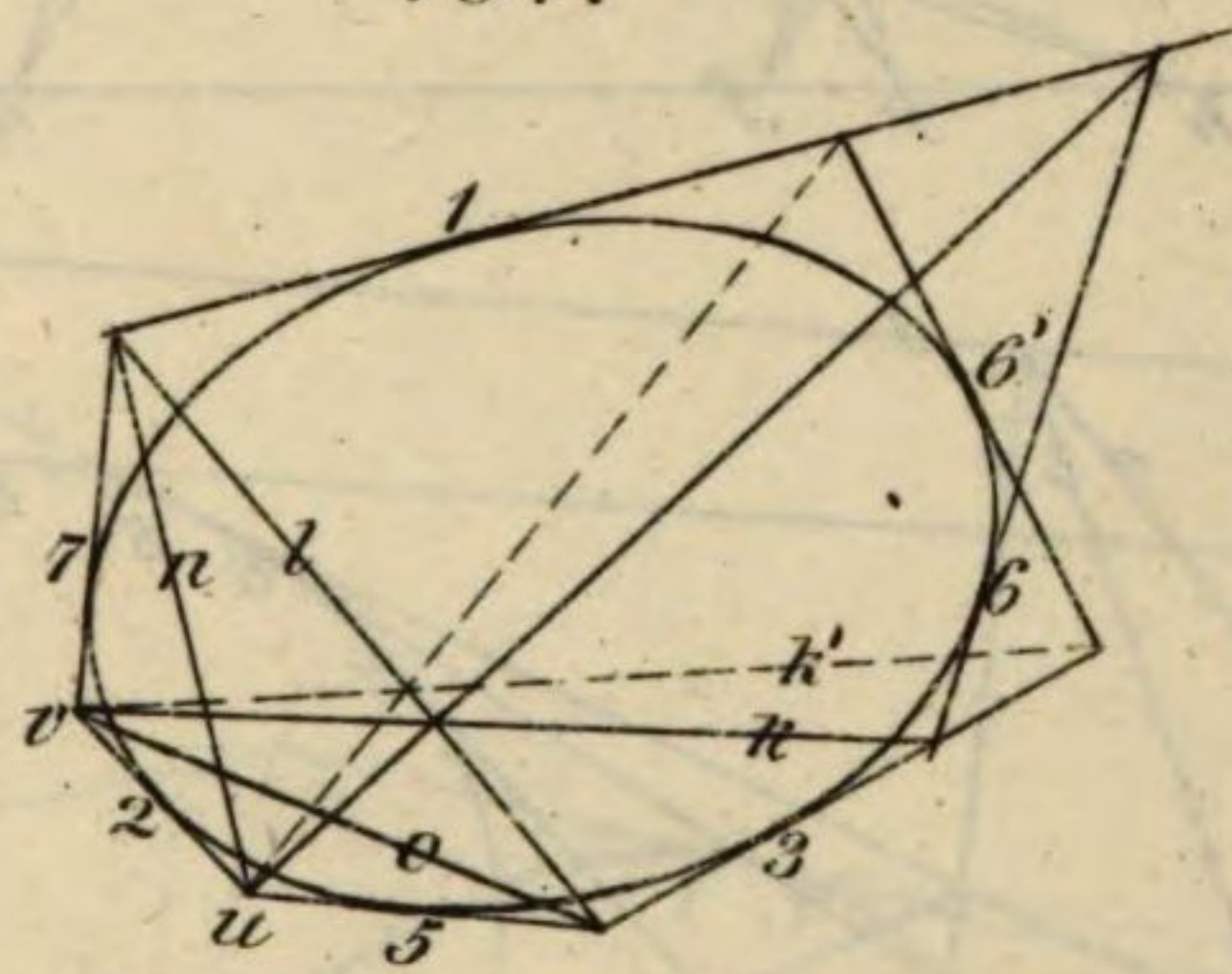
163.



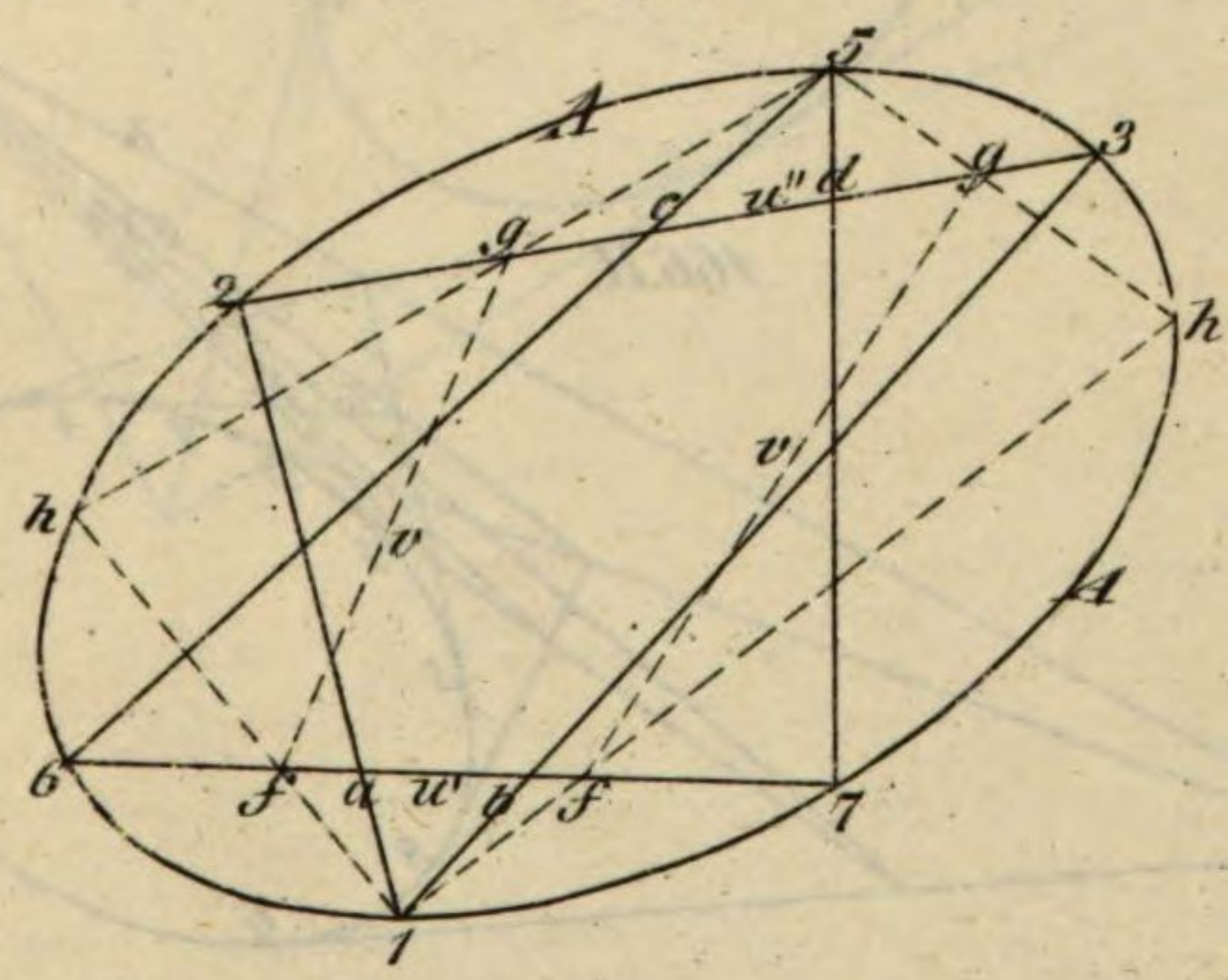
164.



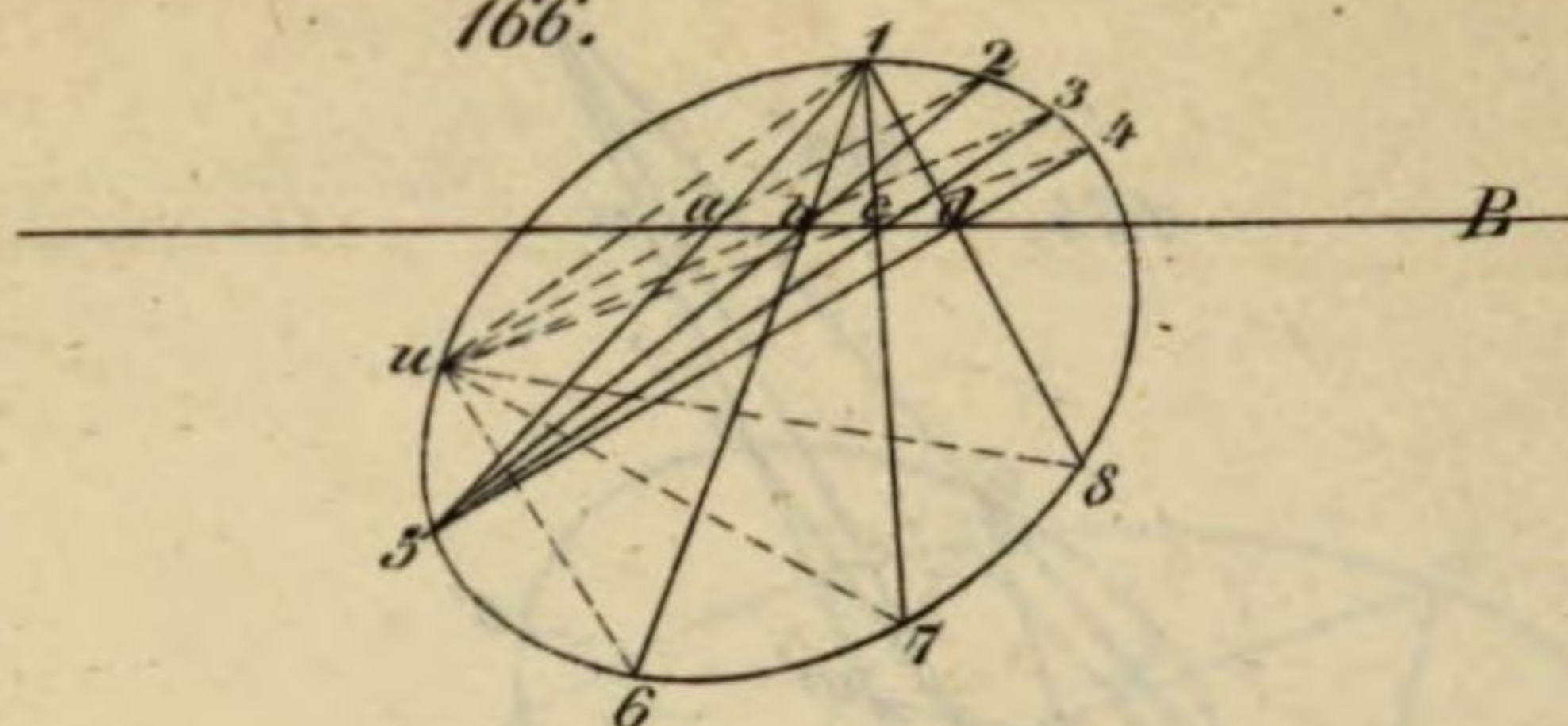
164.



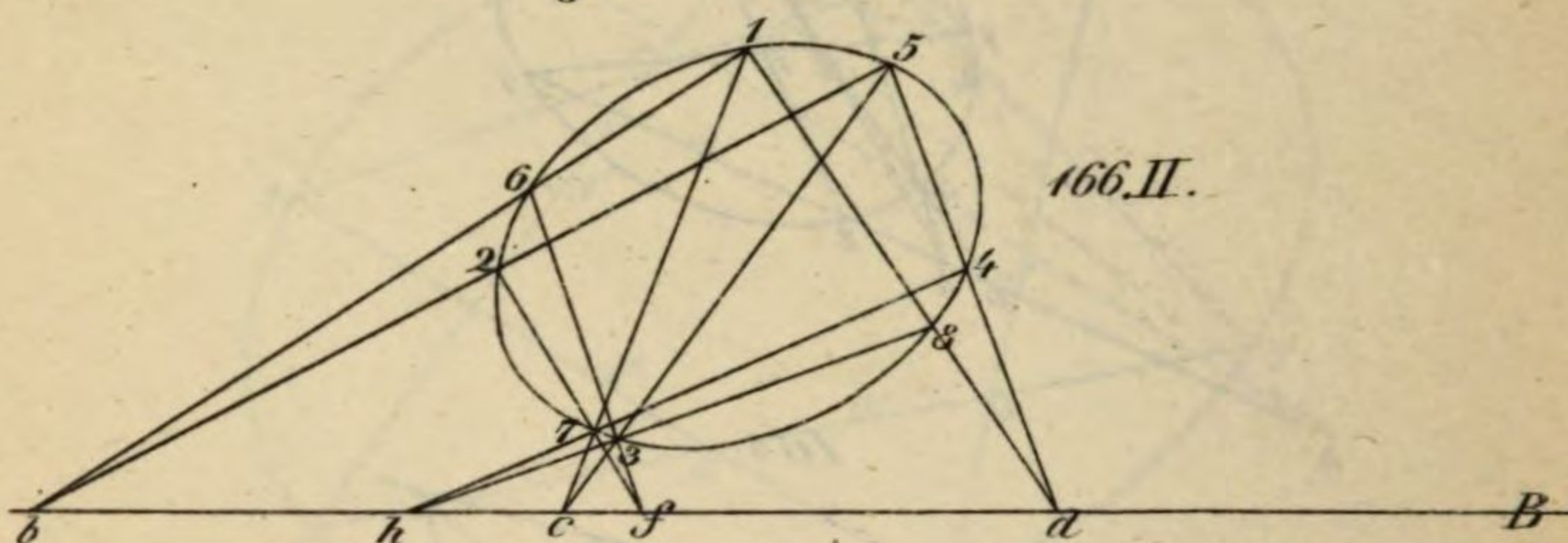
165.



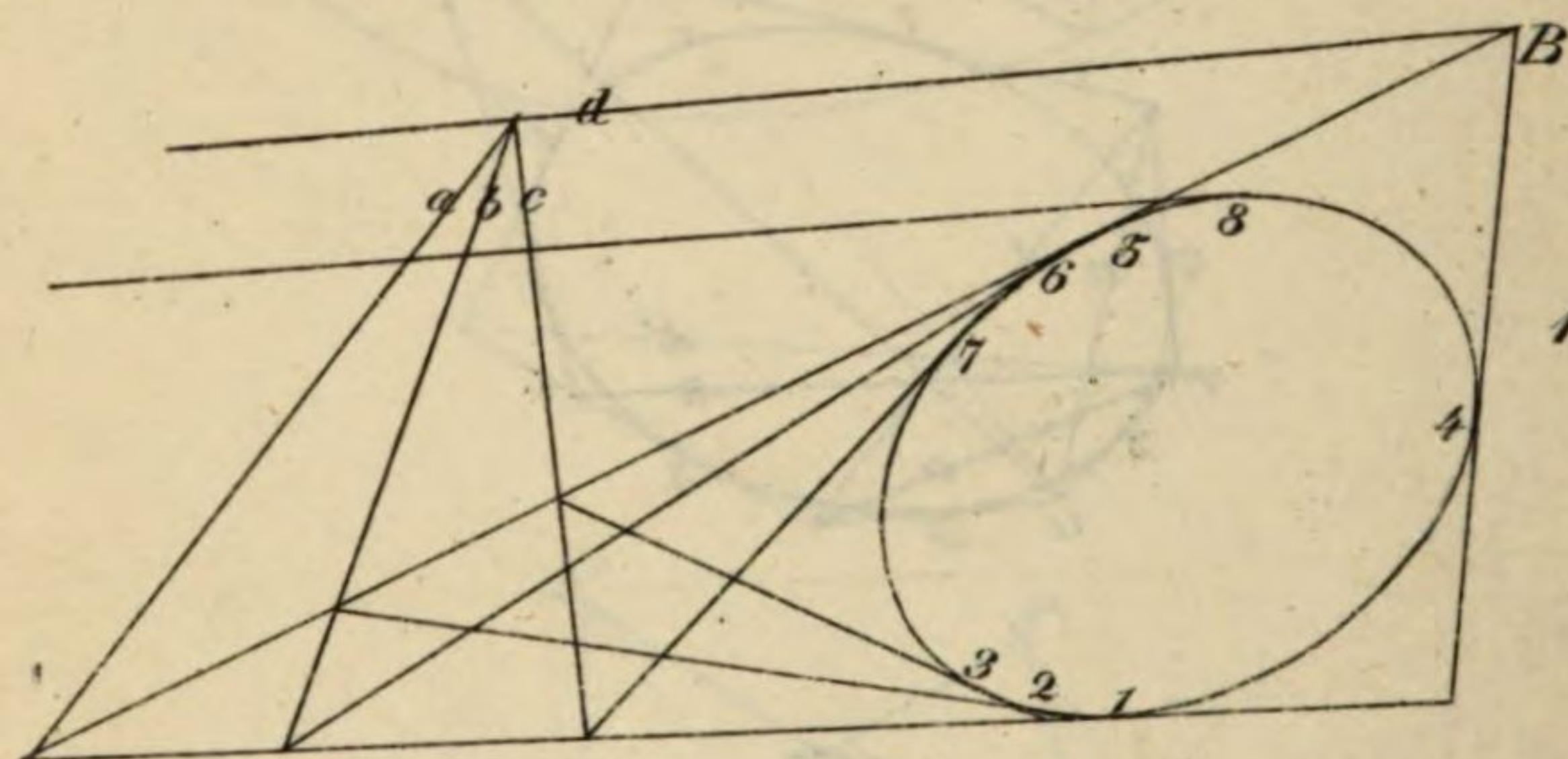
166.



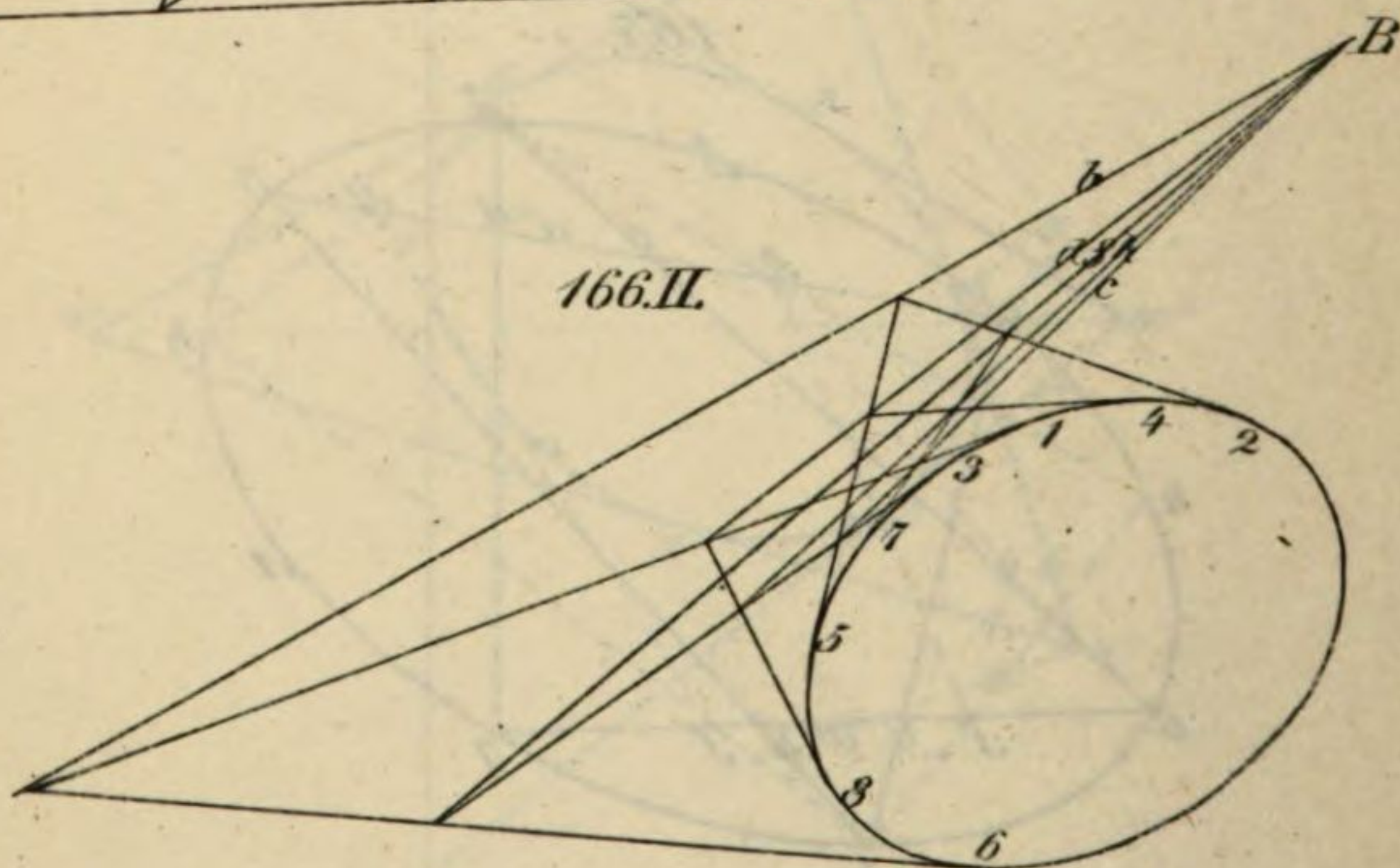
166.II.



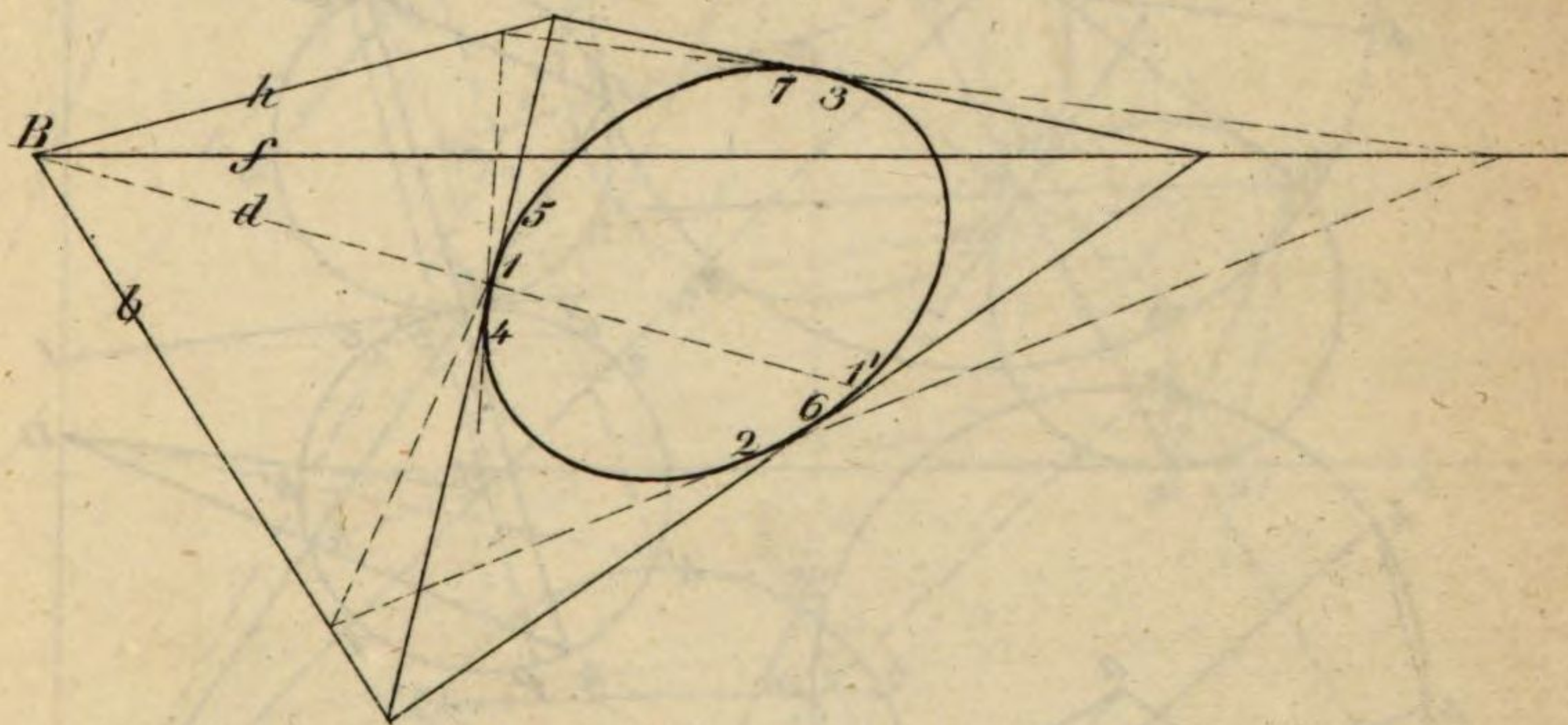
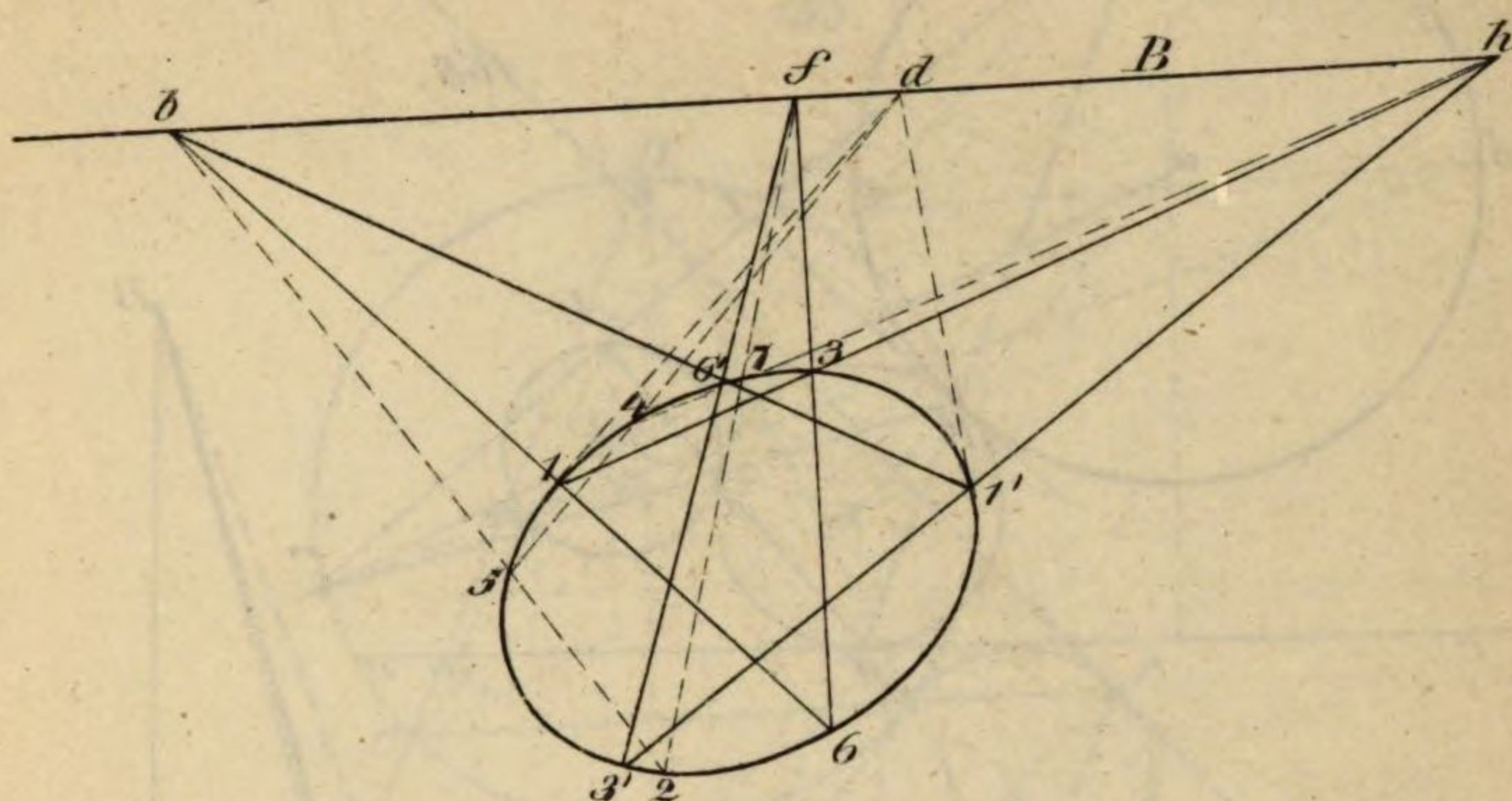
166.

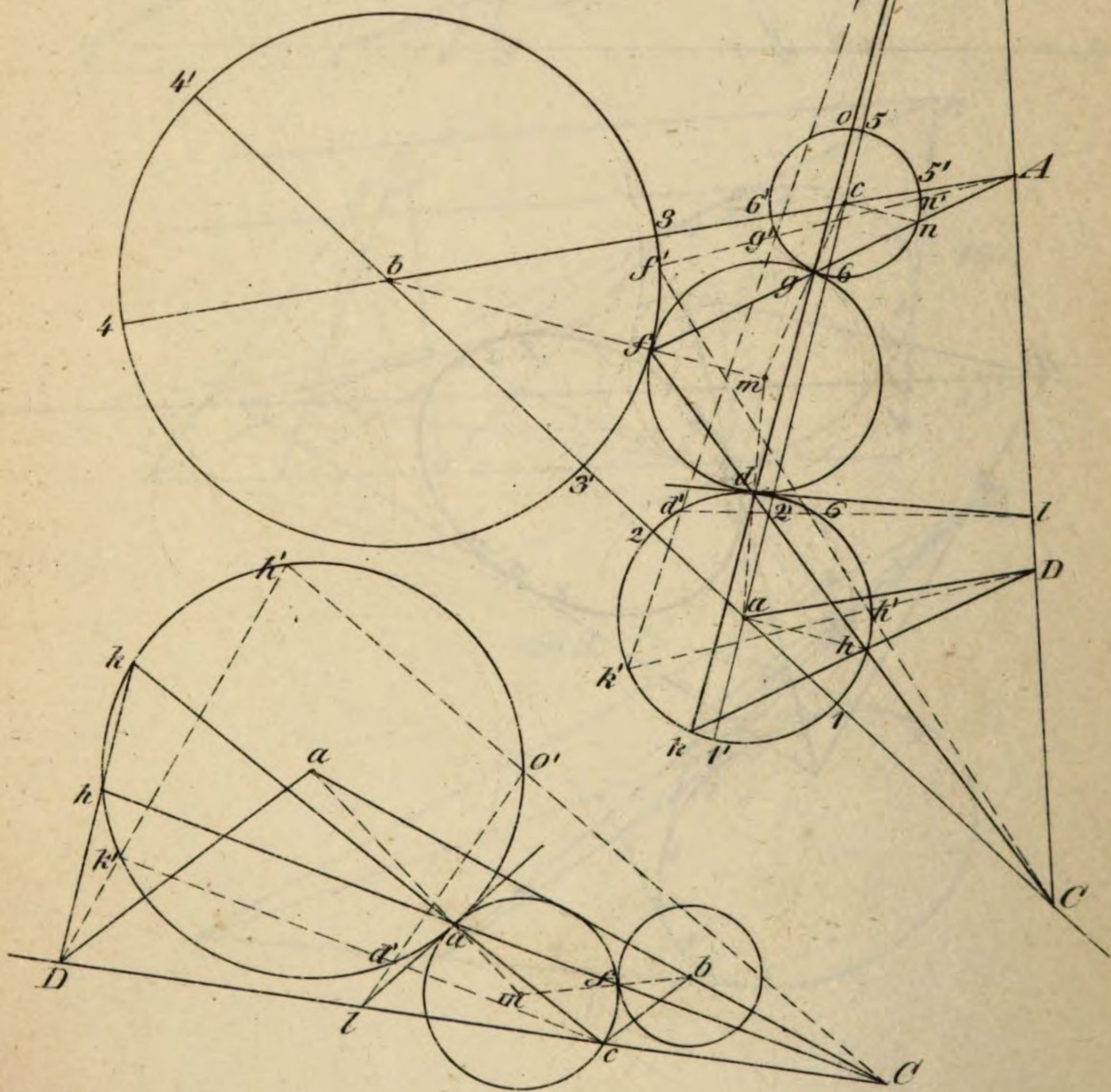
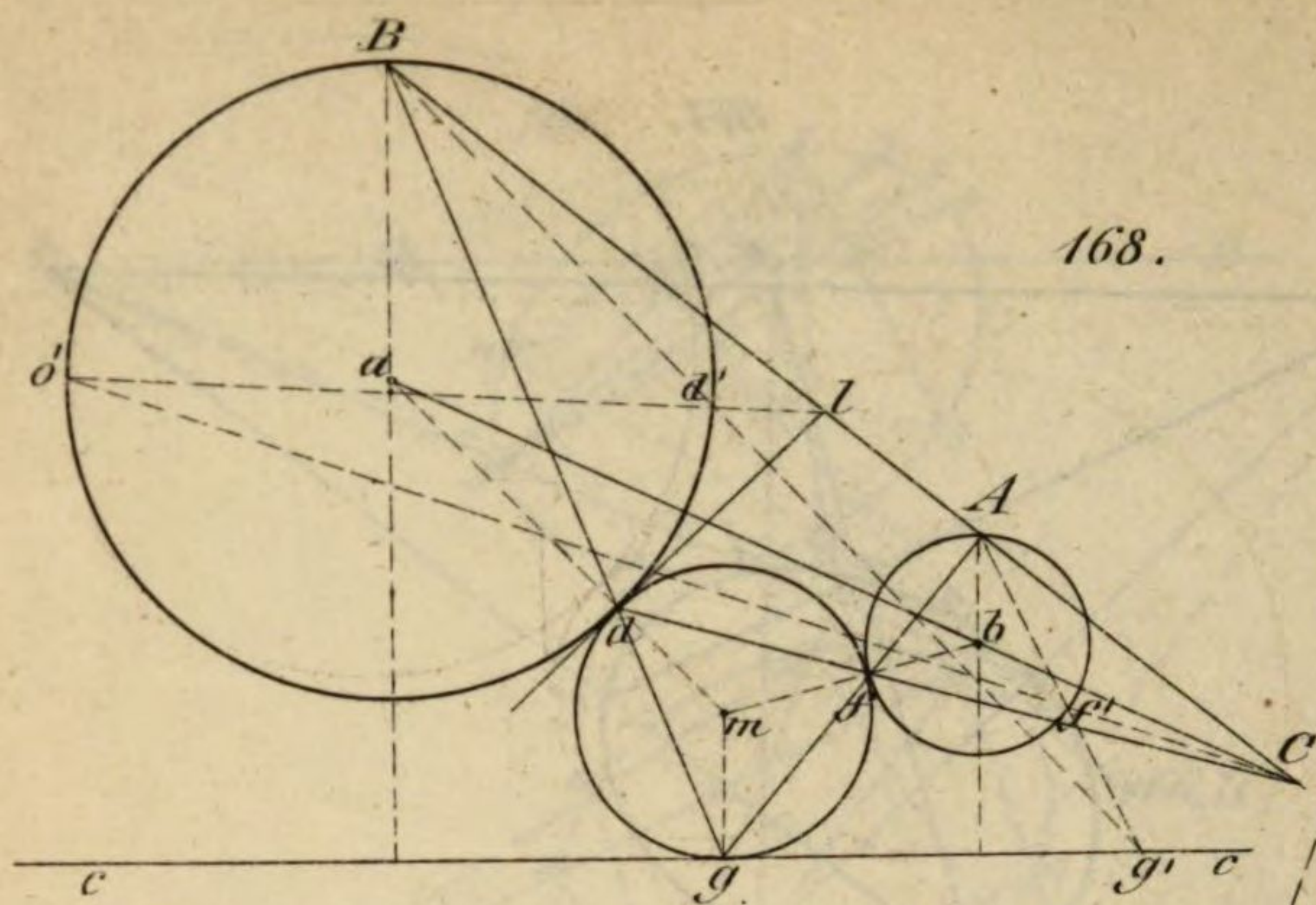


166.II.

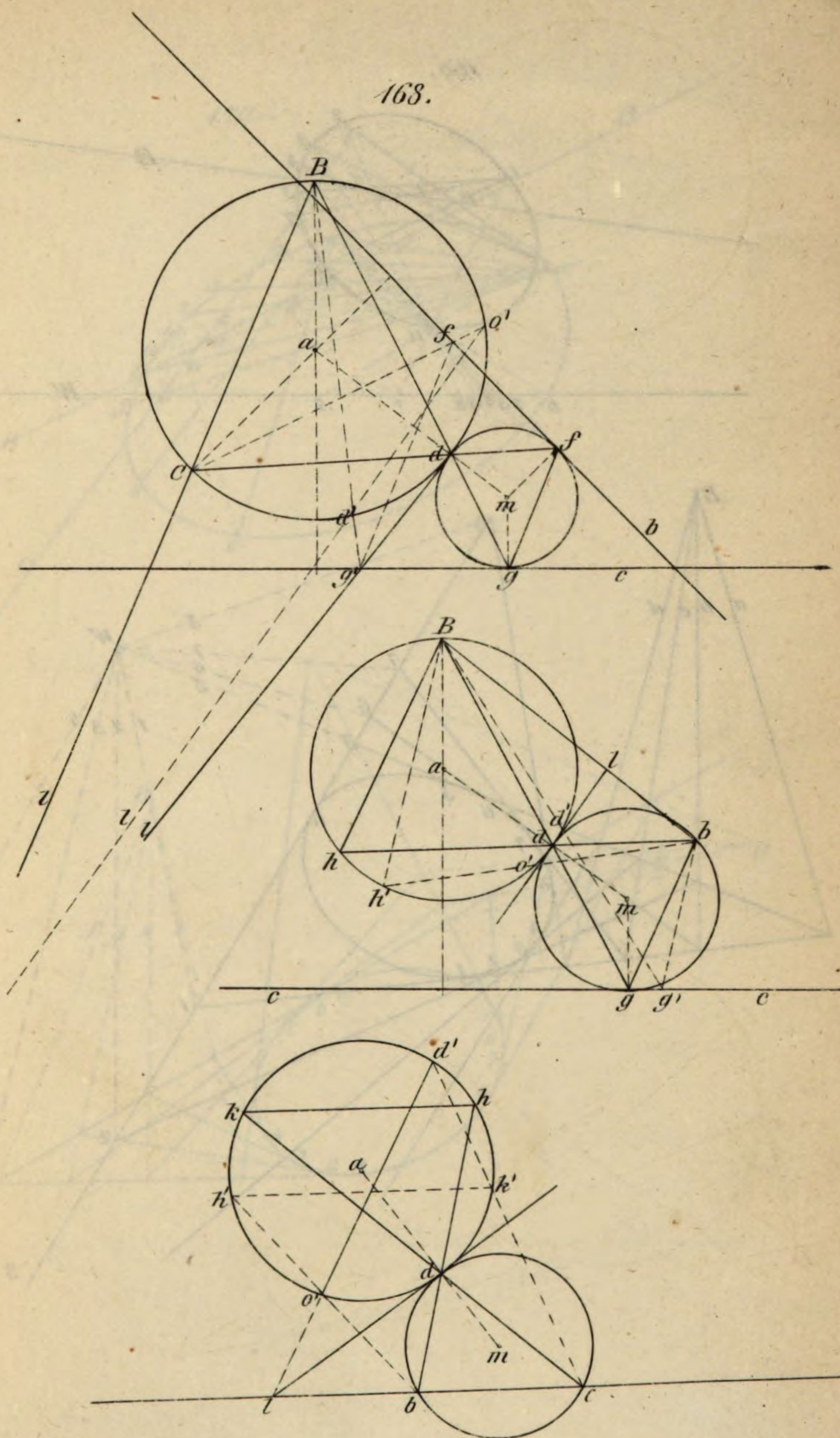


167.

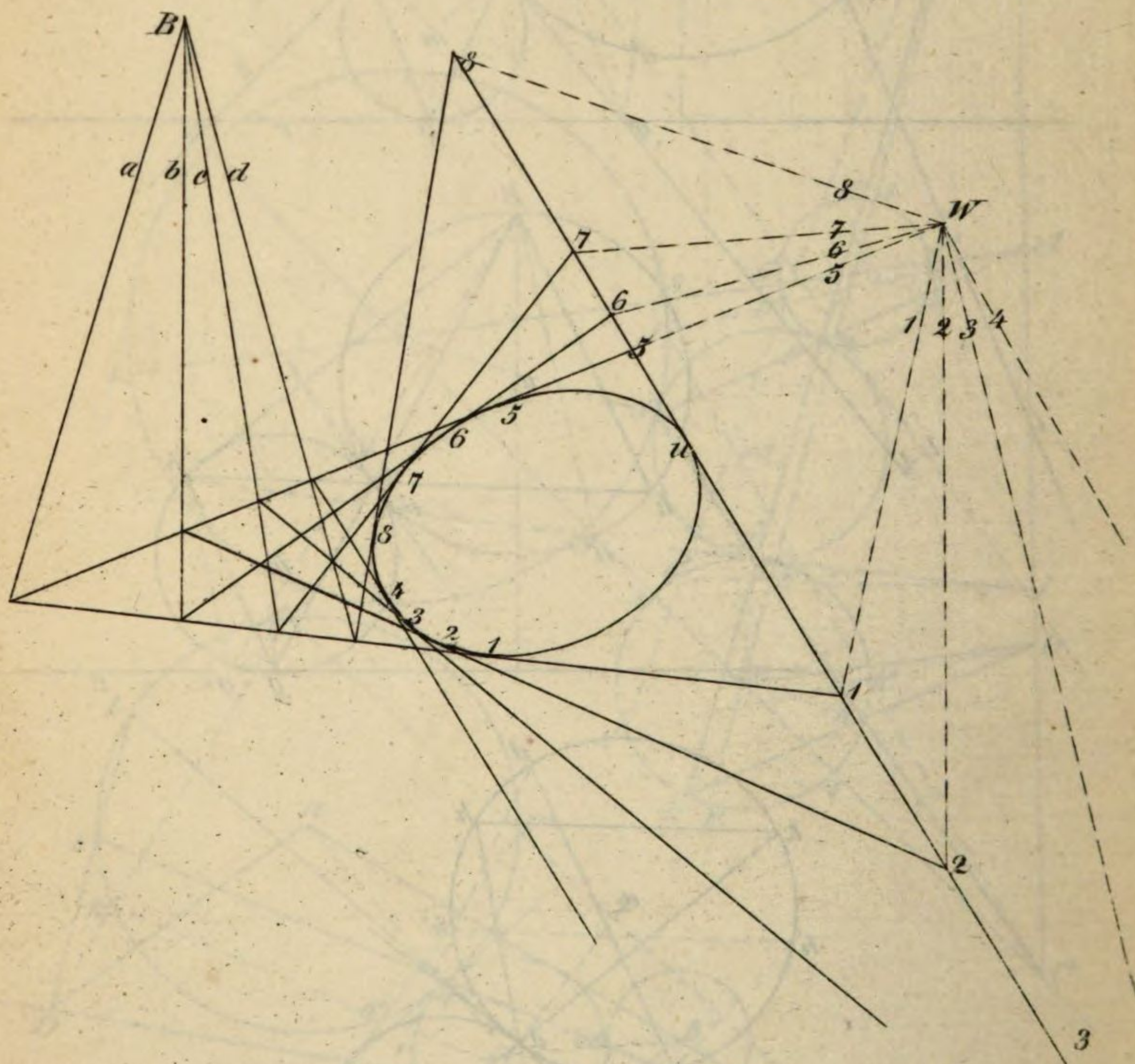
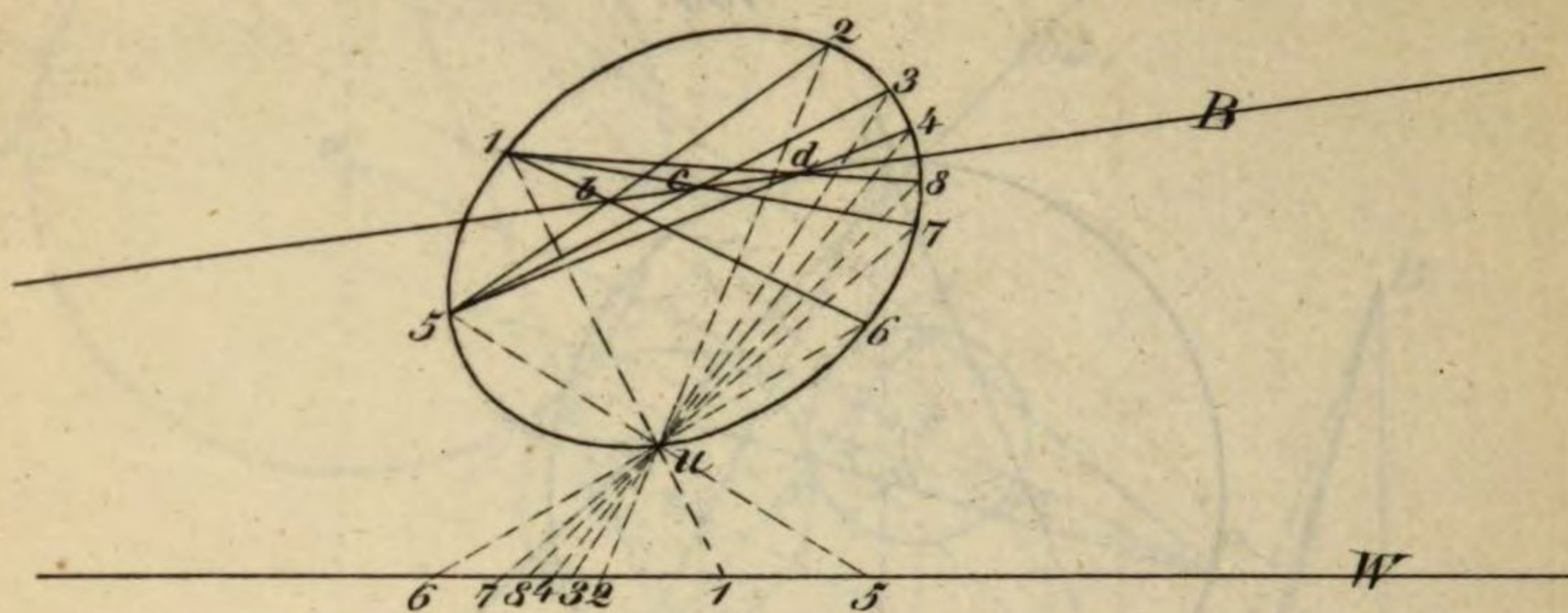




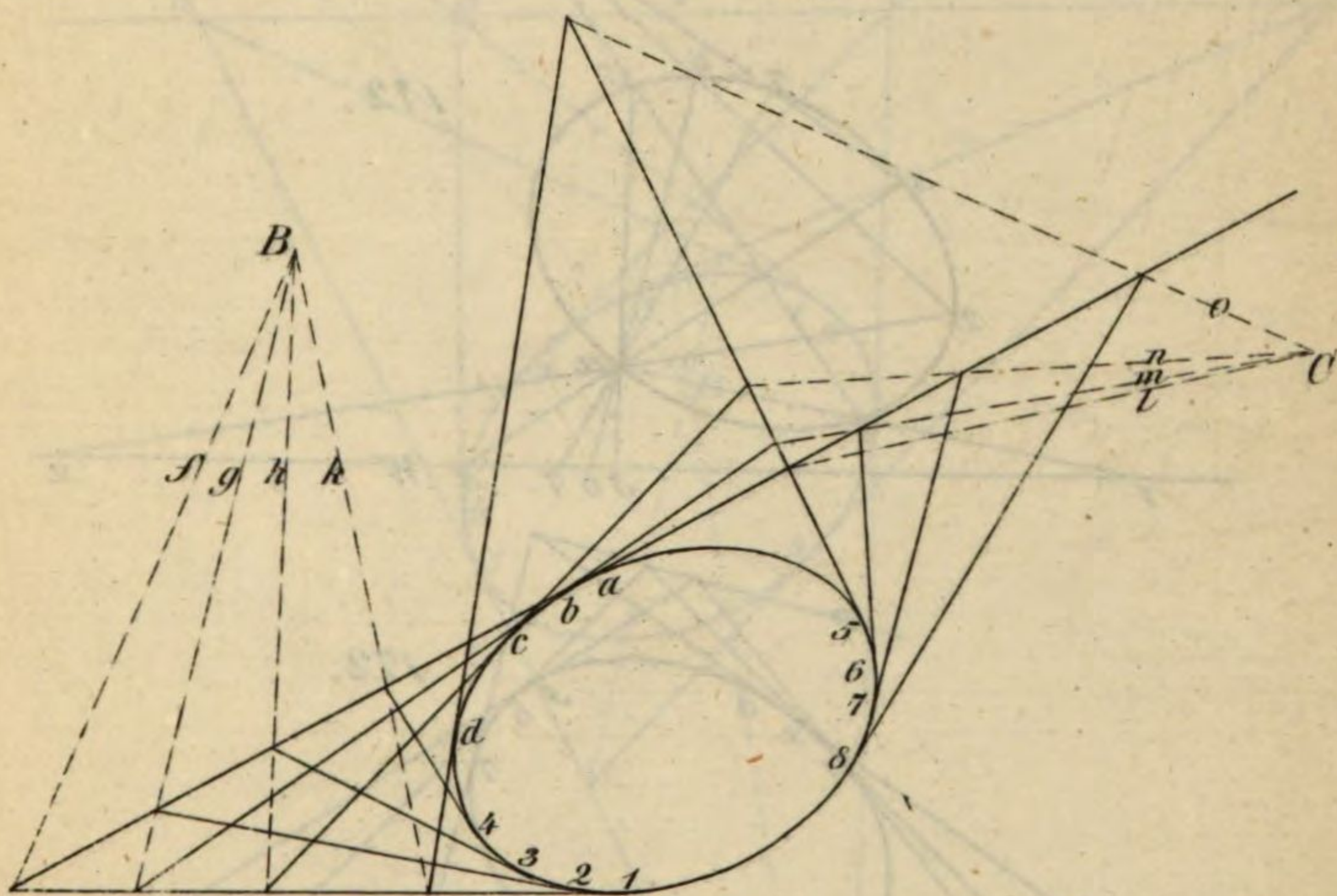
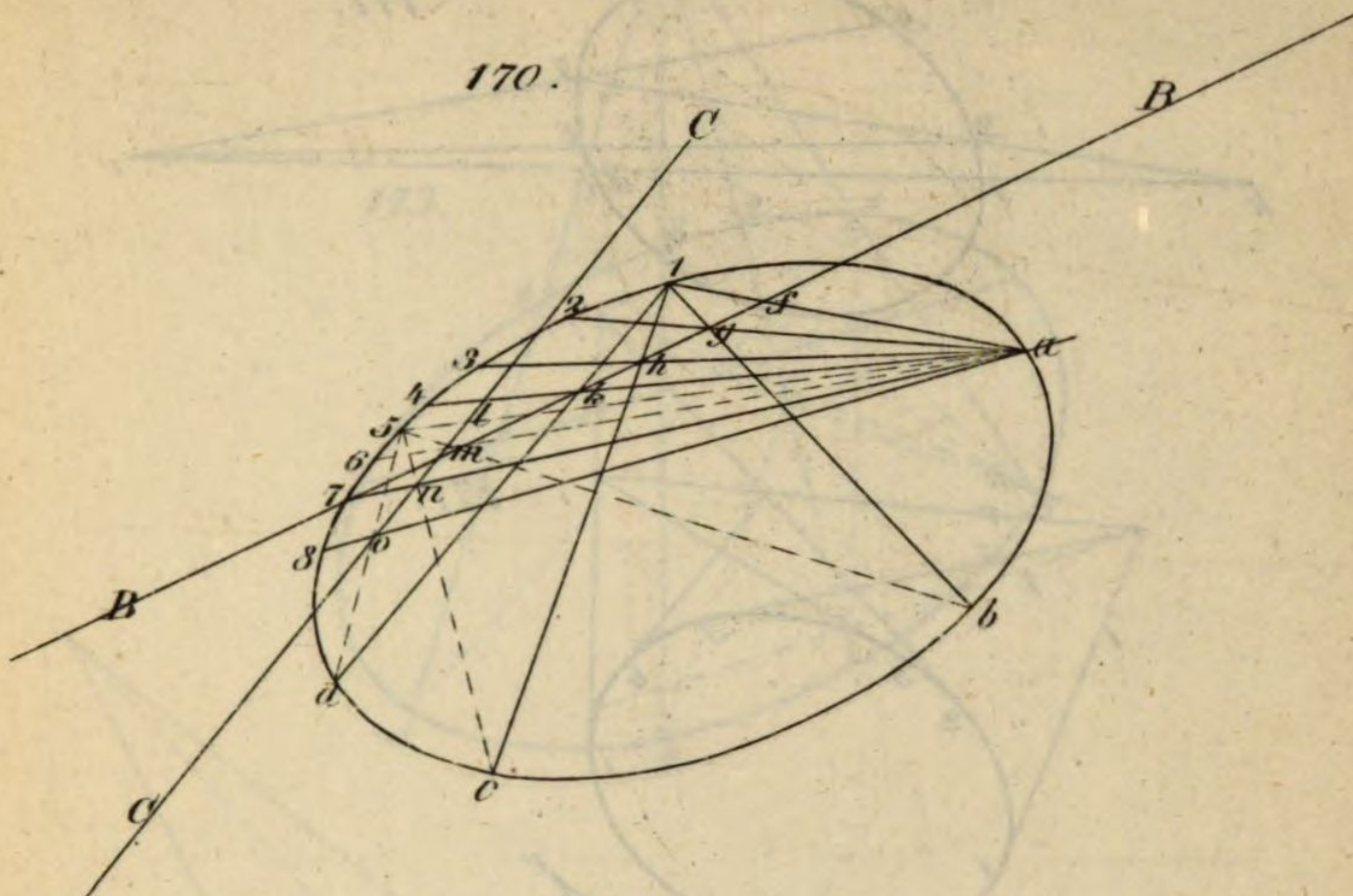
168.

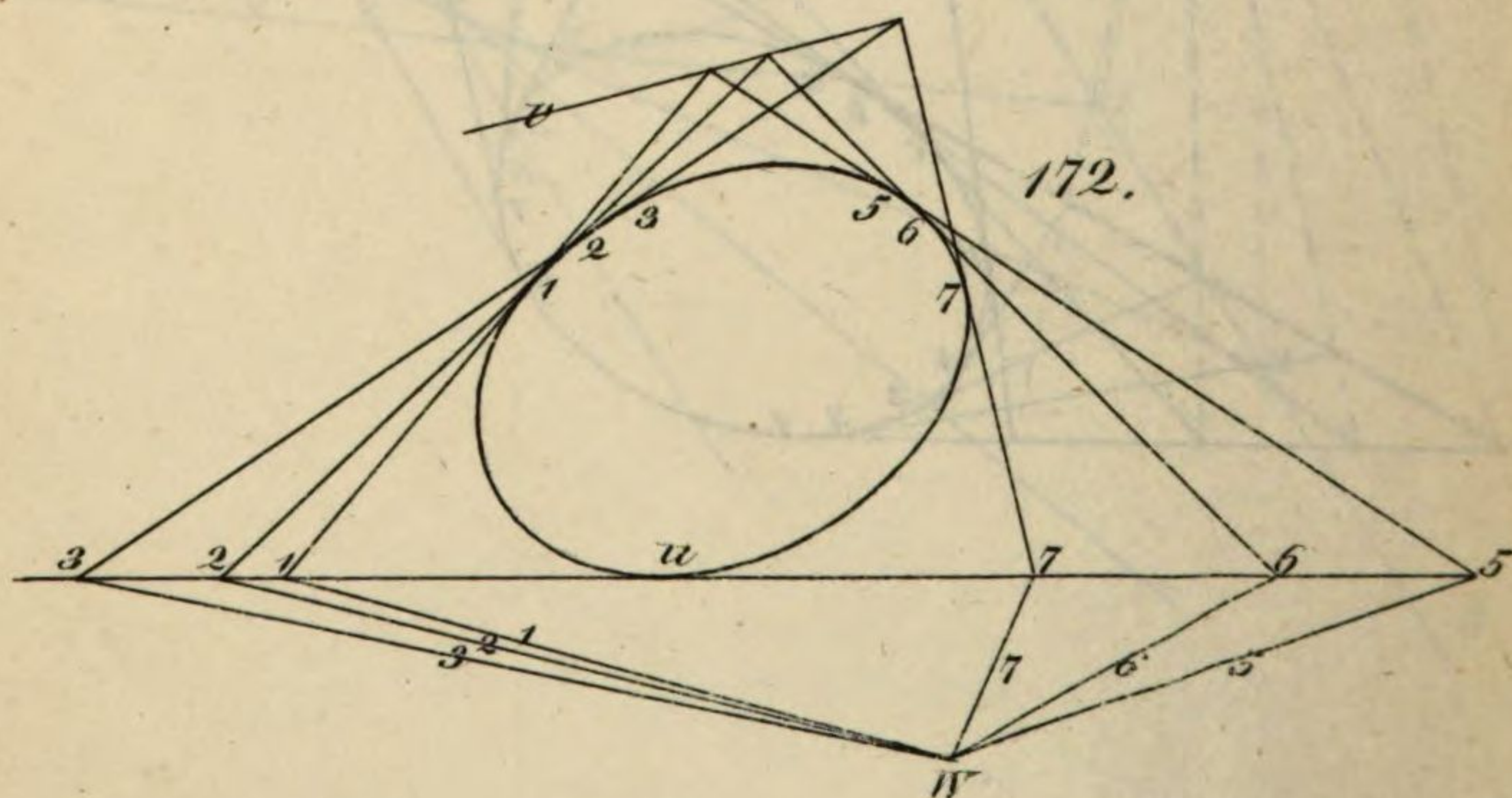
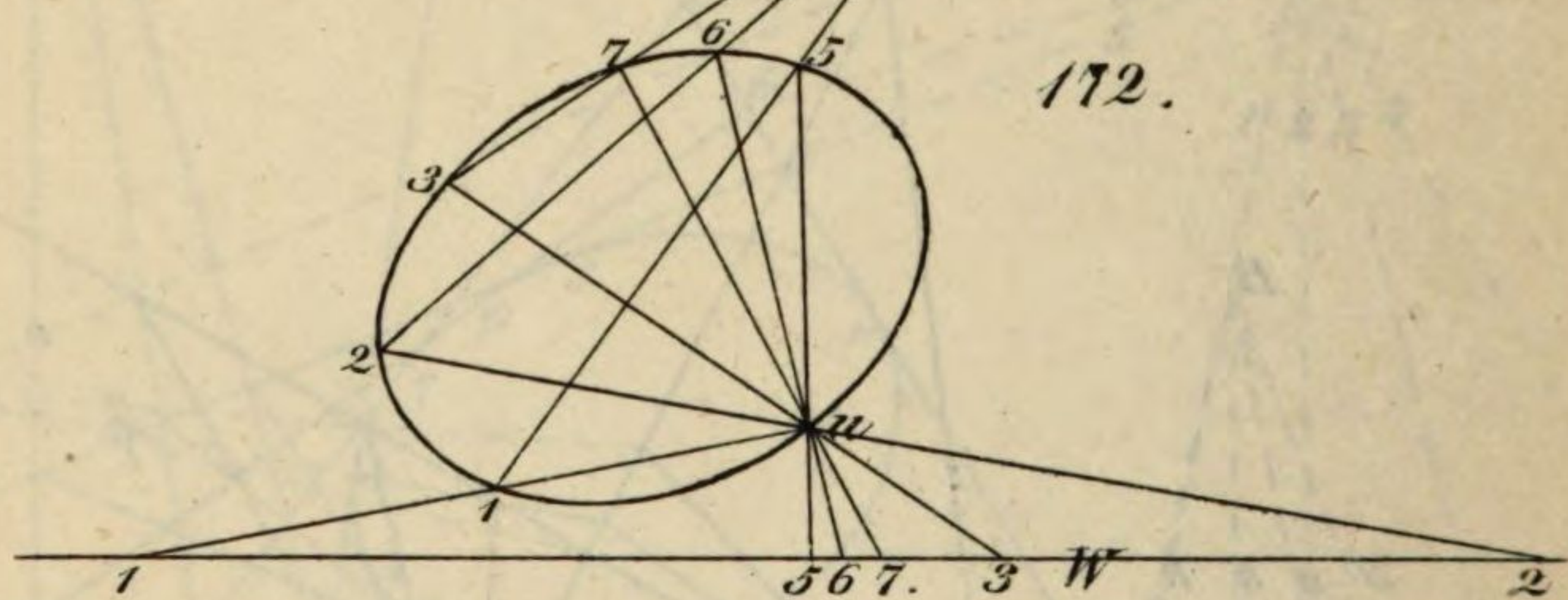
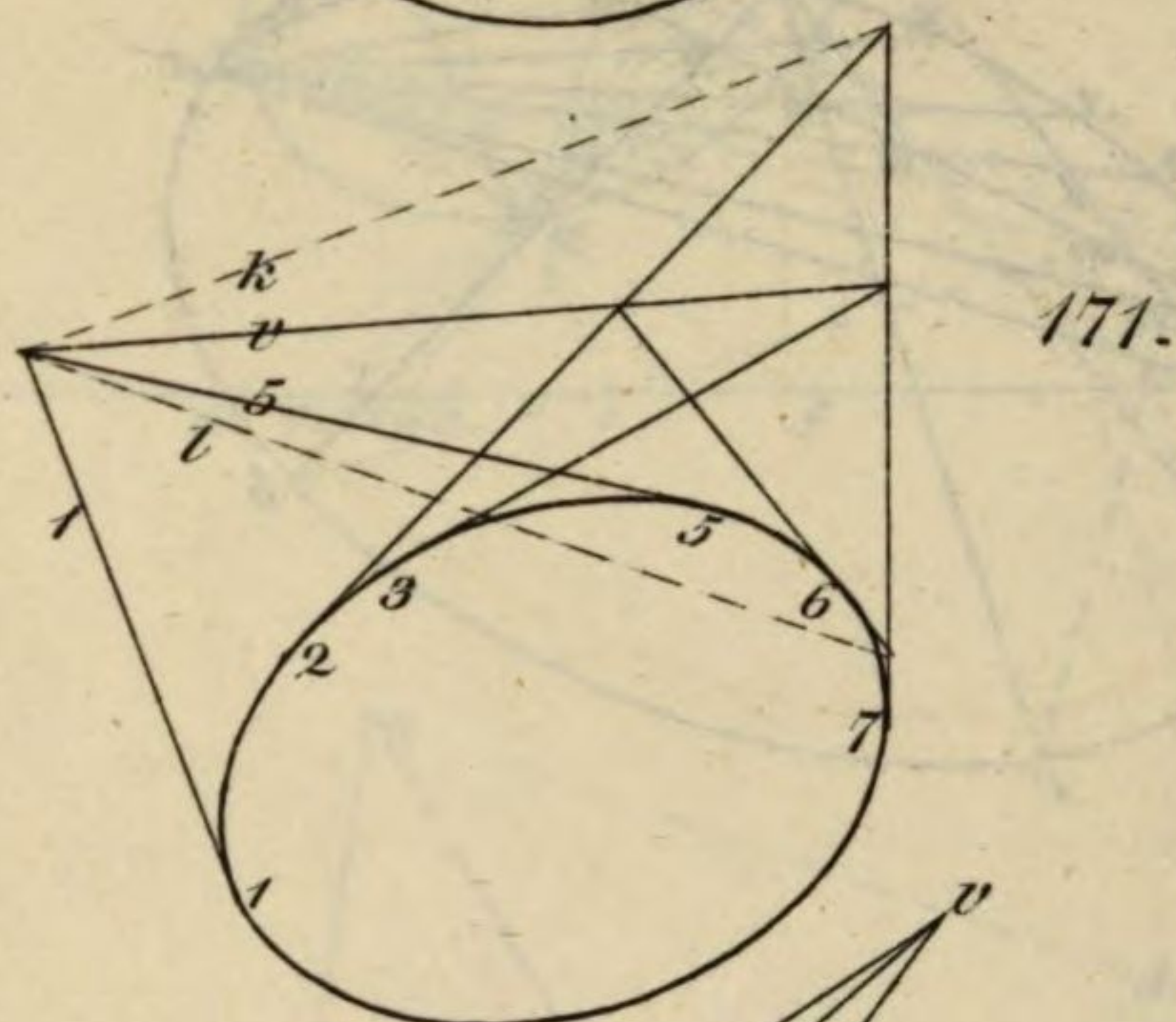
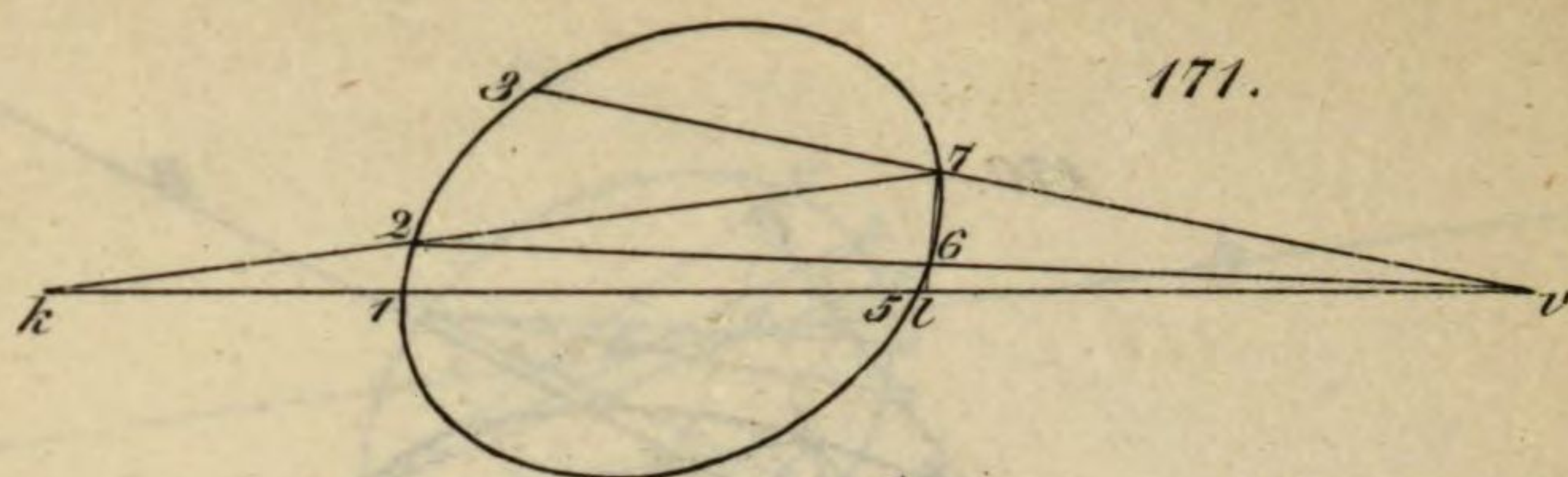


169.

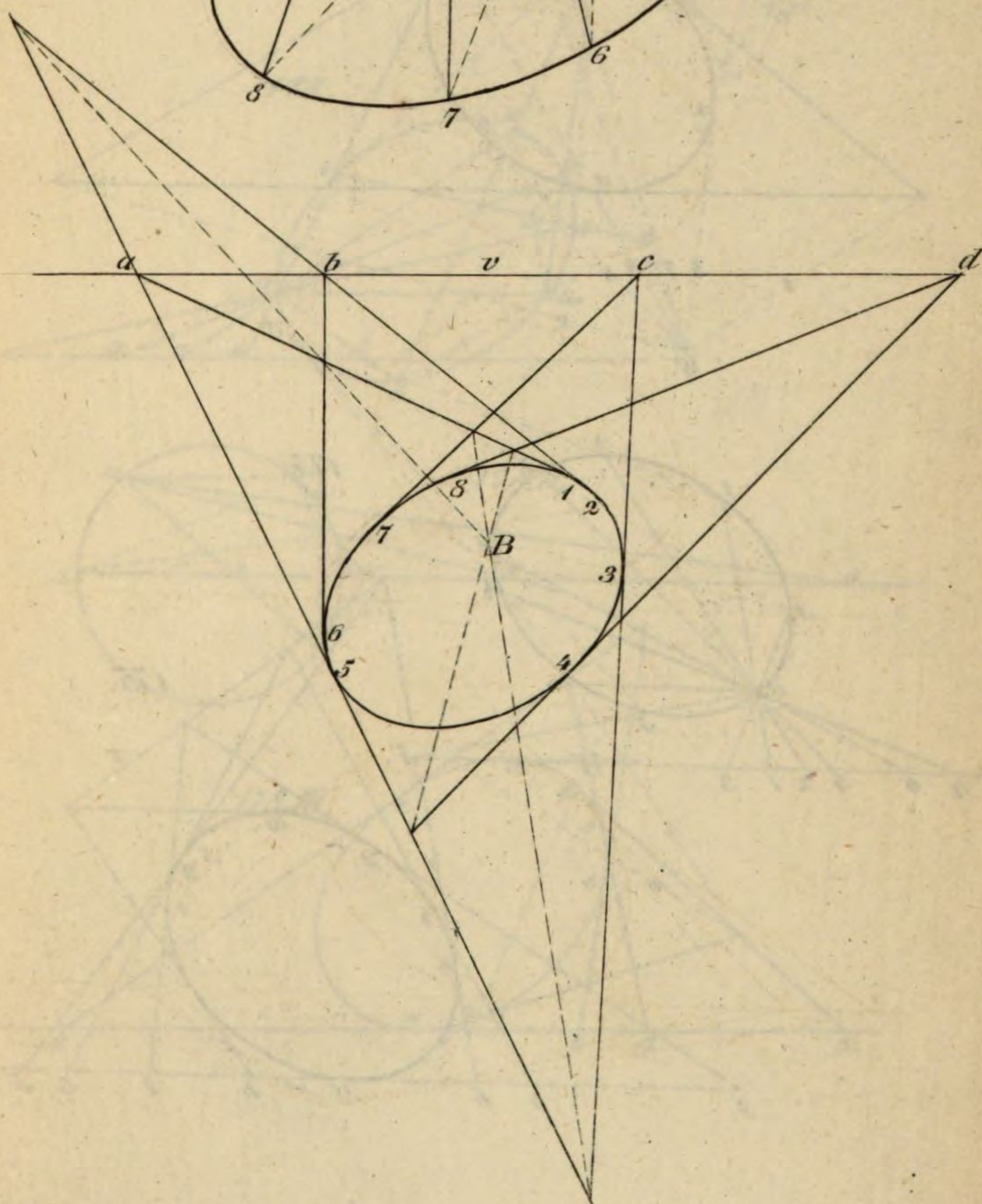
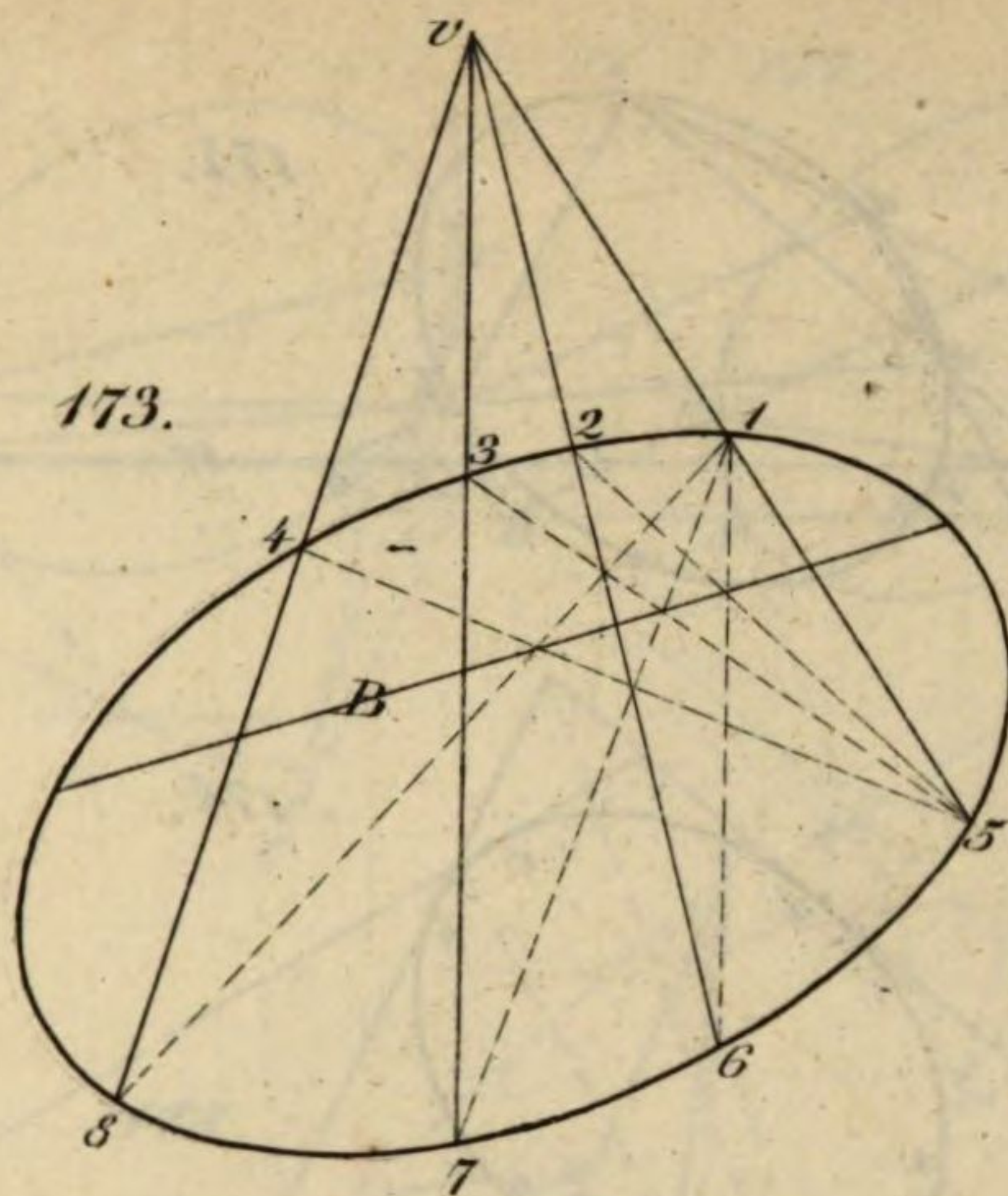


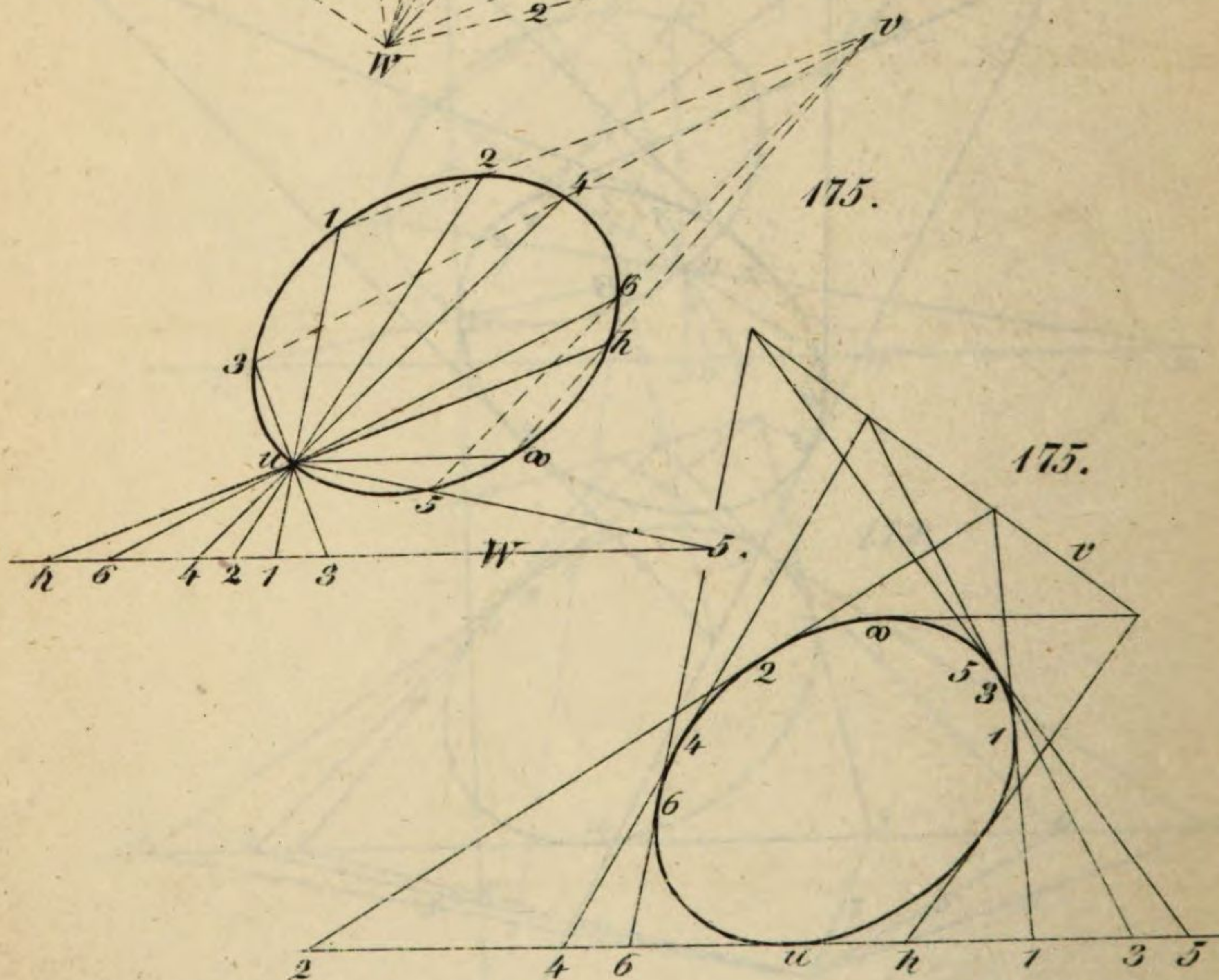
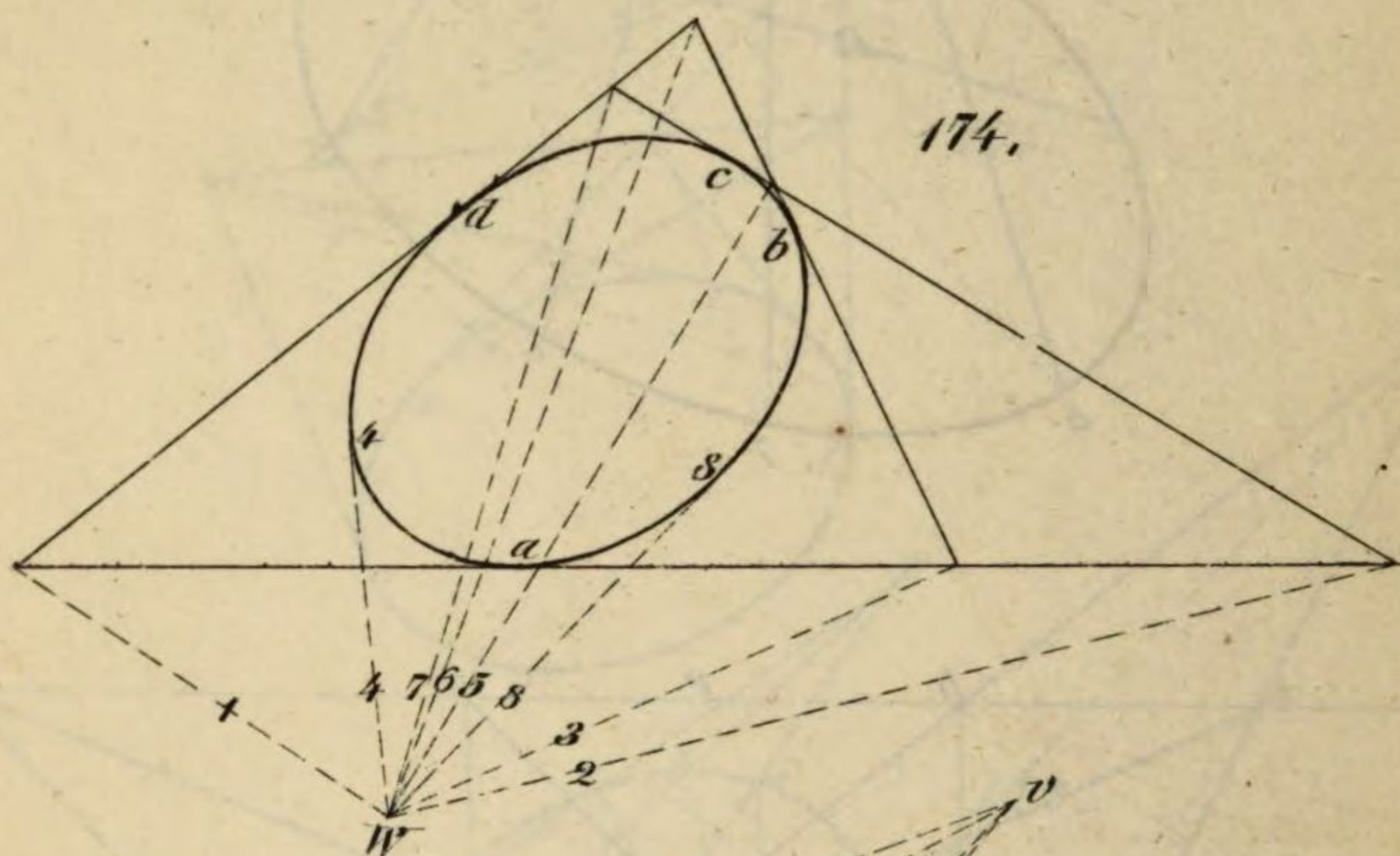
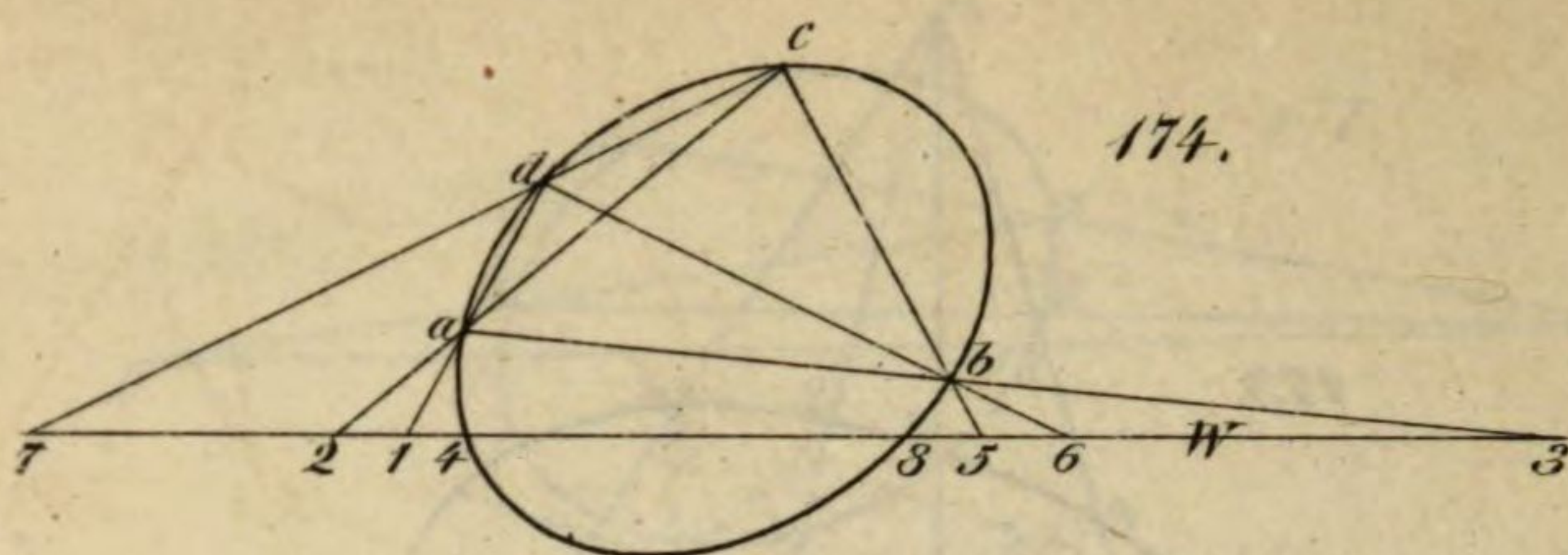
170.



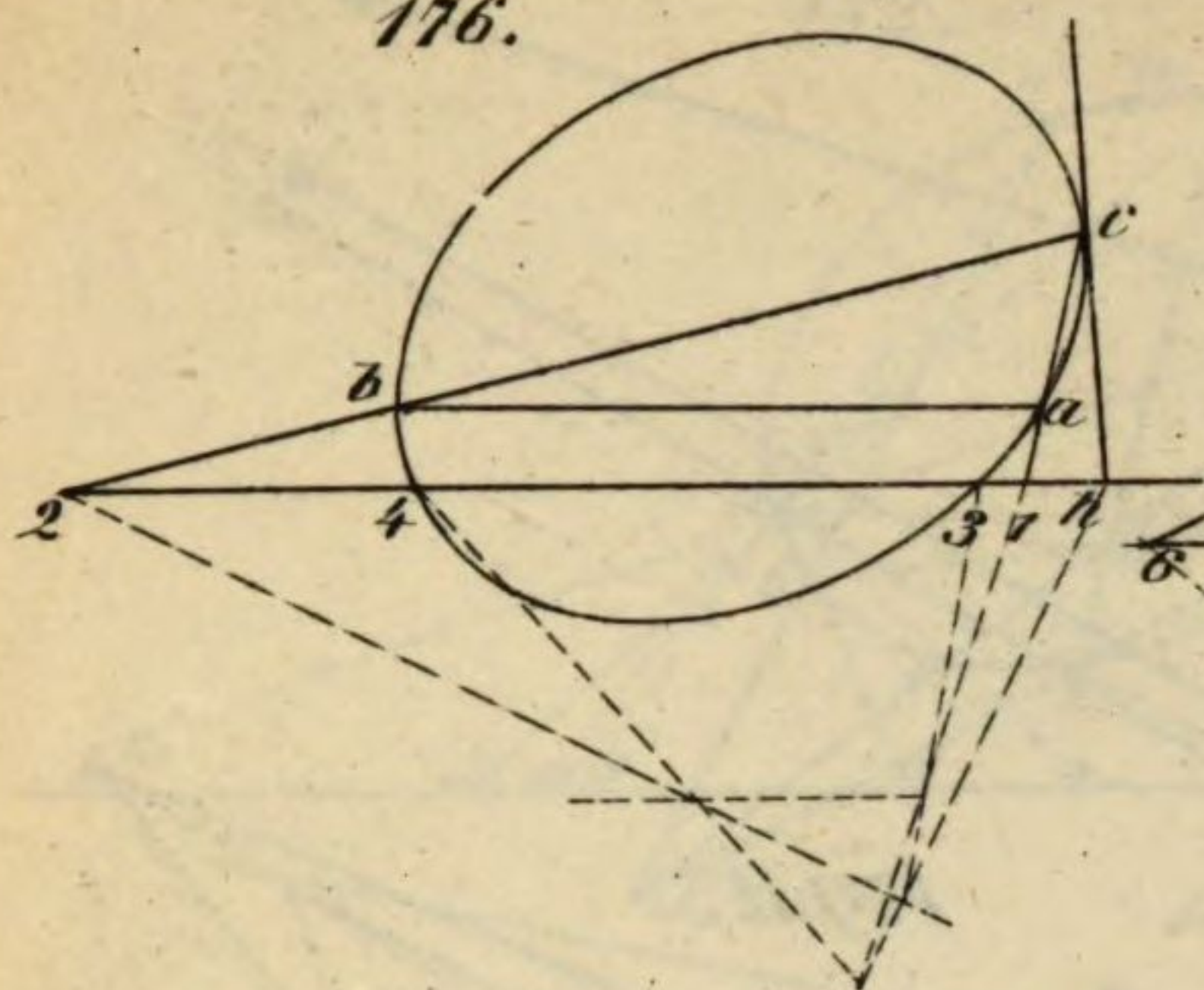


173.

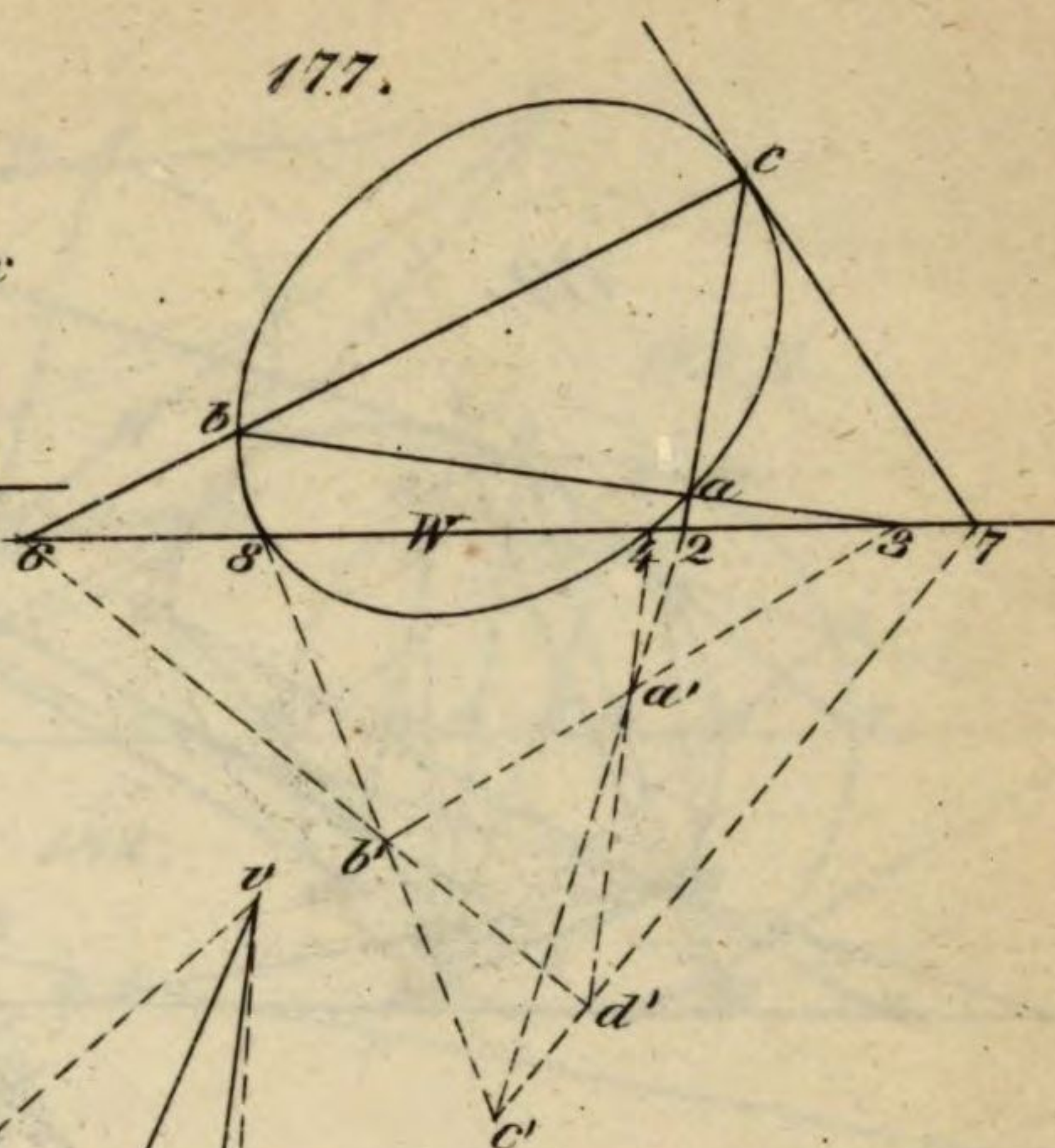




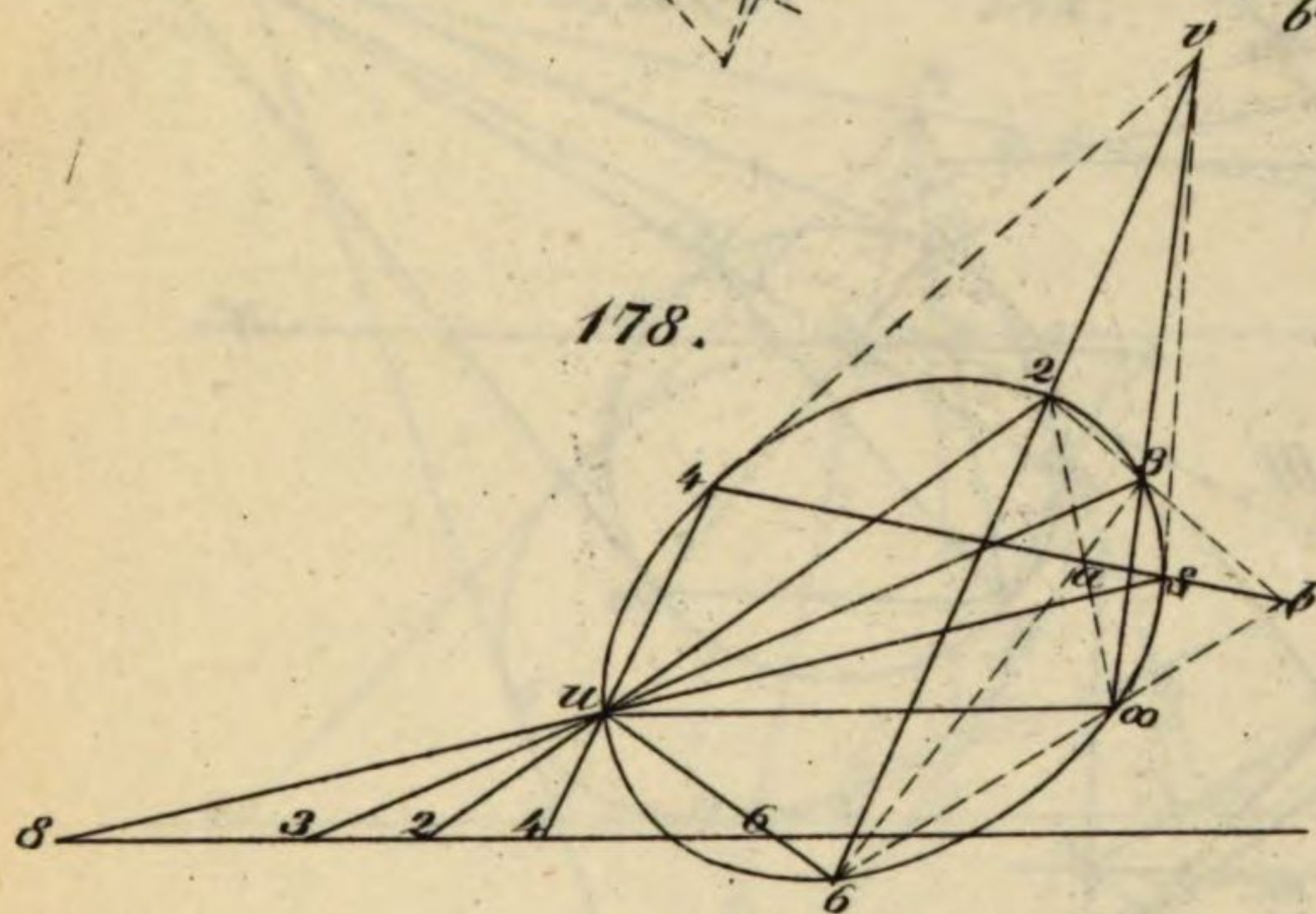
176.



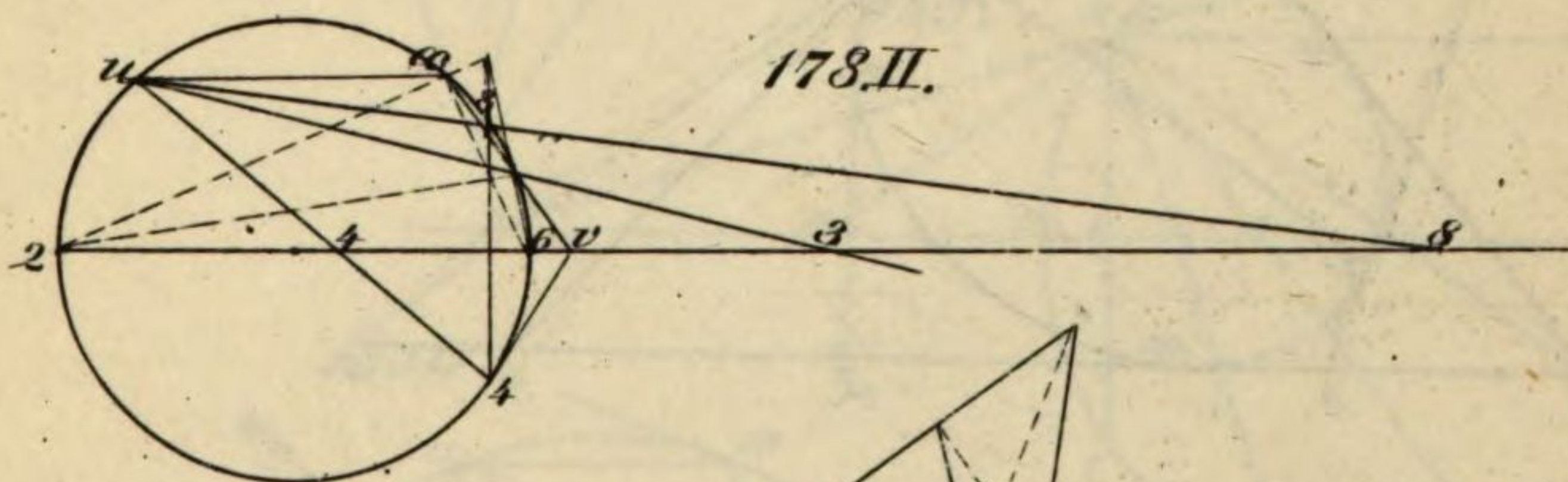
177.



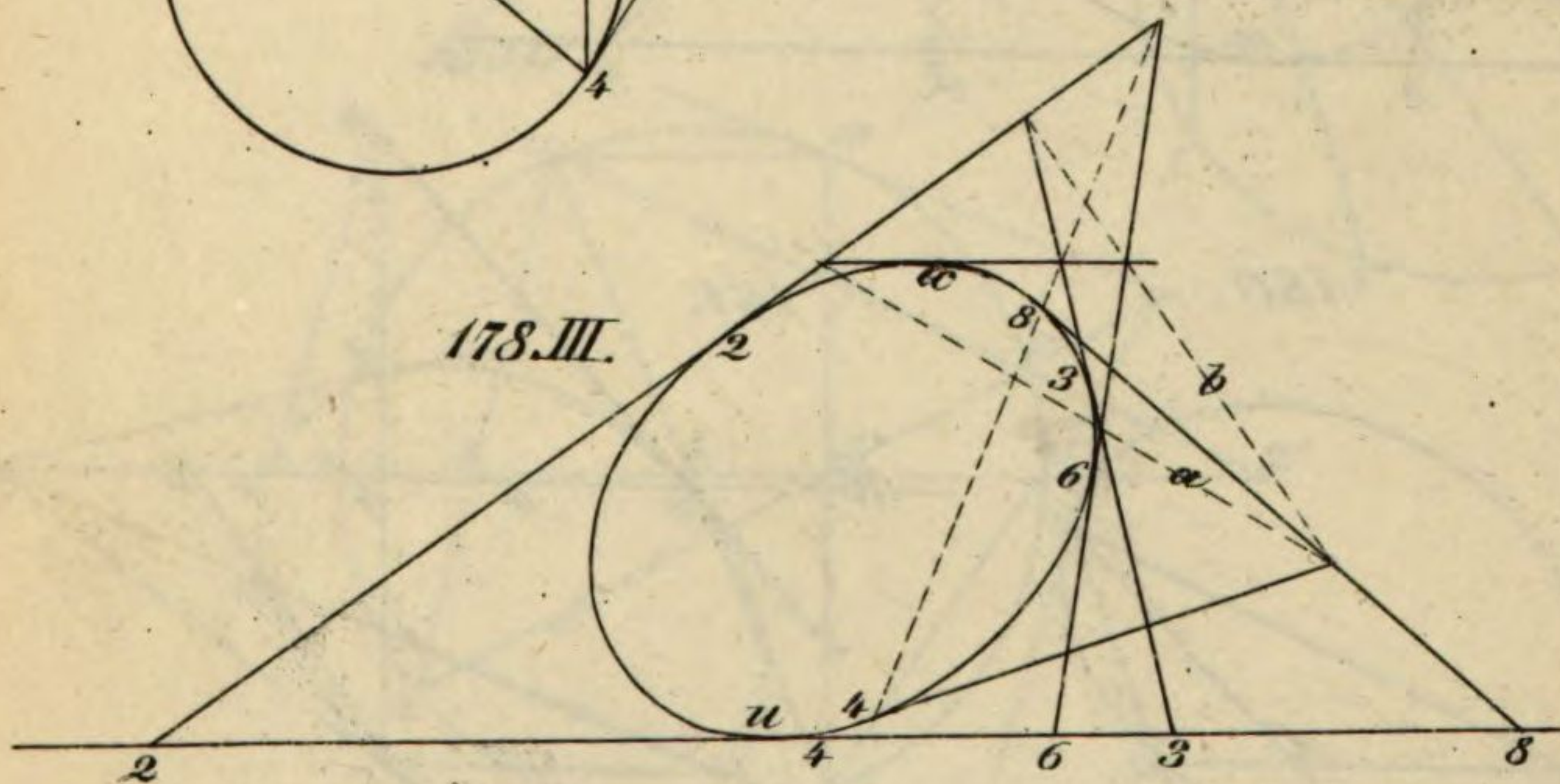
178.



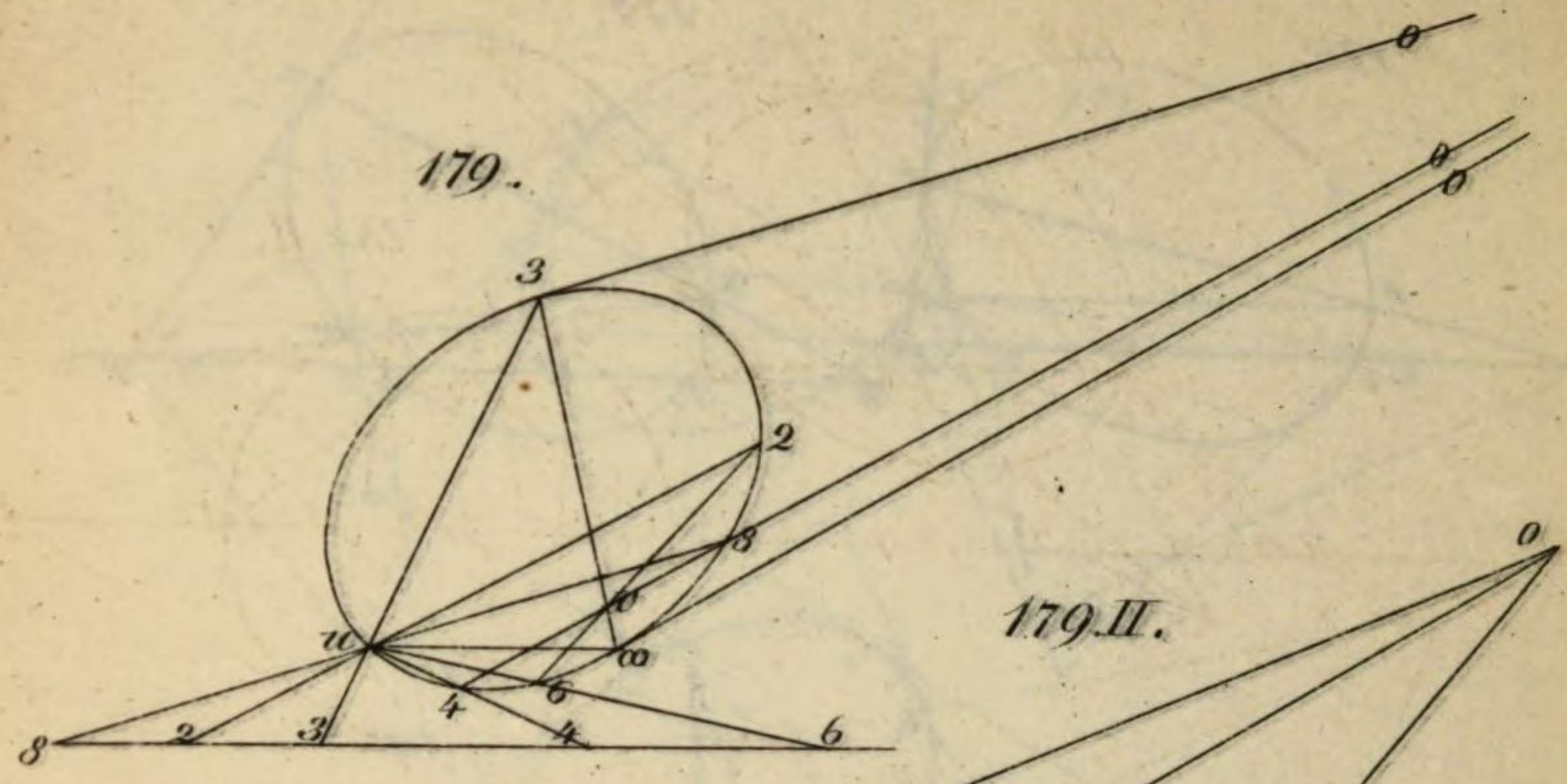
178.II.



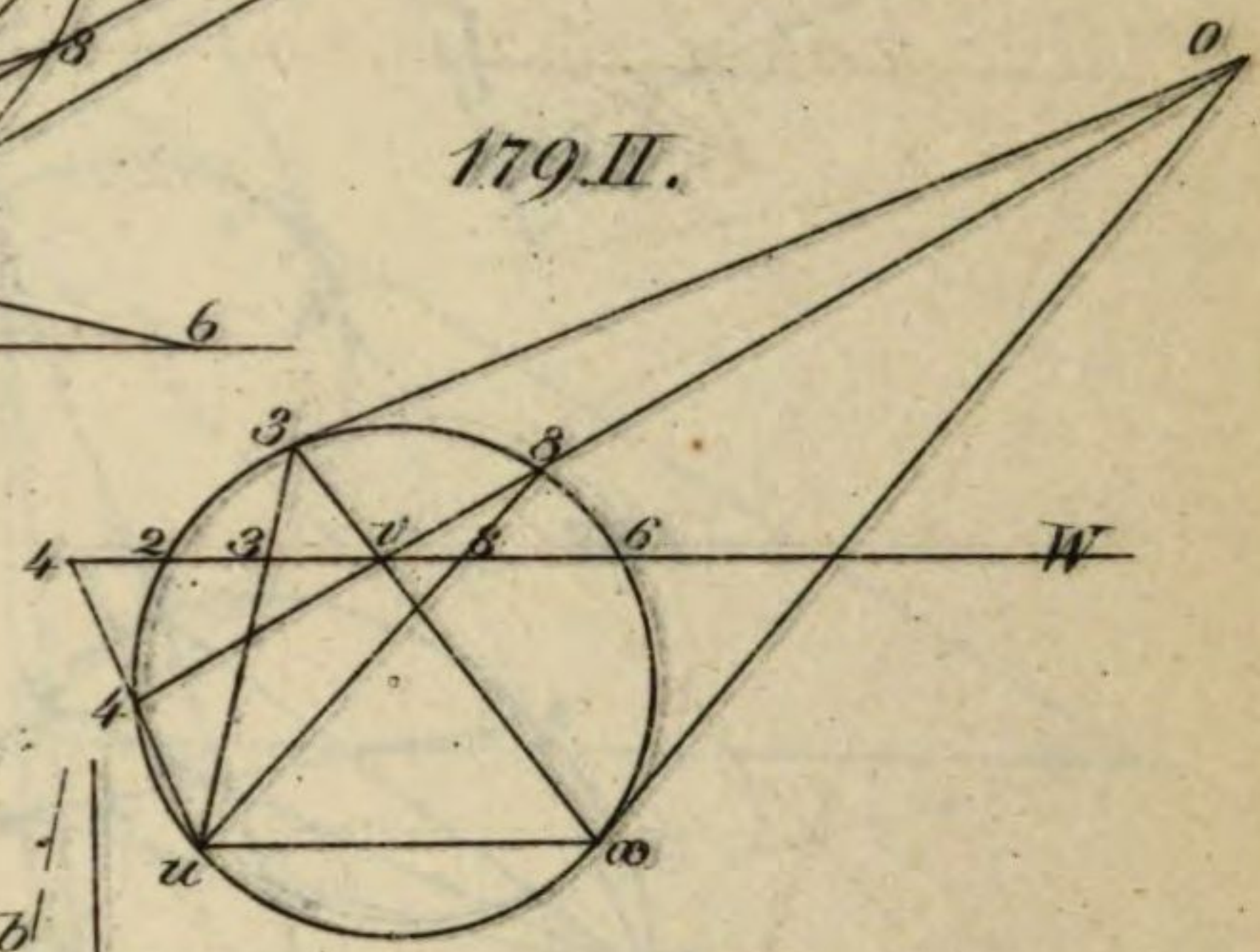
178.III.



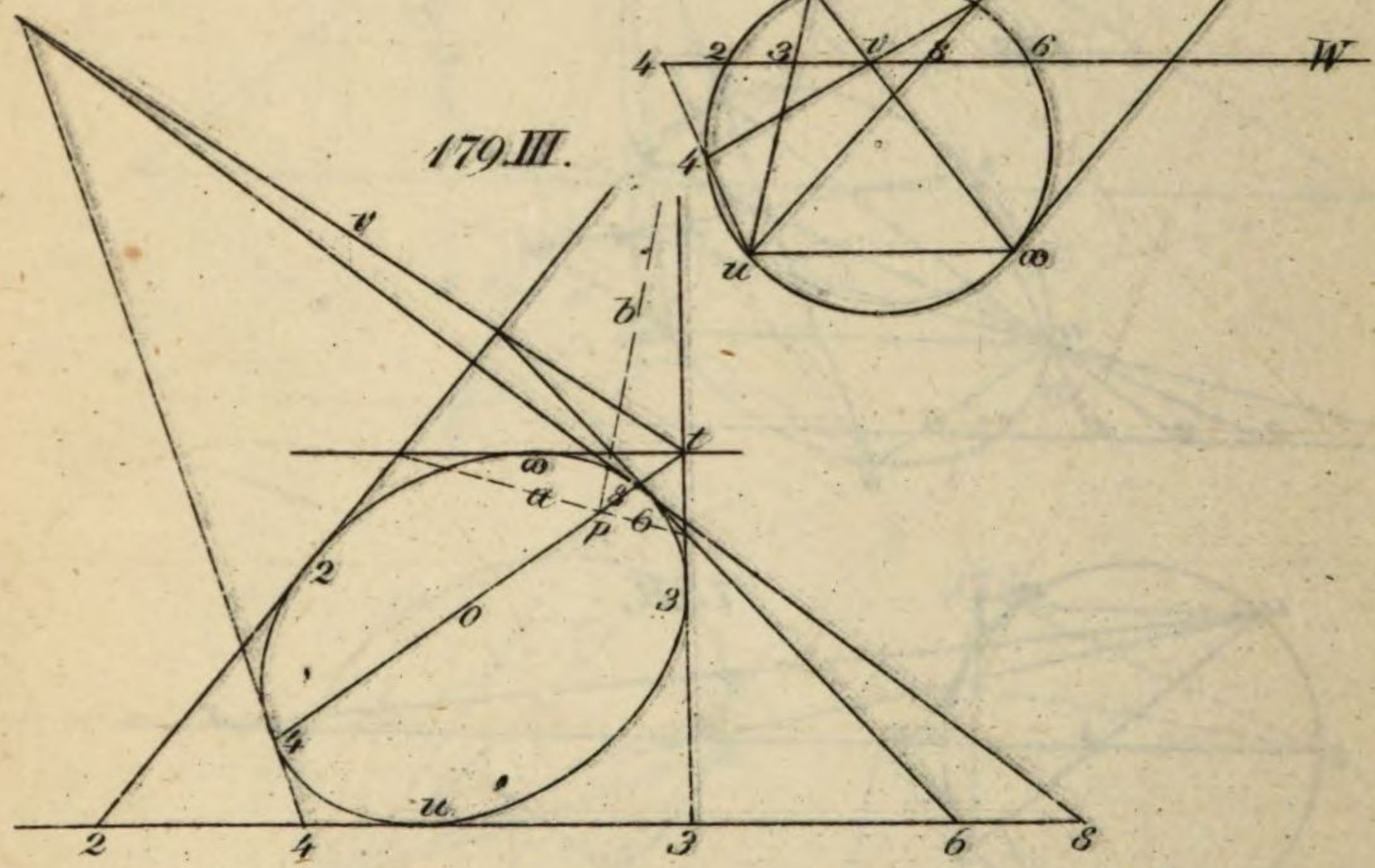
179.



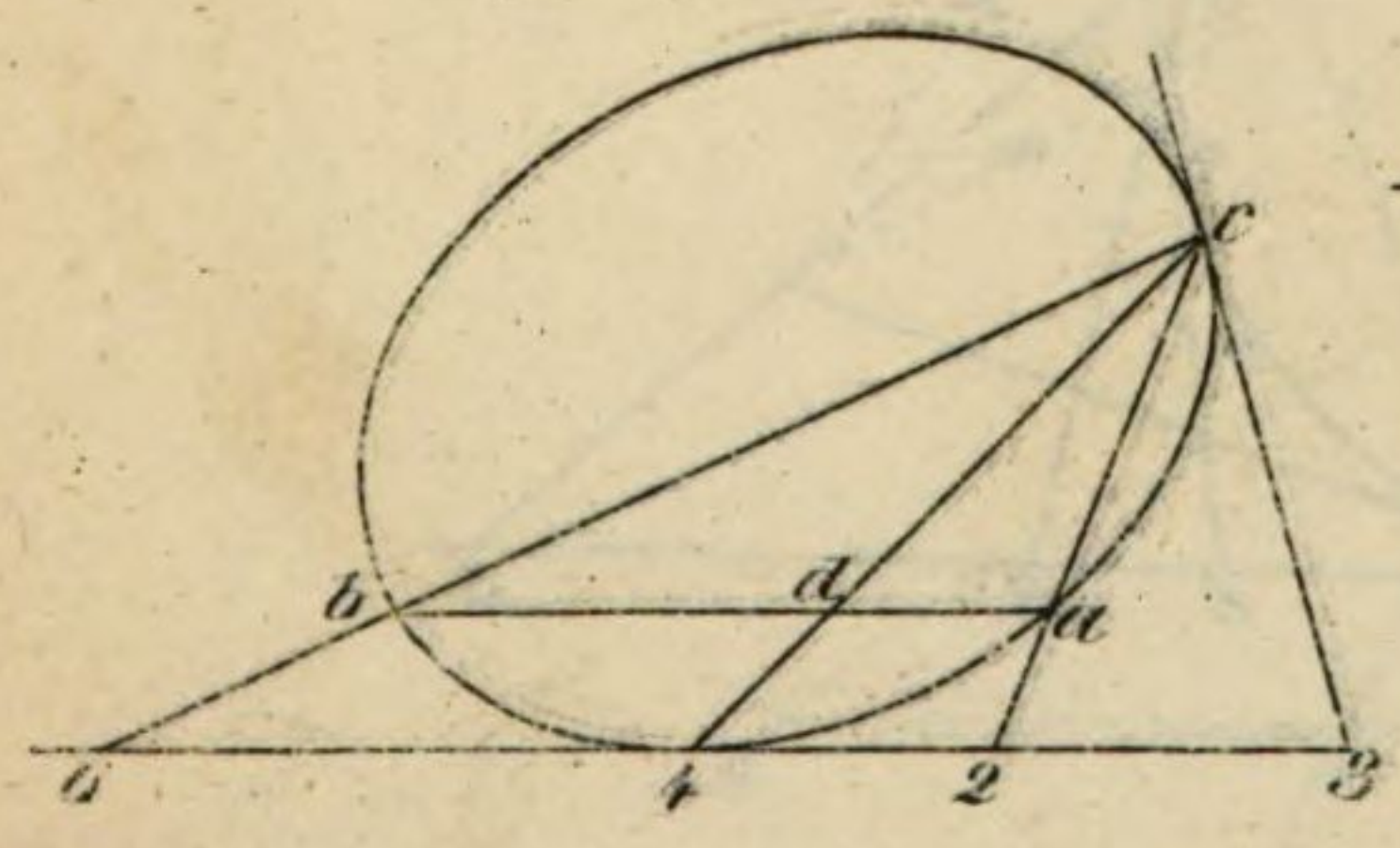
179. II.



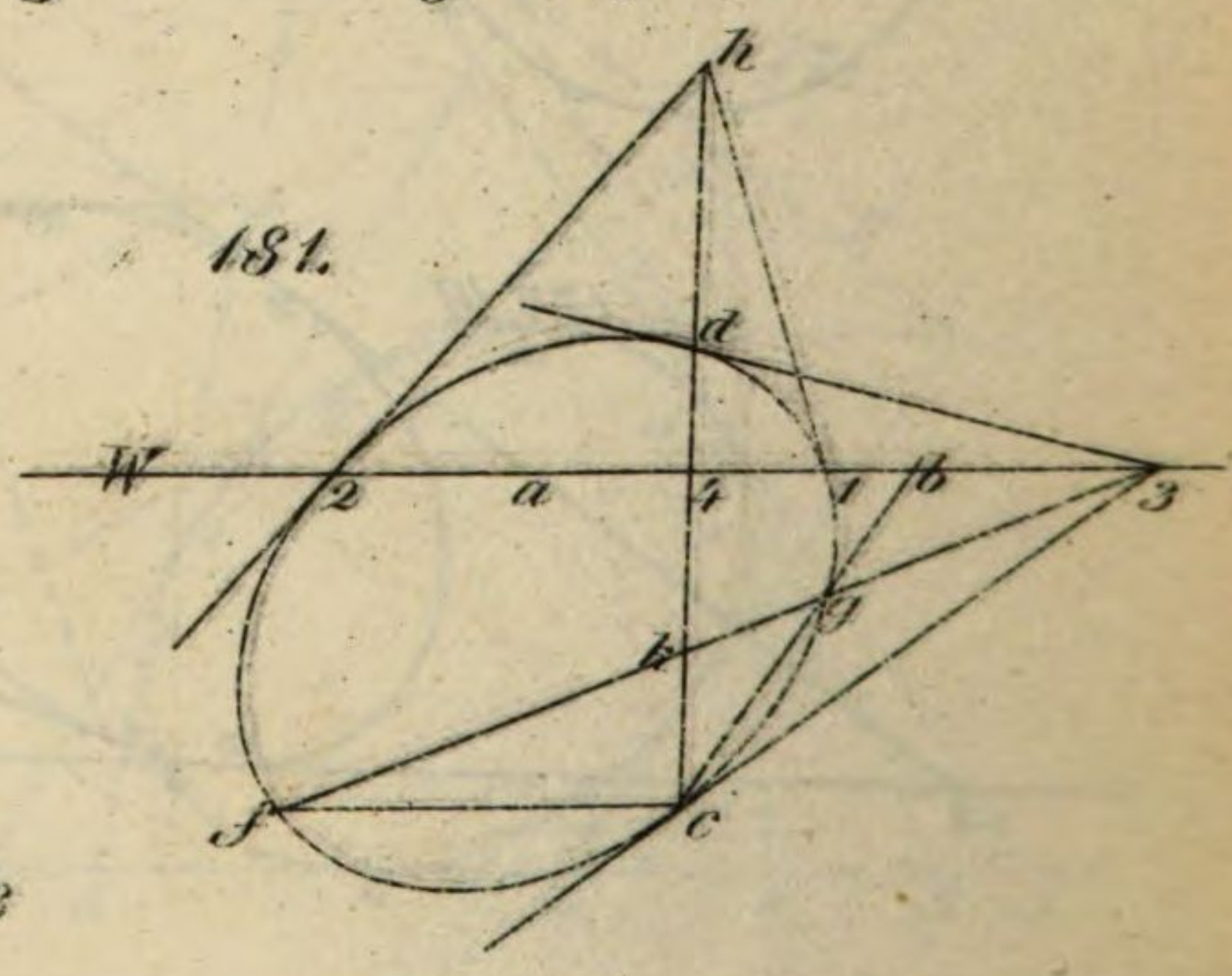
179. III.



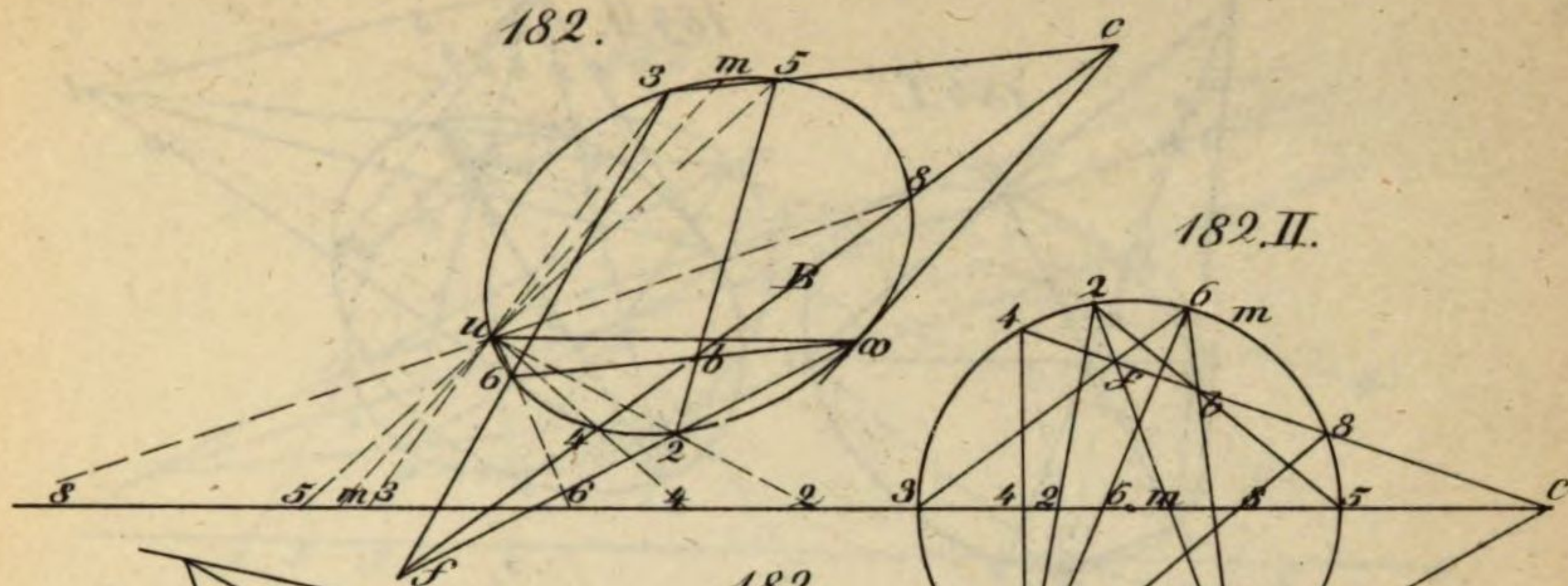
180.



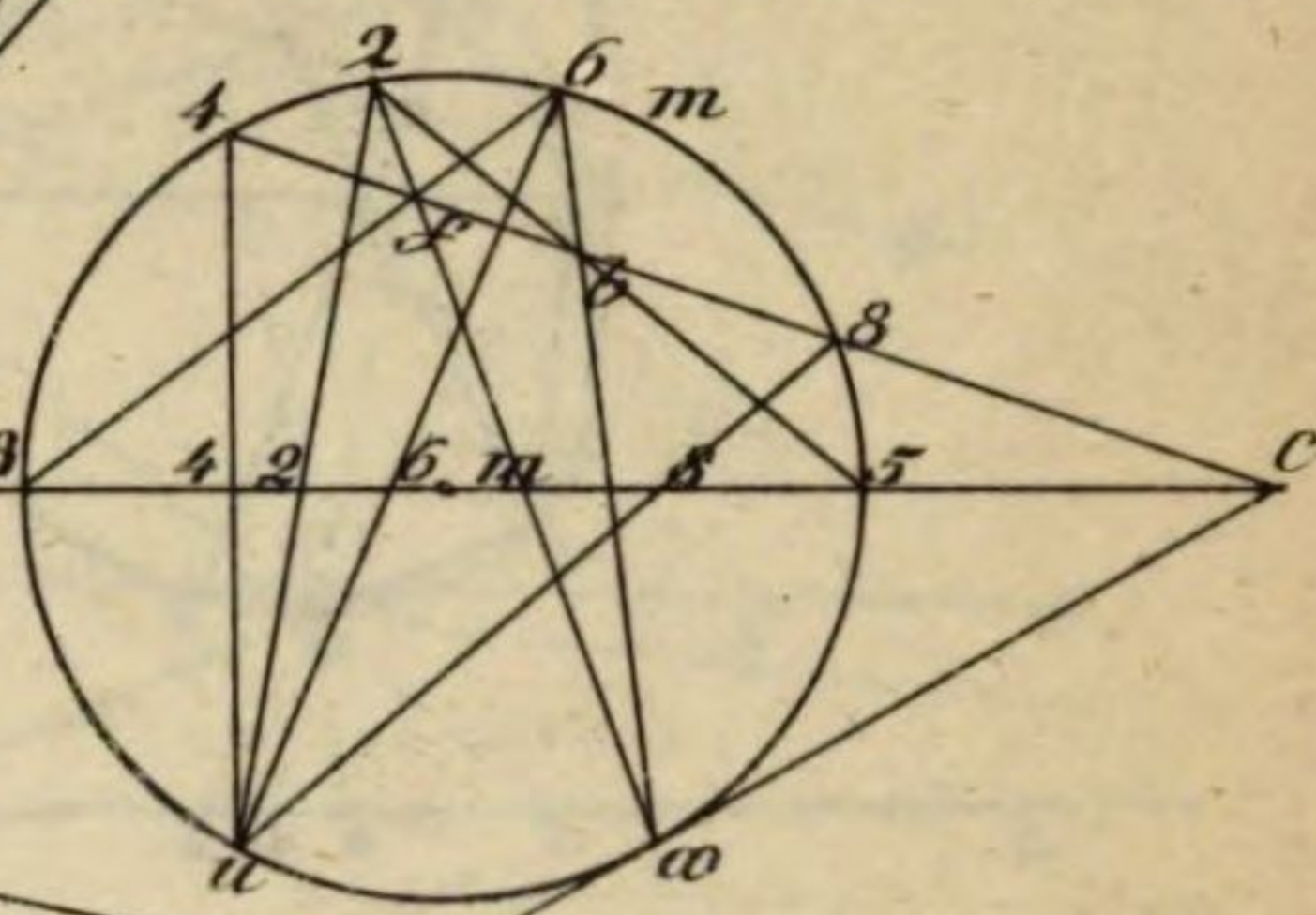
181.



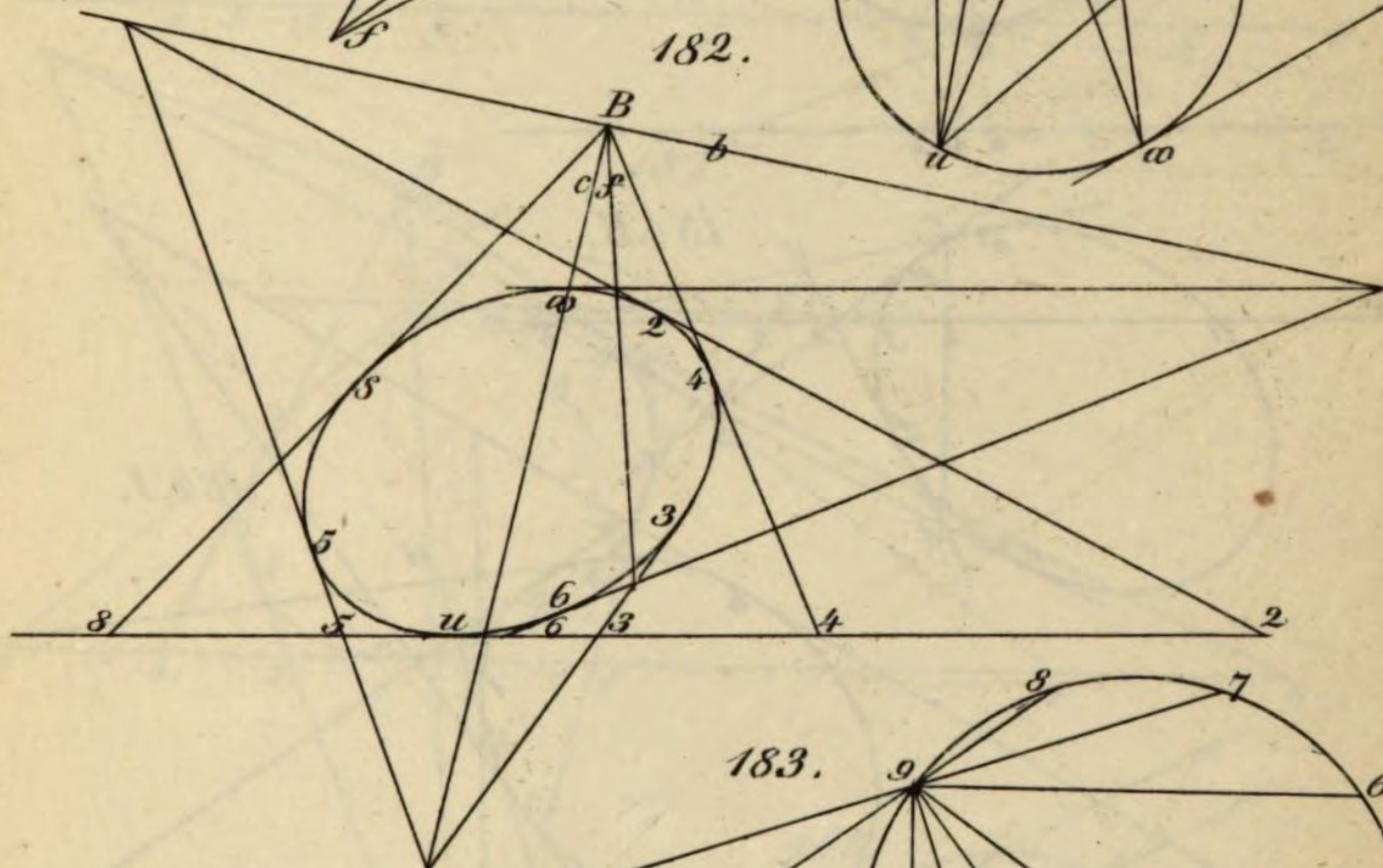
182.



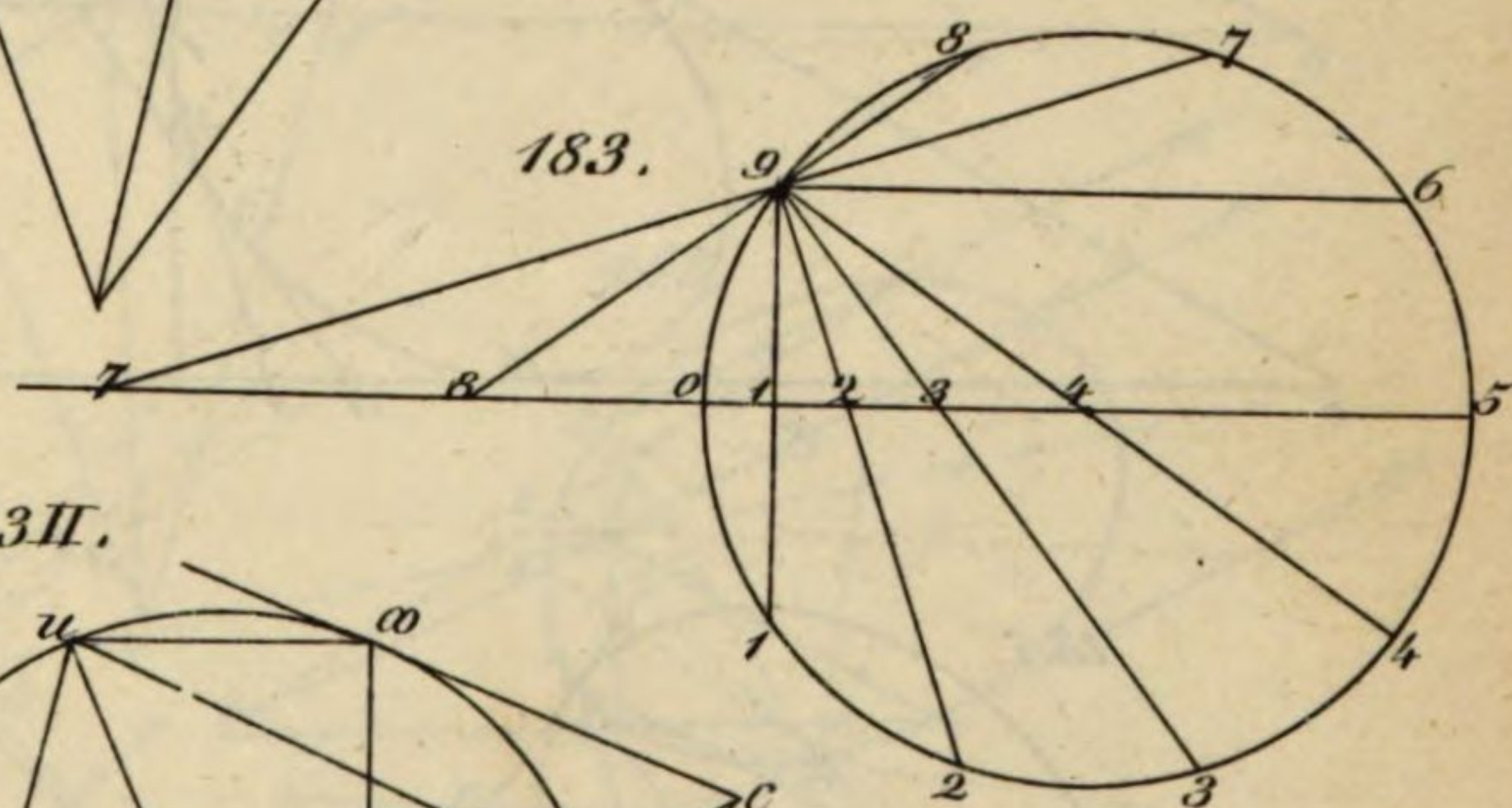
182. II.



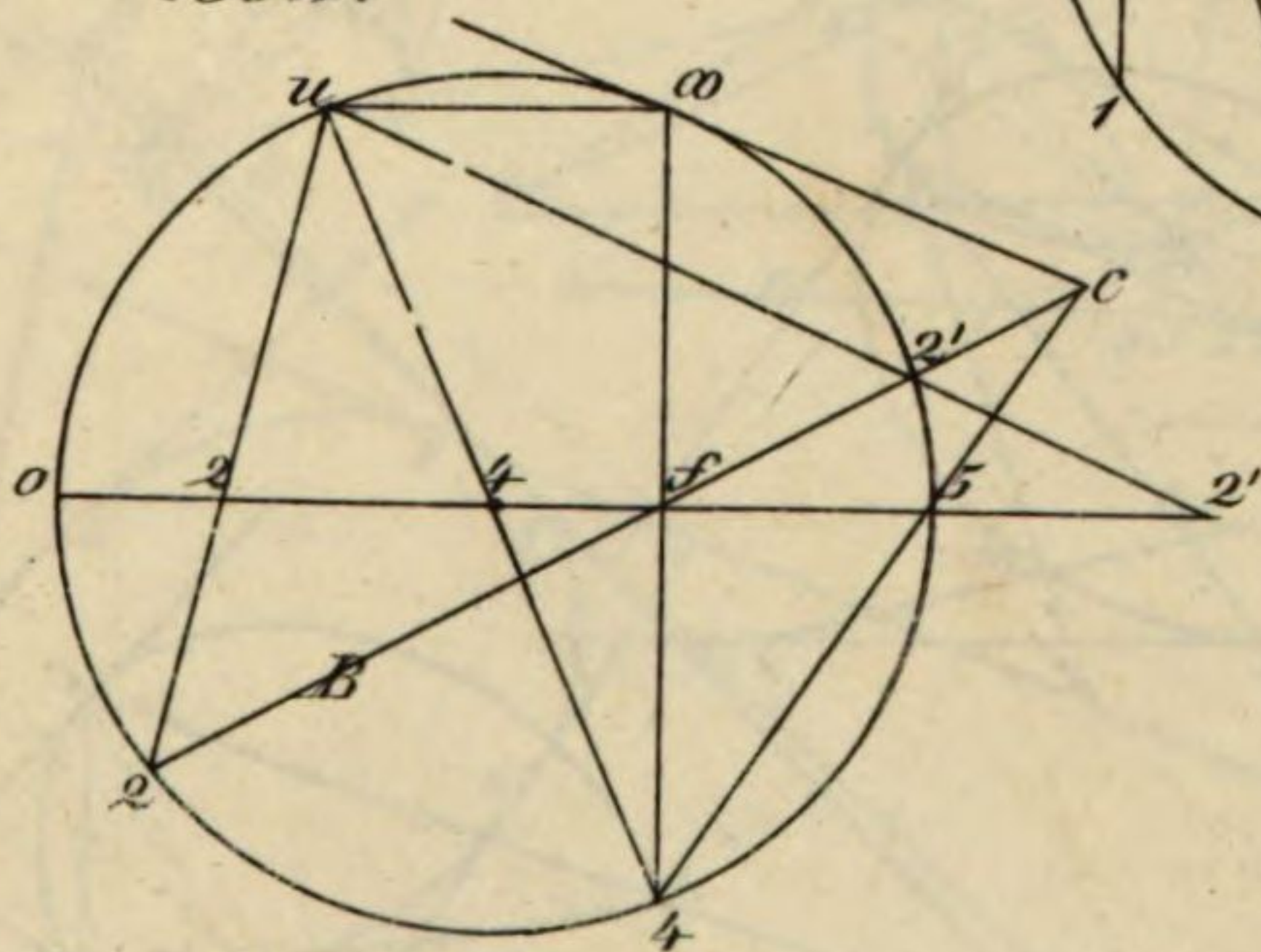
182.

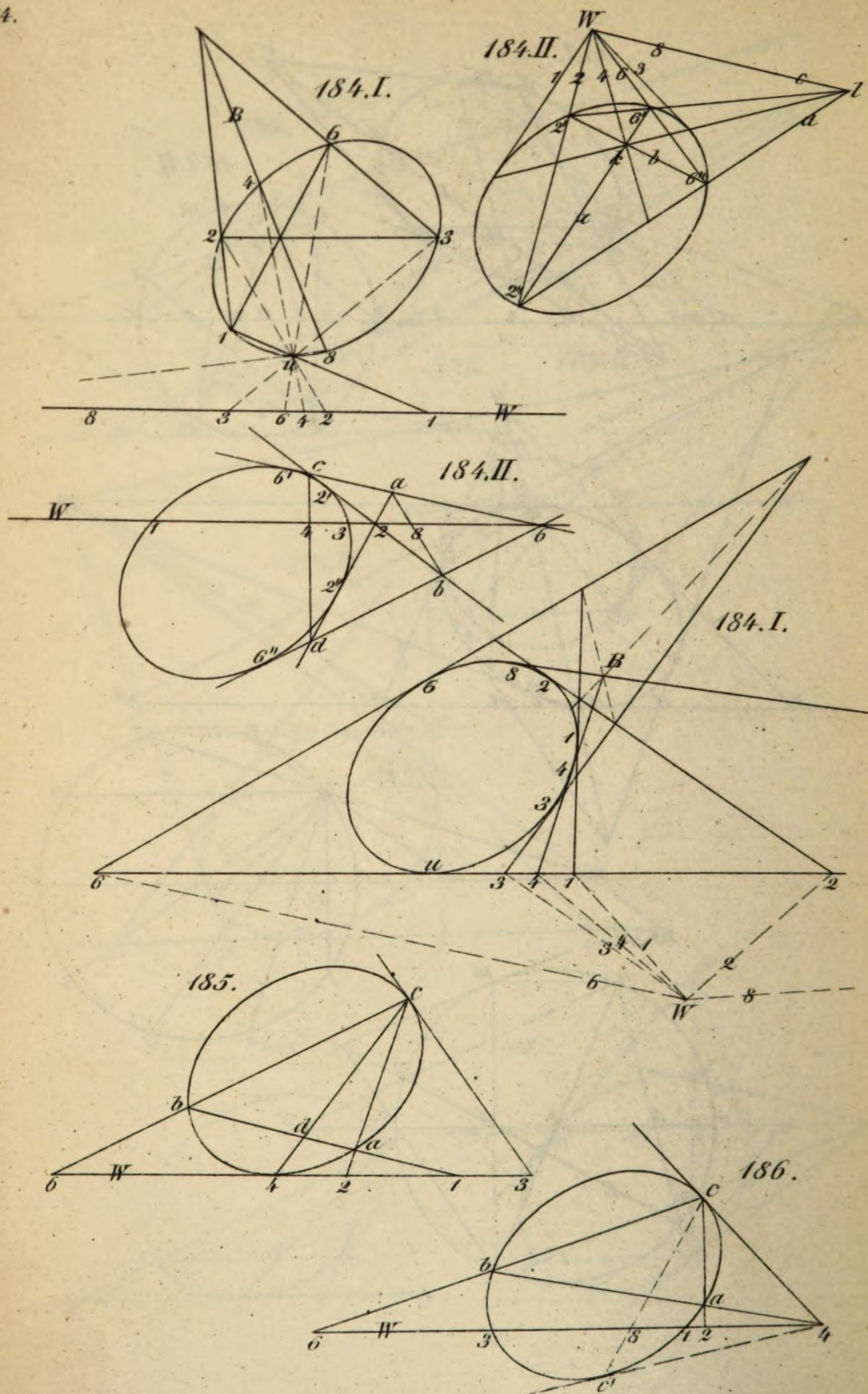


183.

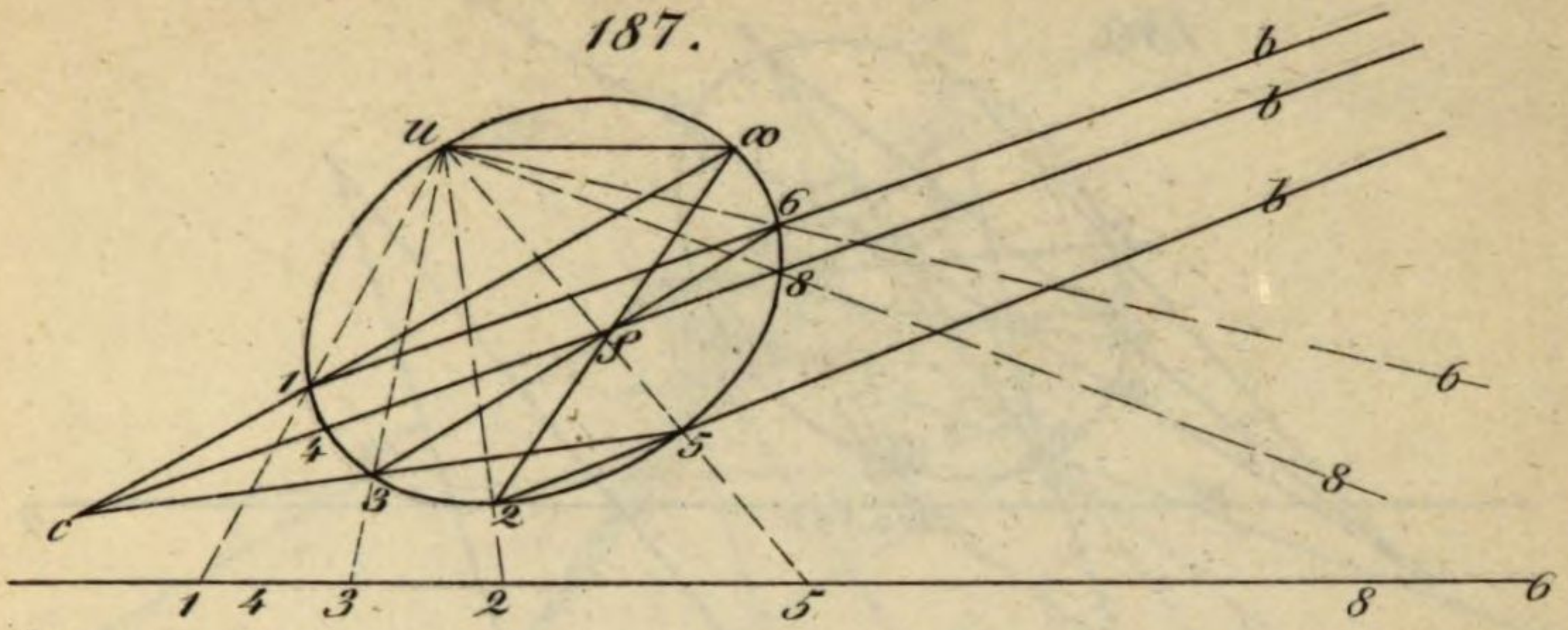


183 II.

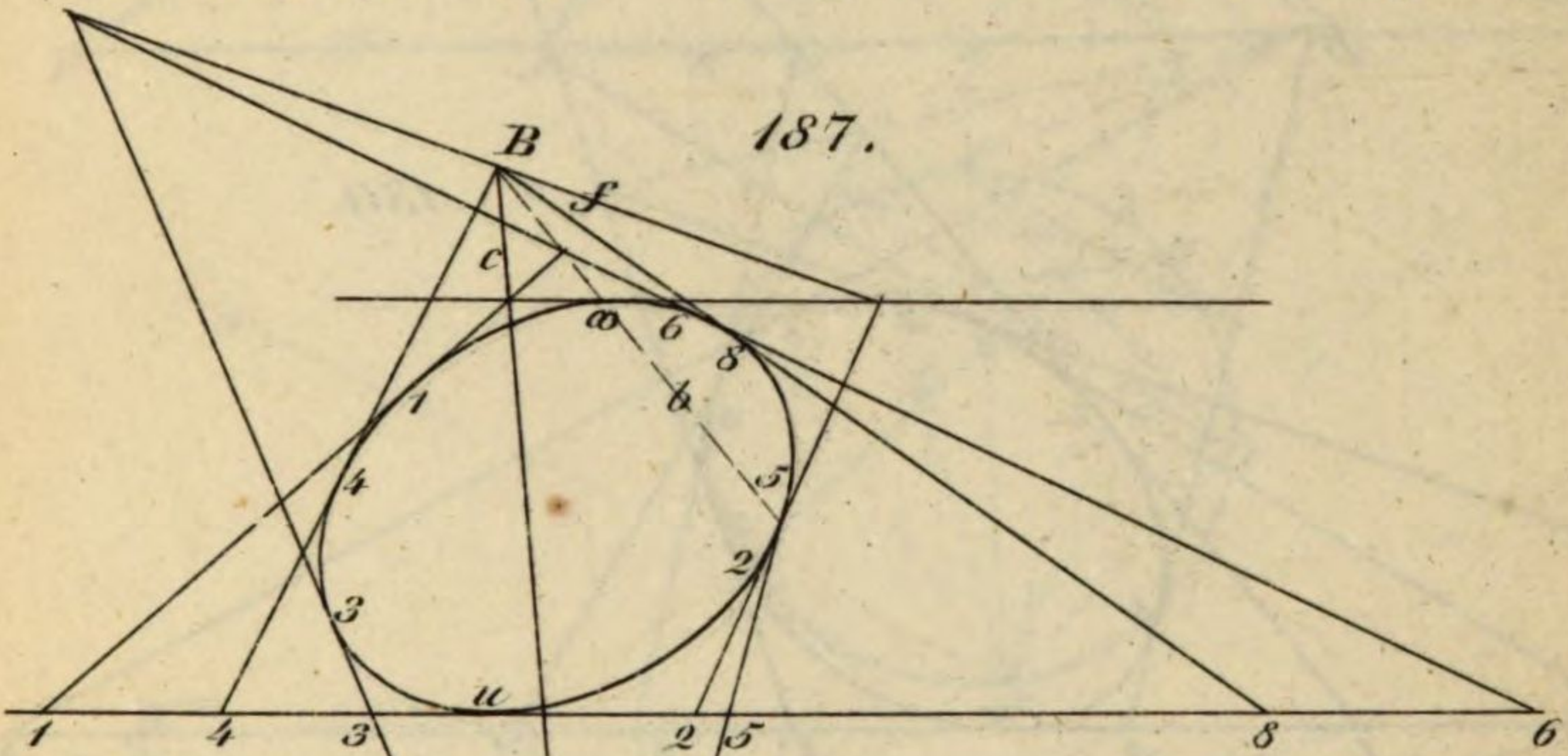




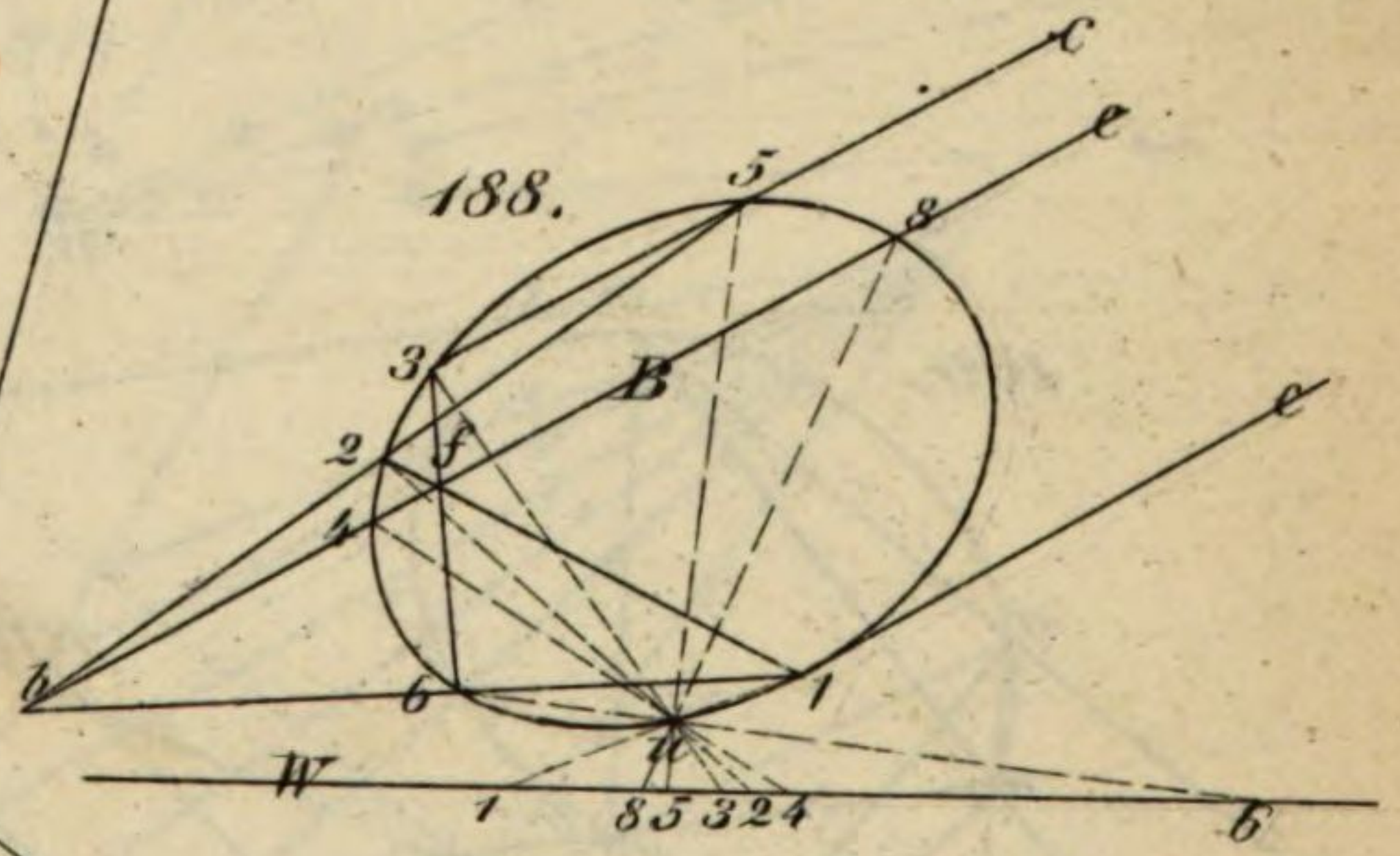
187.



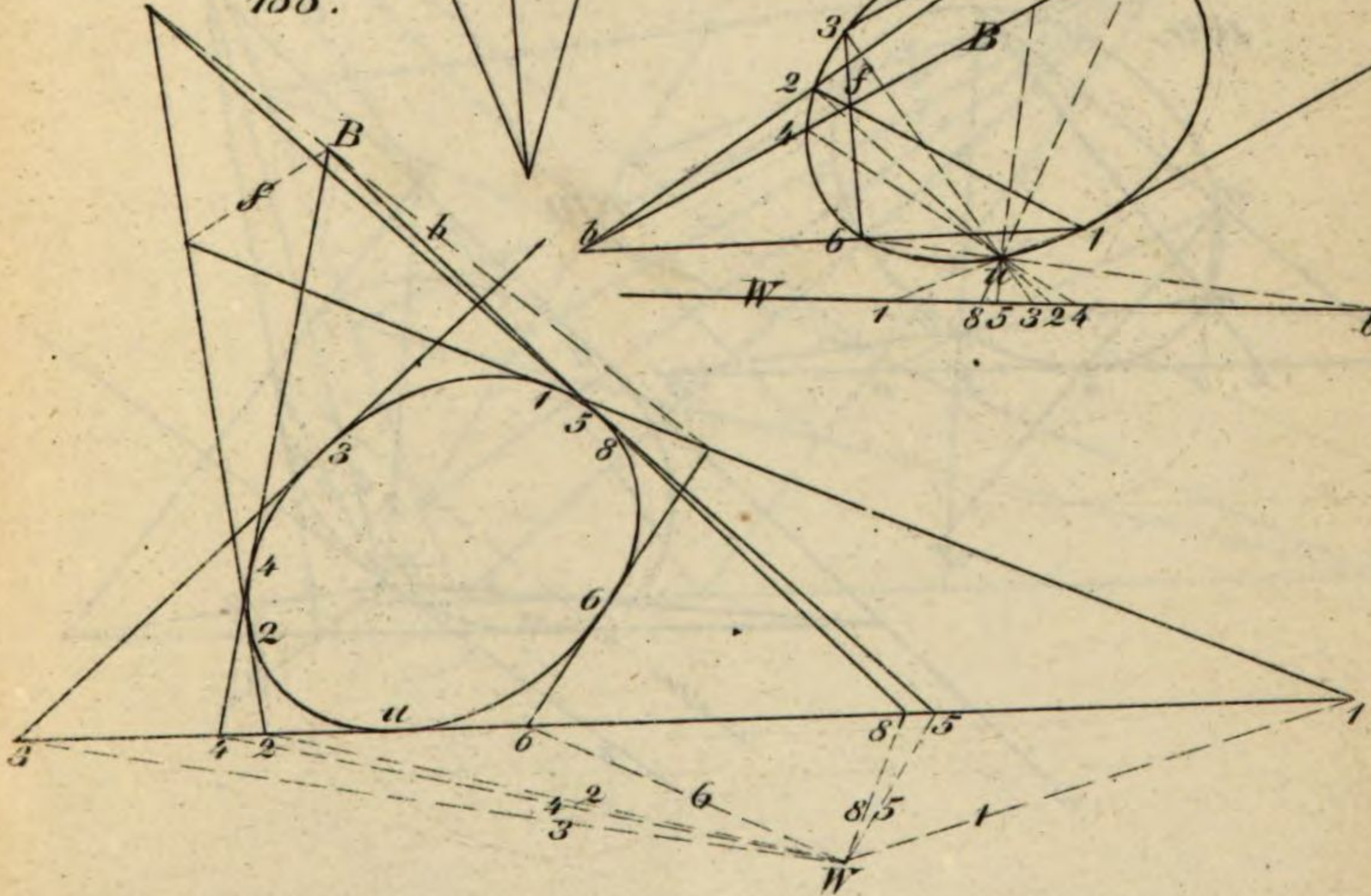
187.

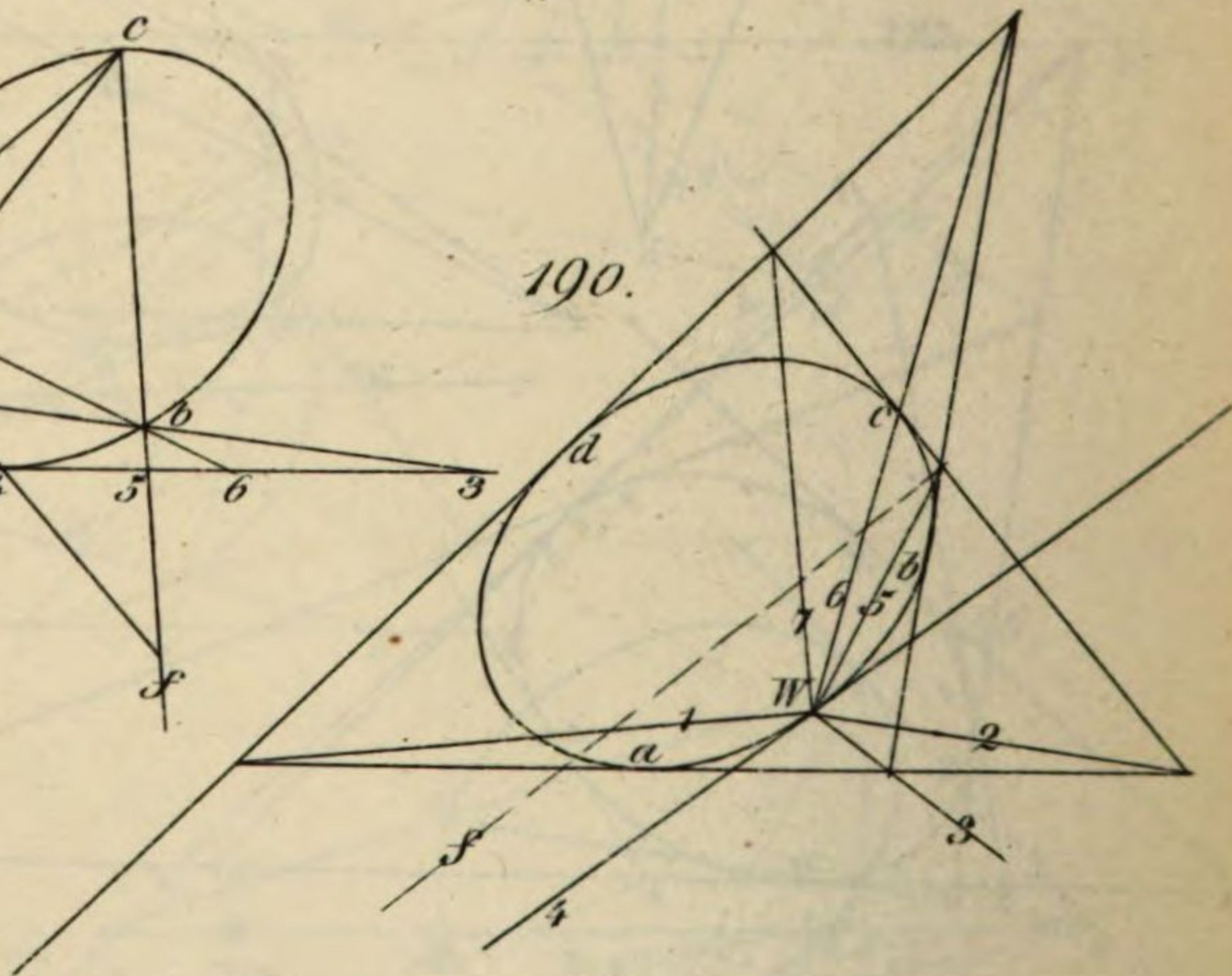
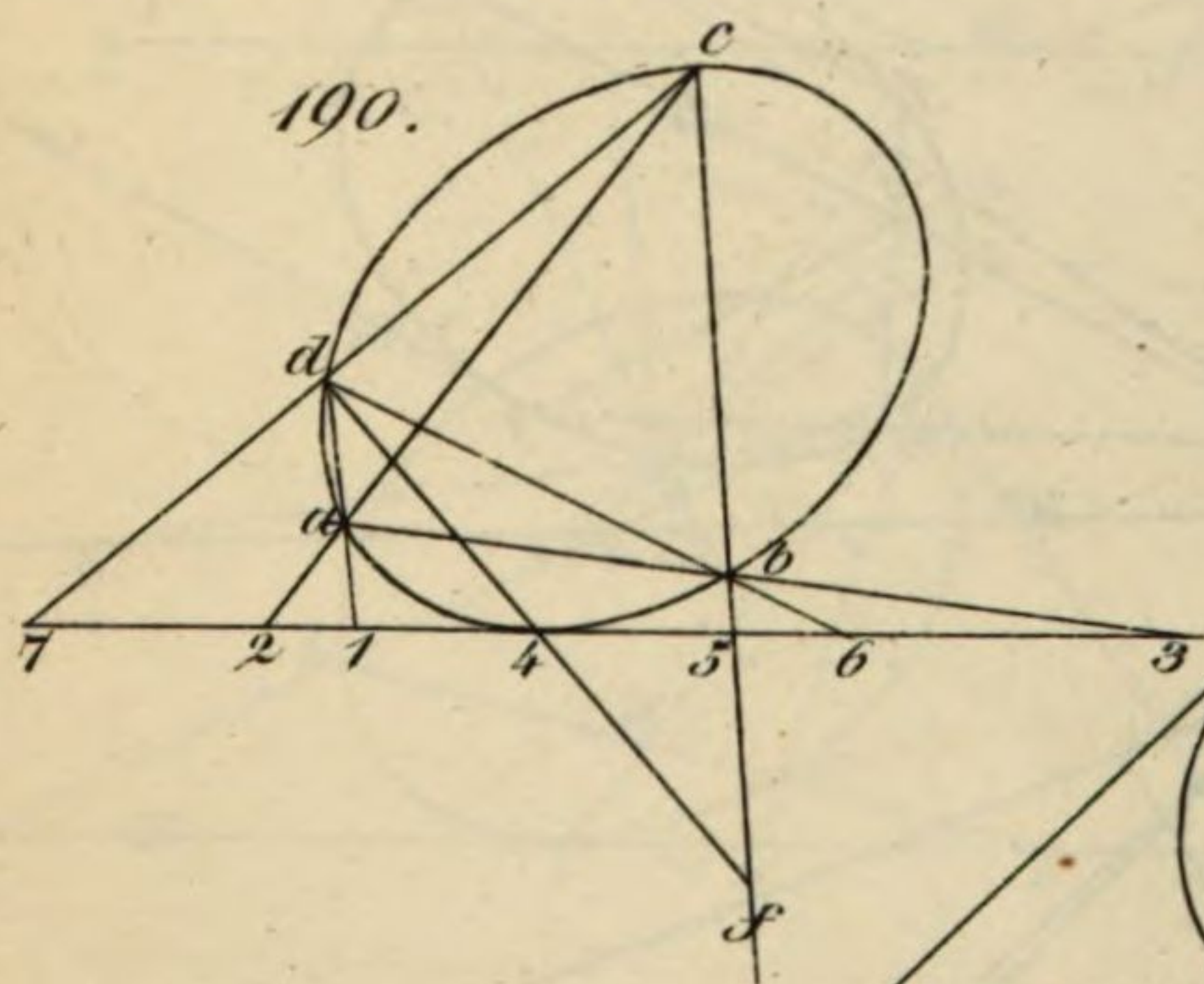
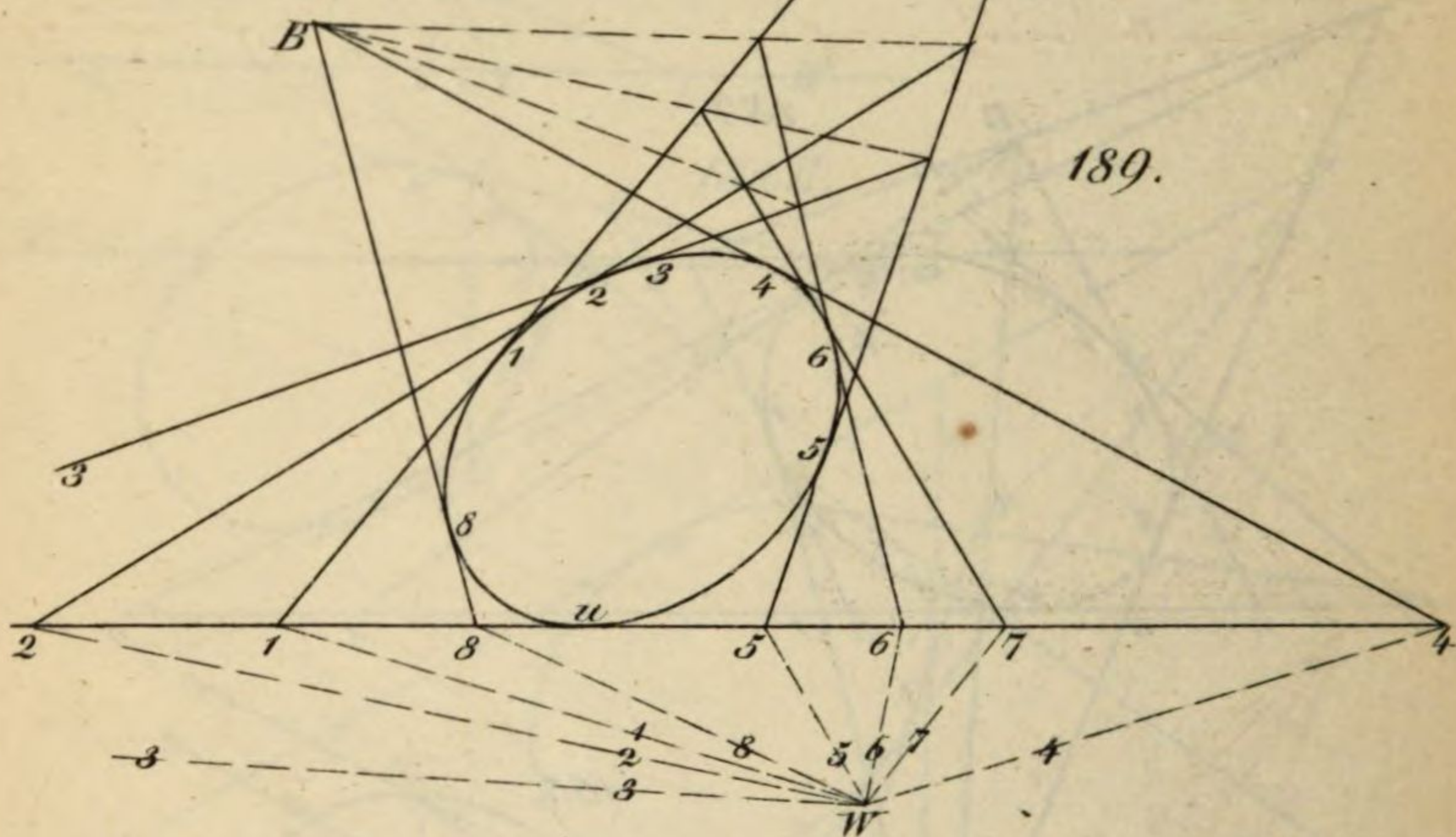
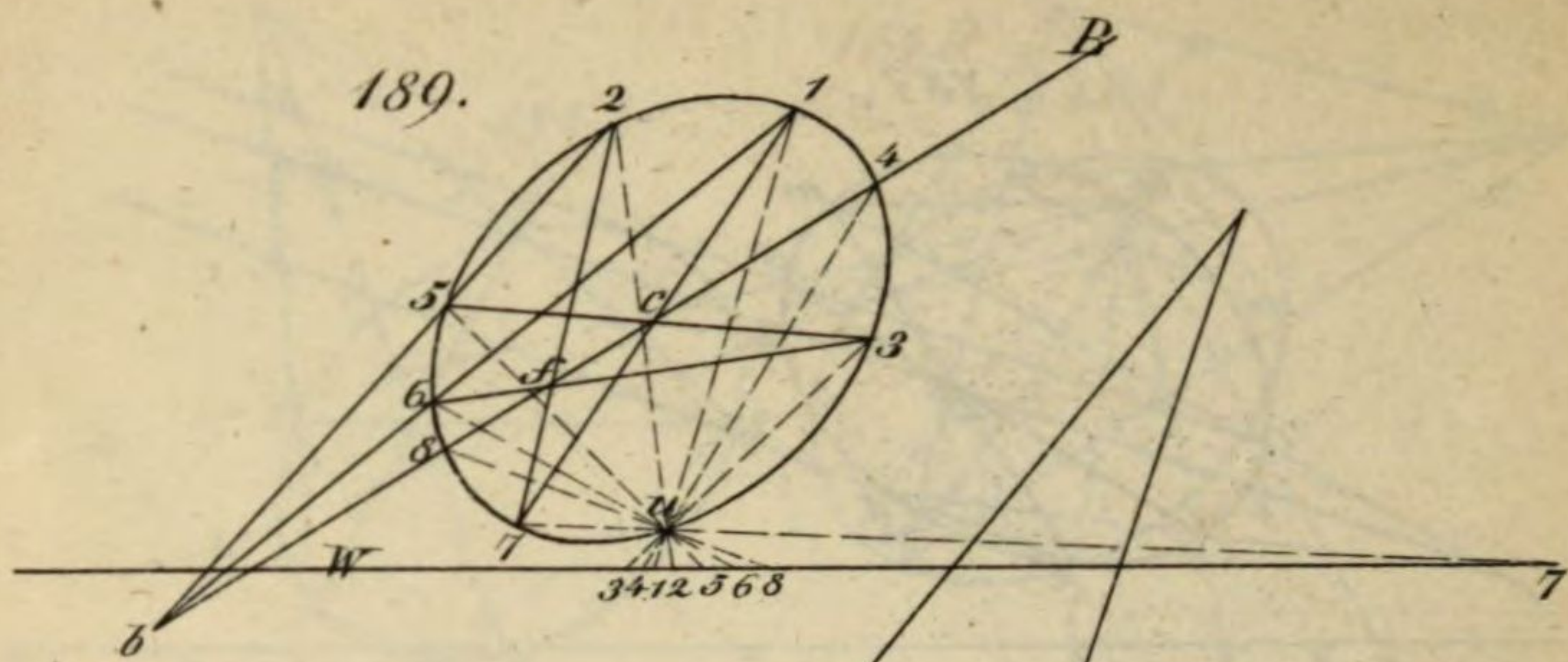


188.

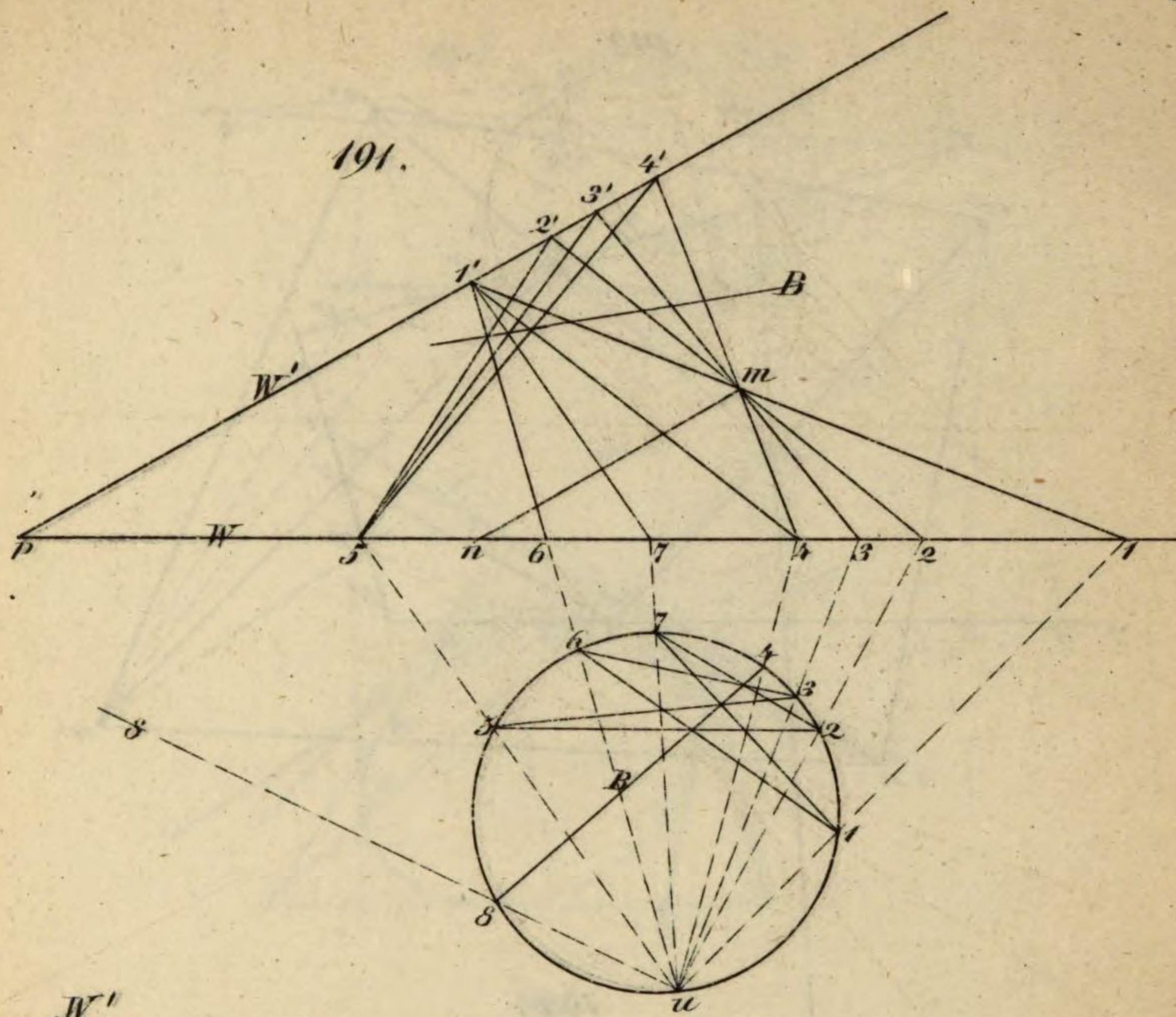


188.

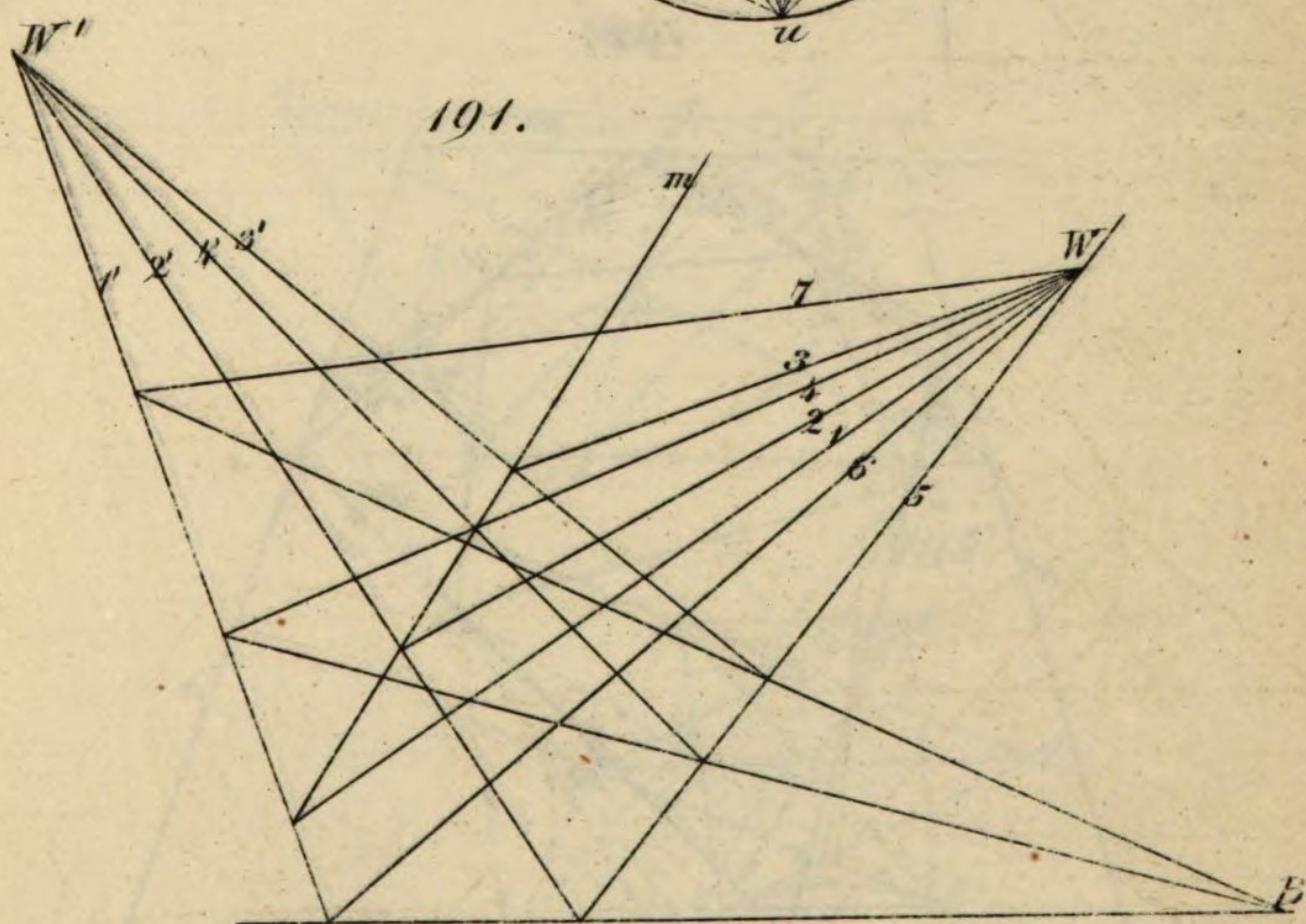


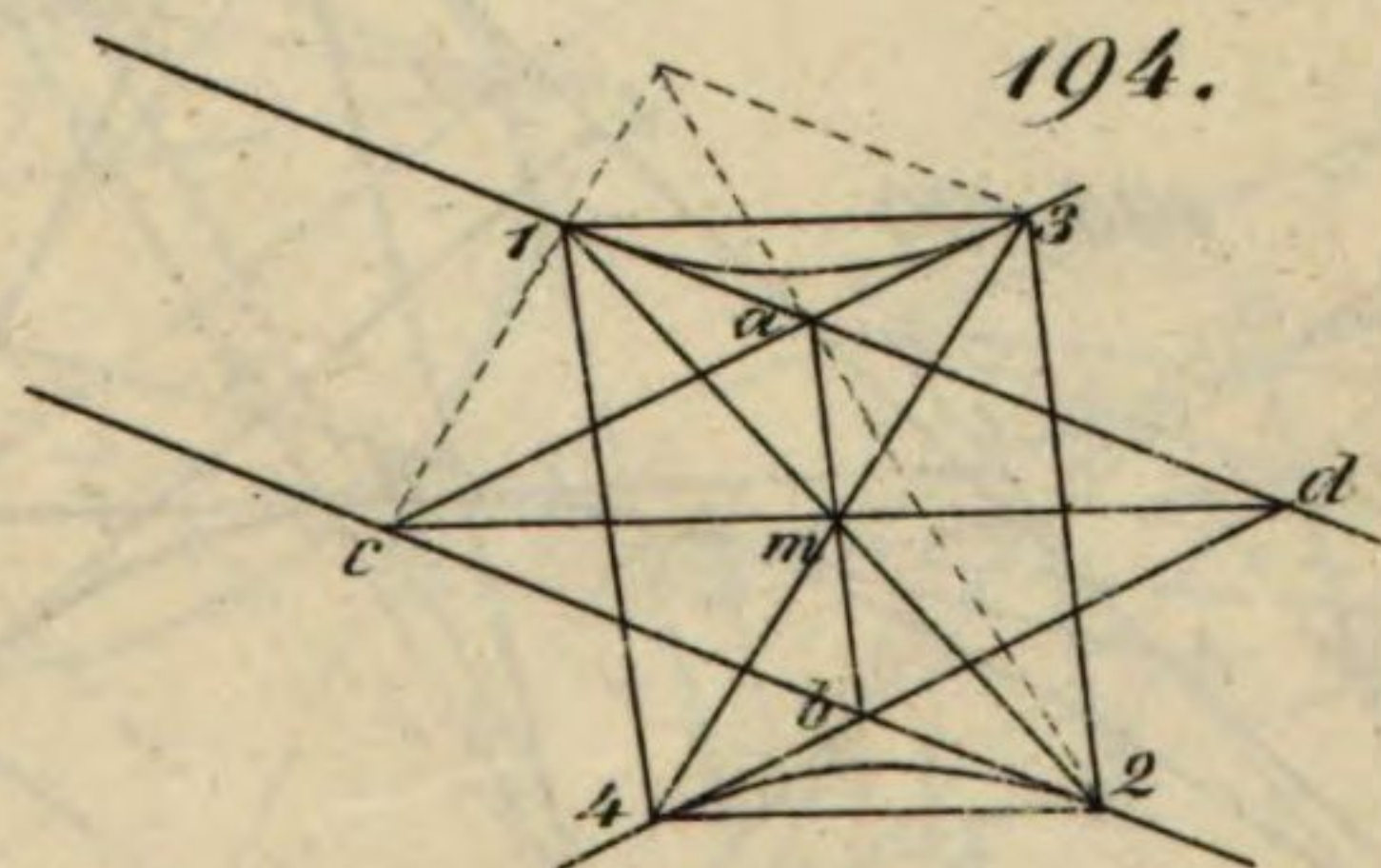
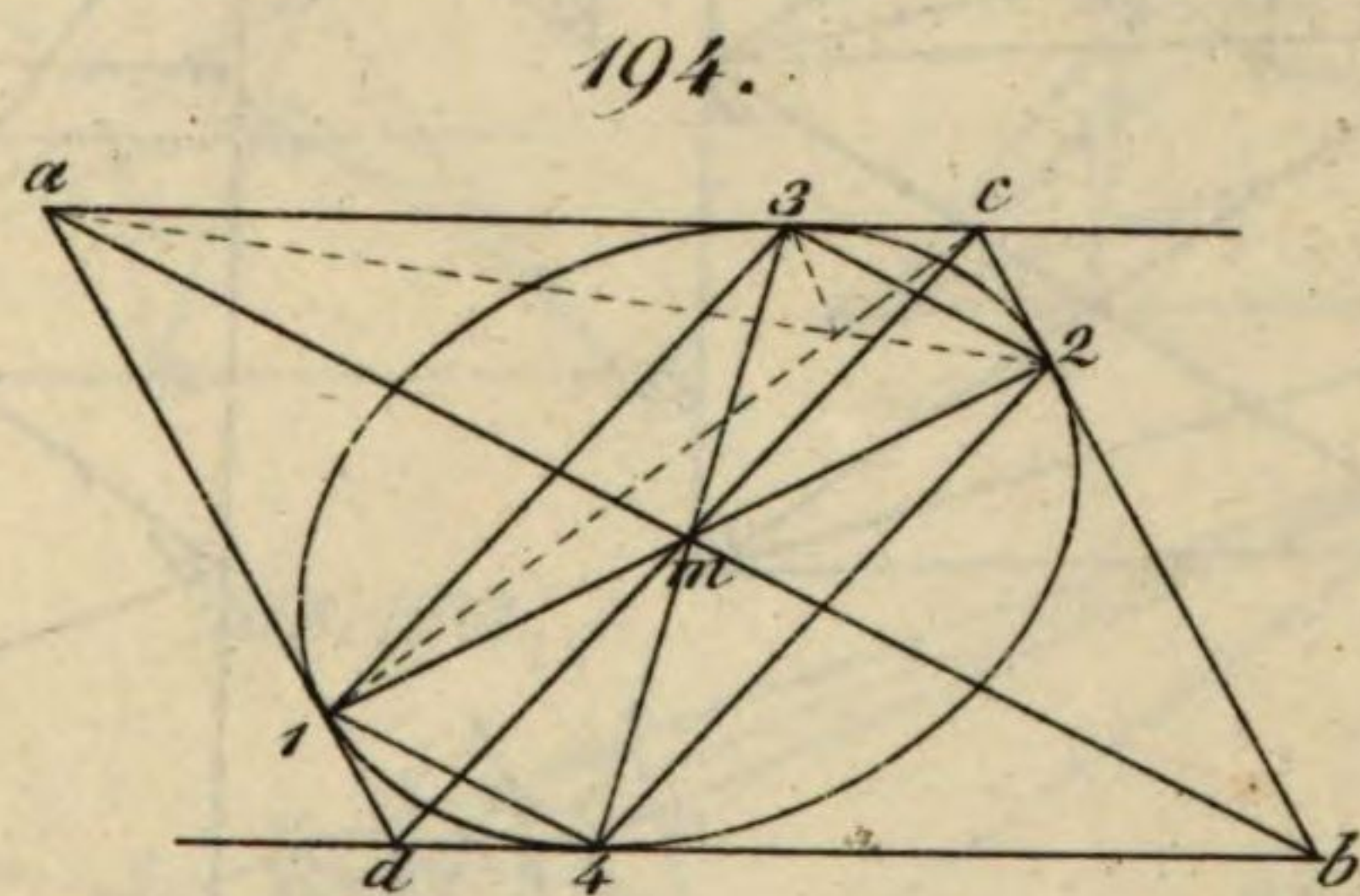
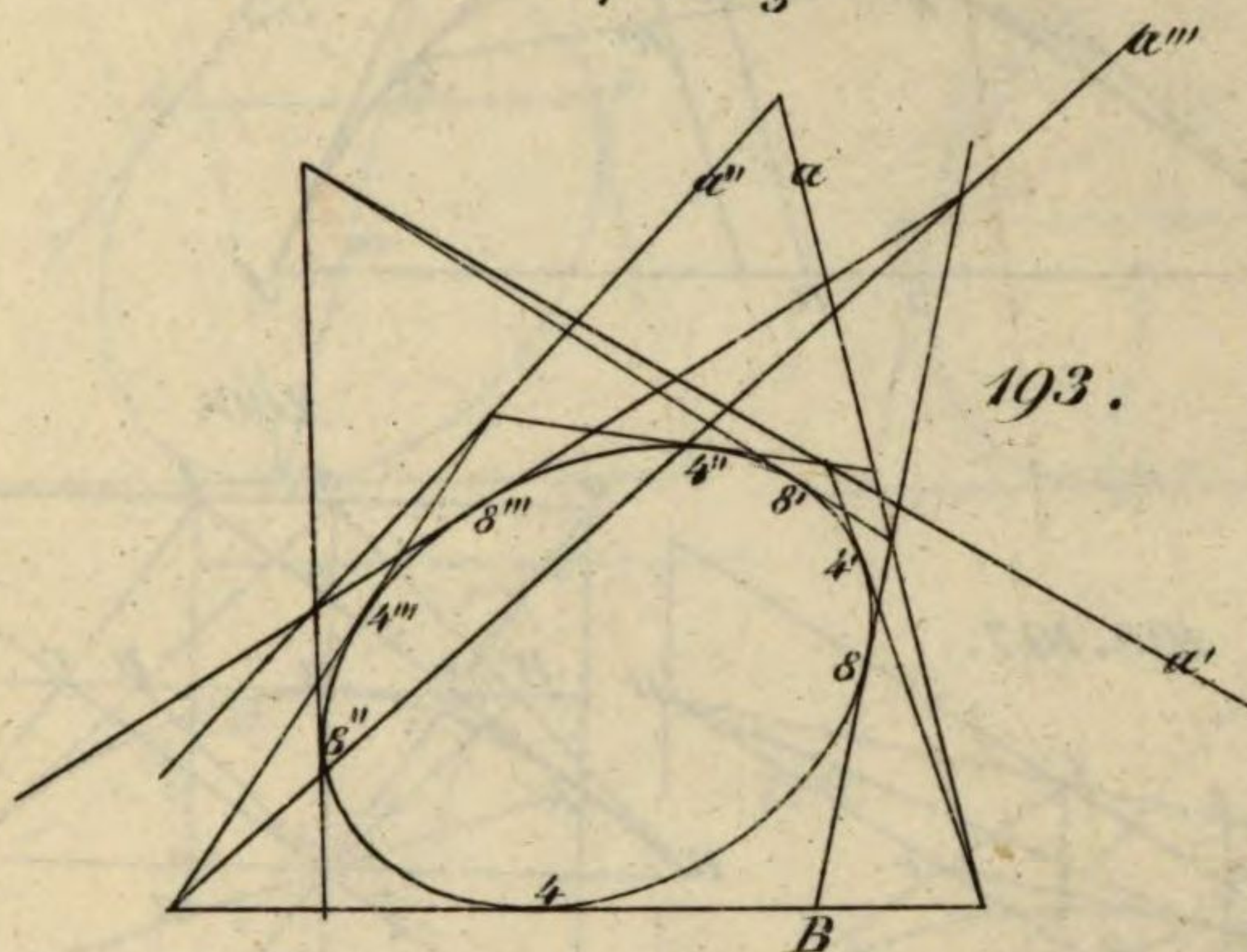
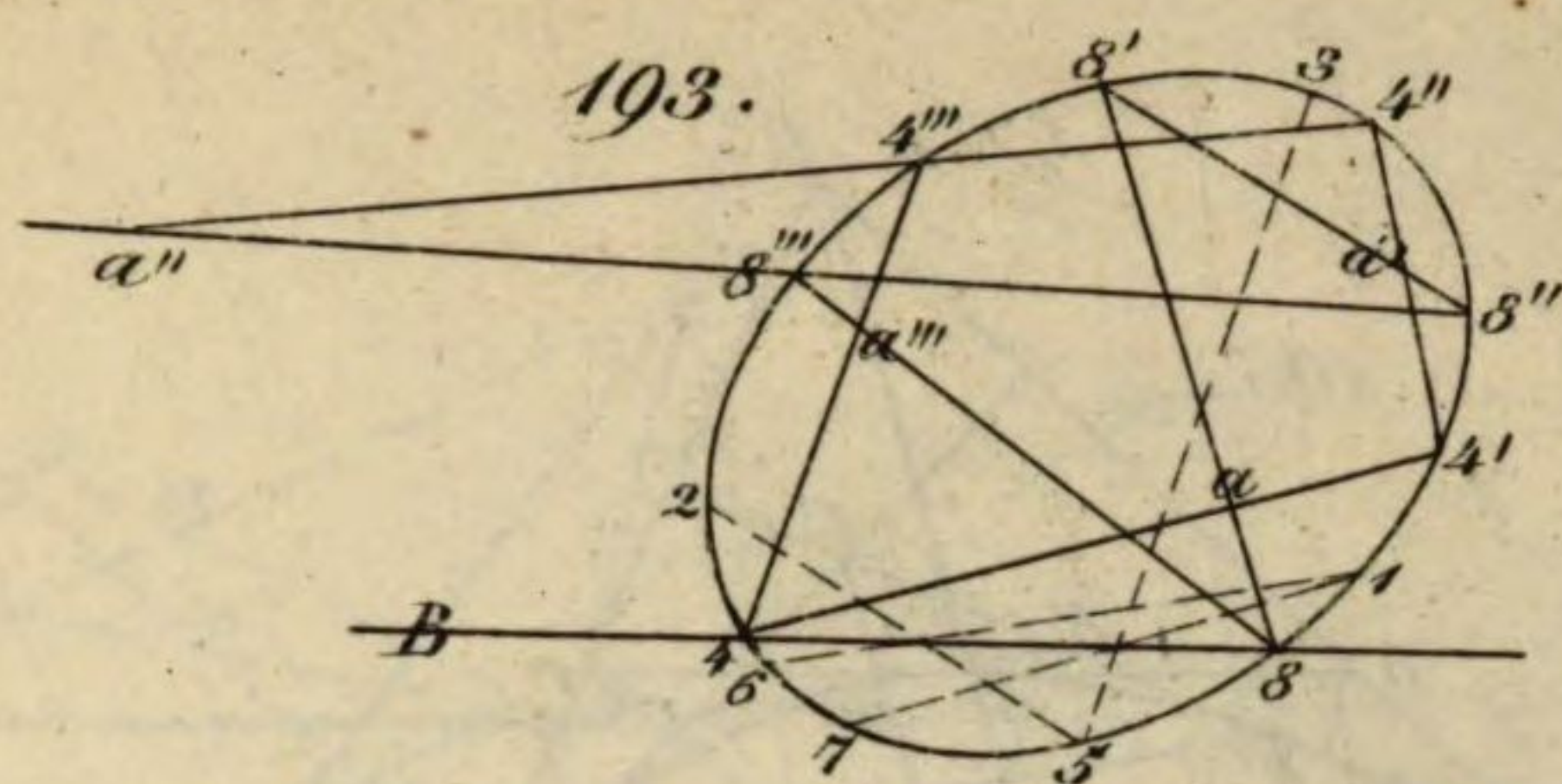


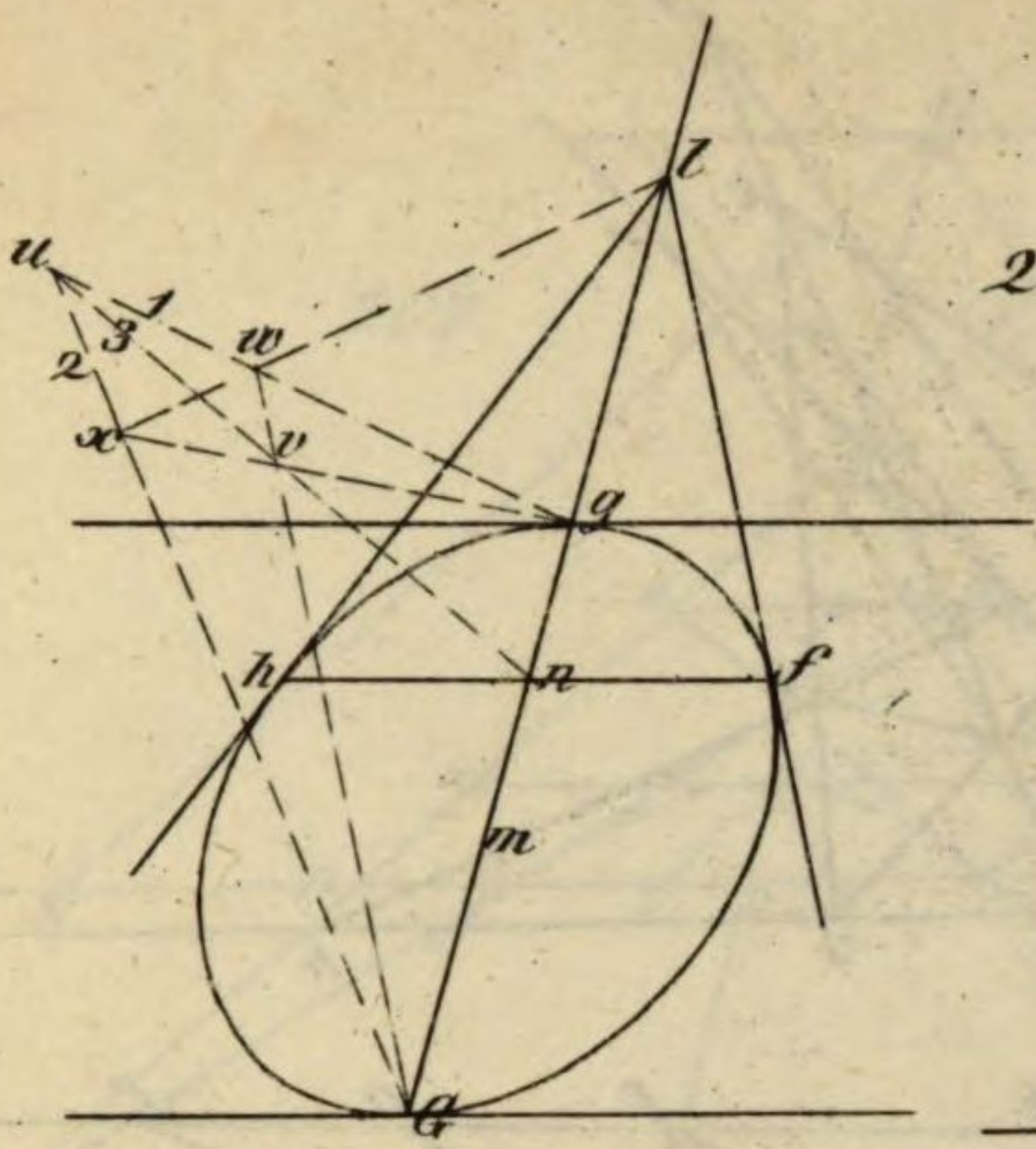
191.



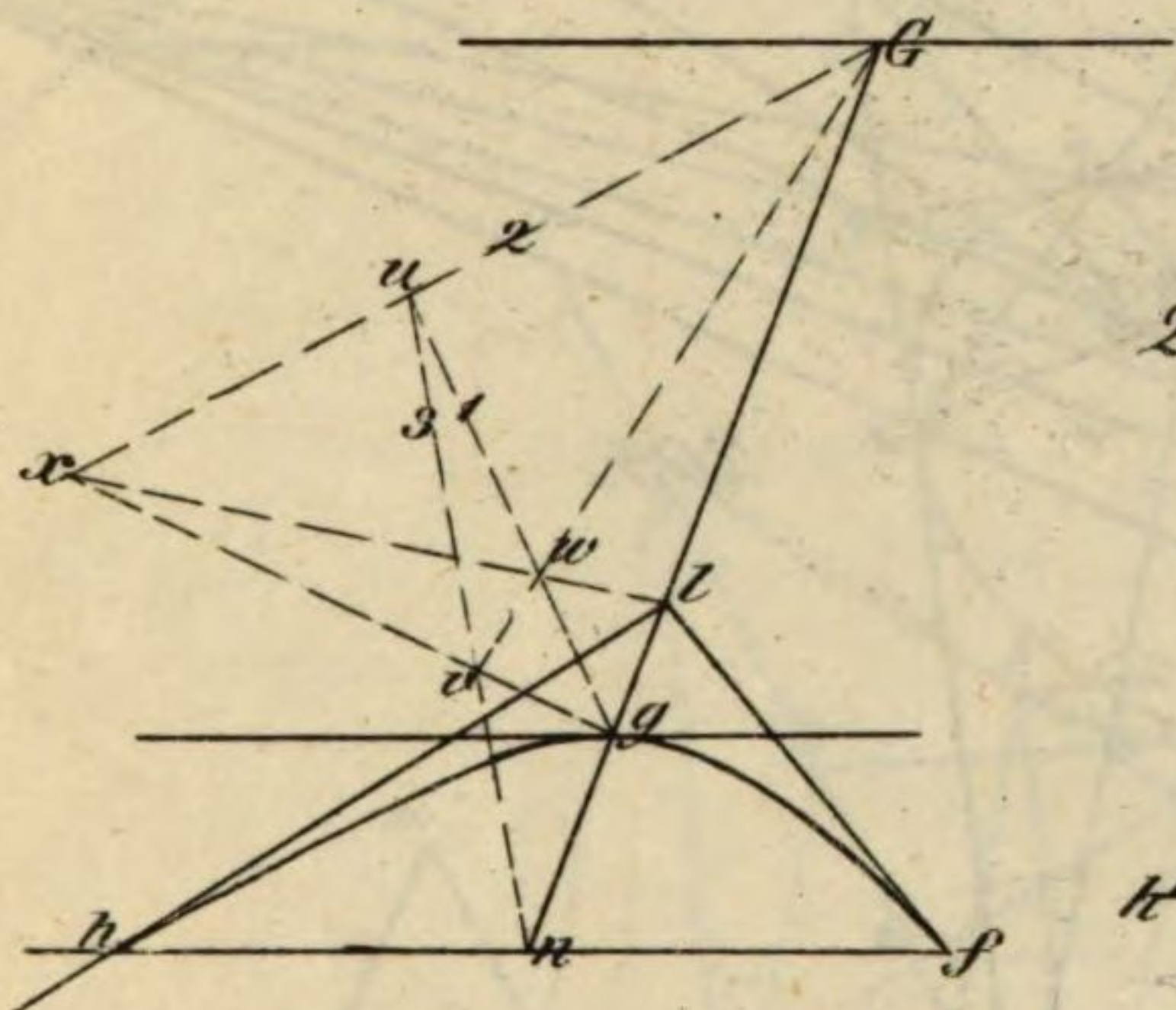
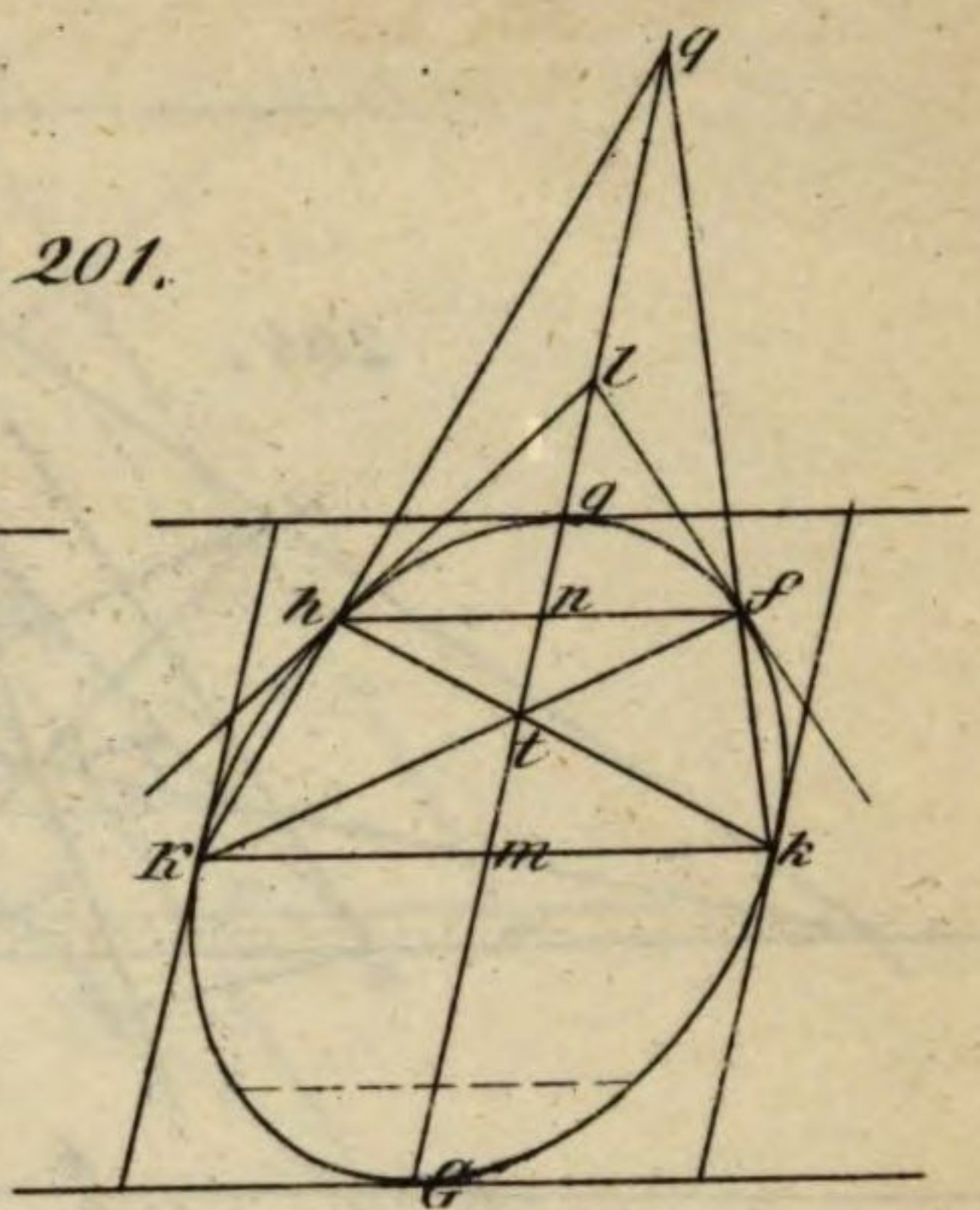
191.



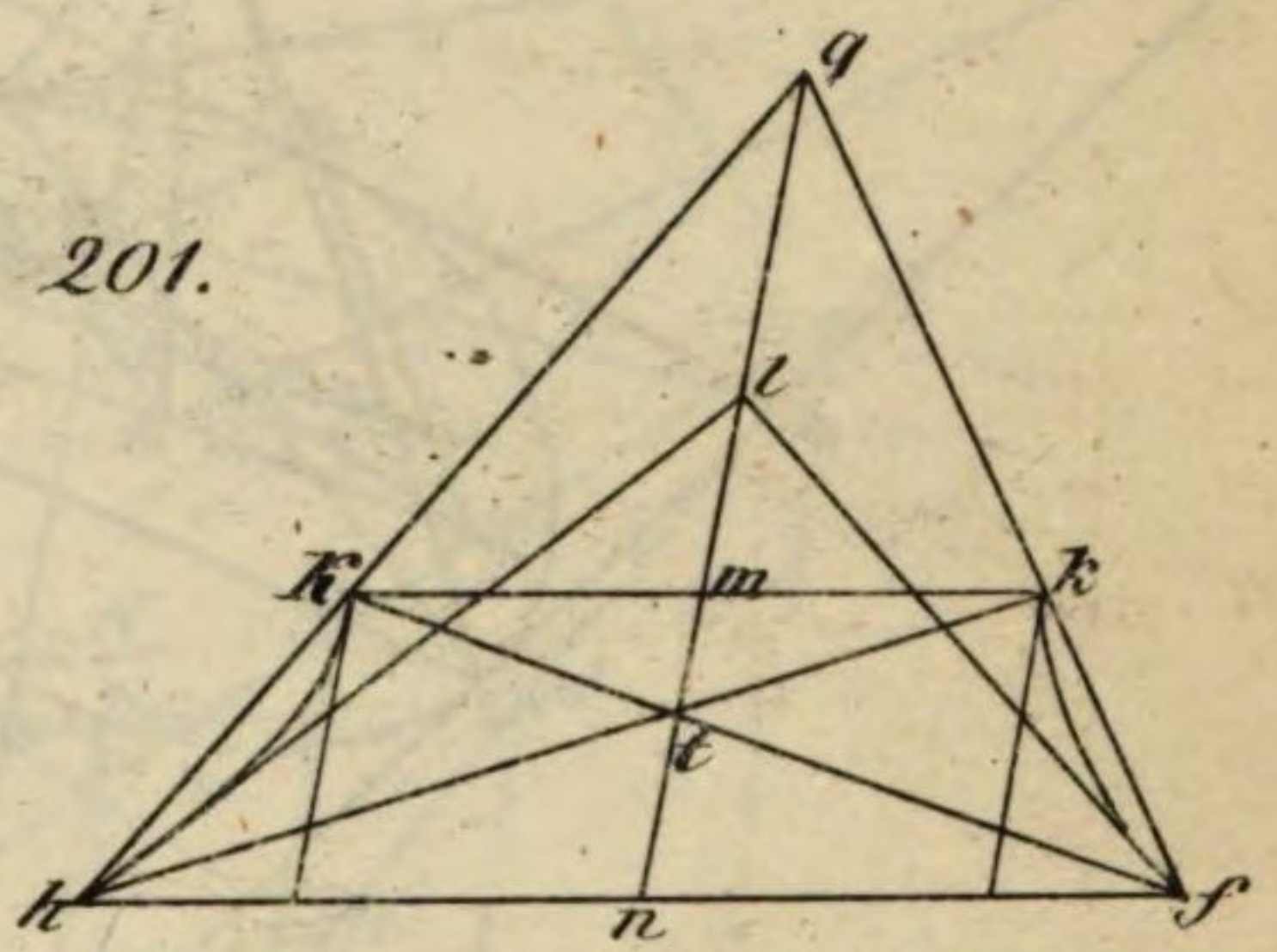




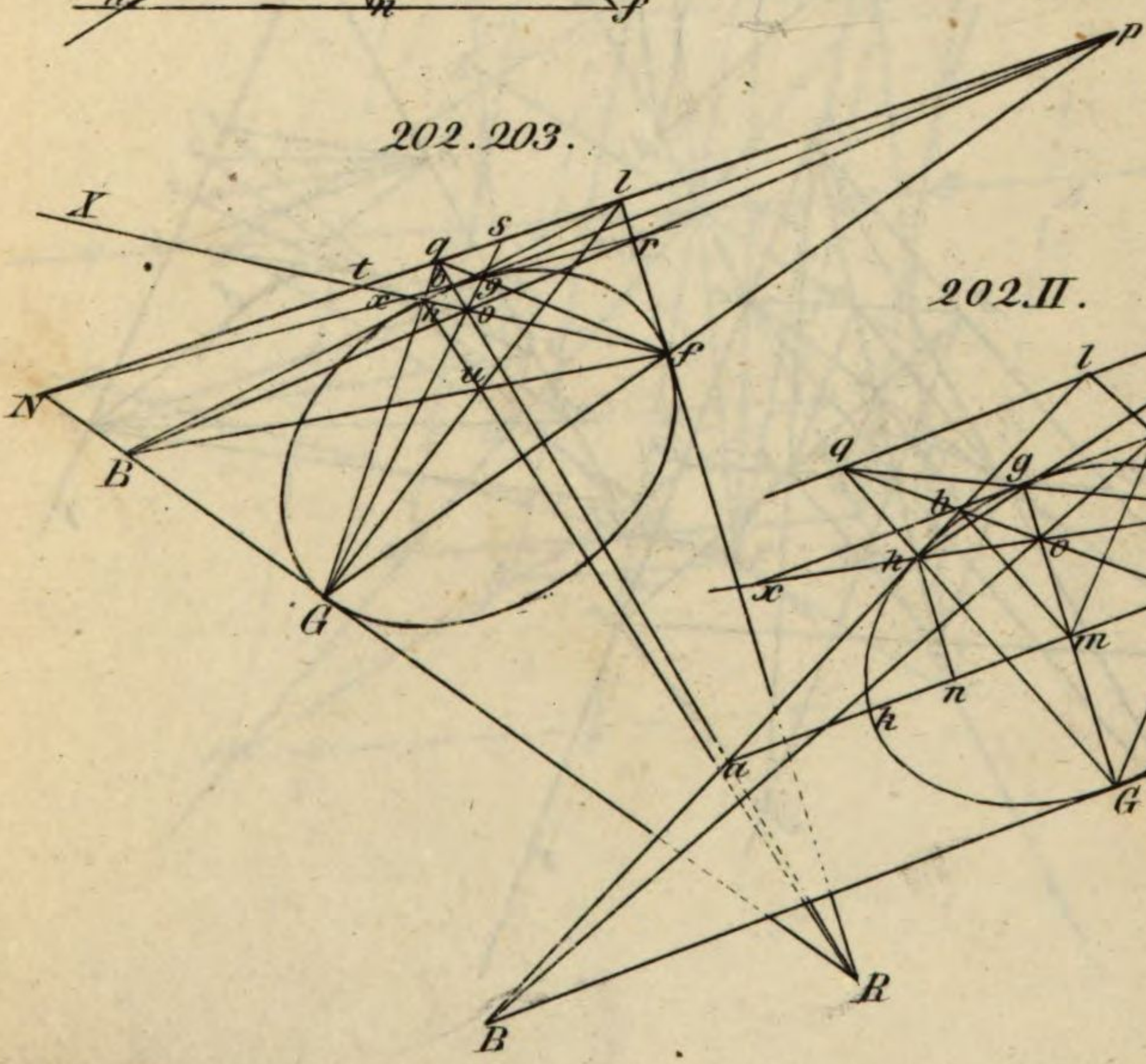
201.



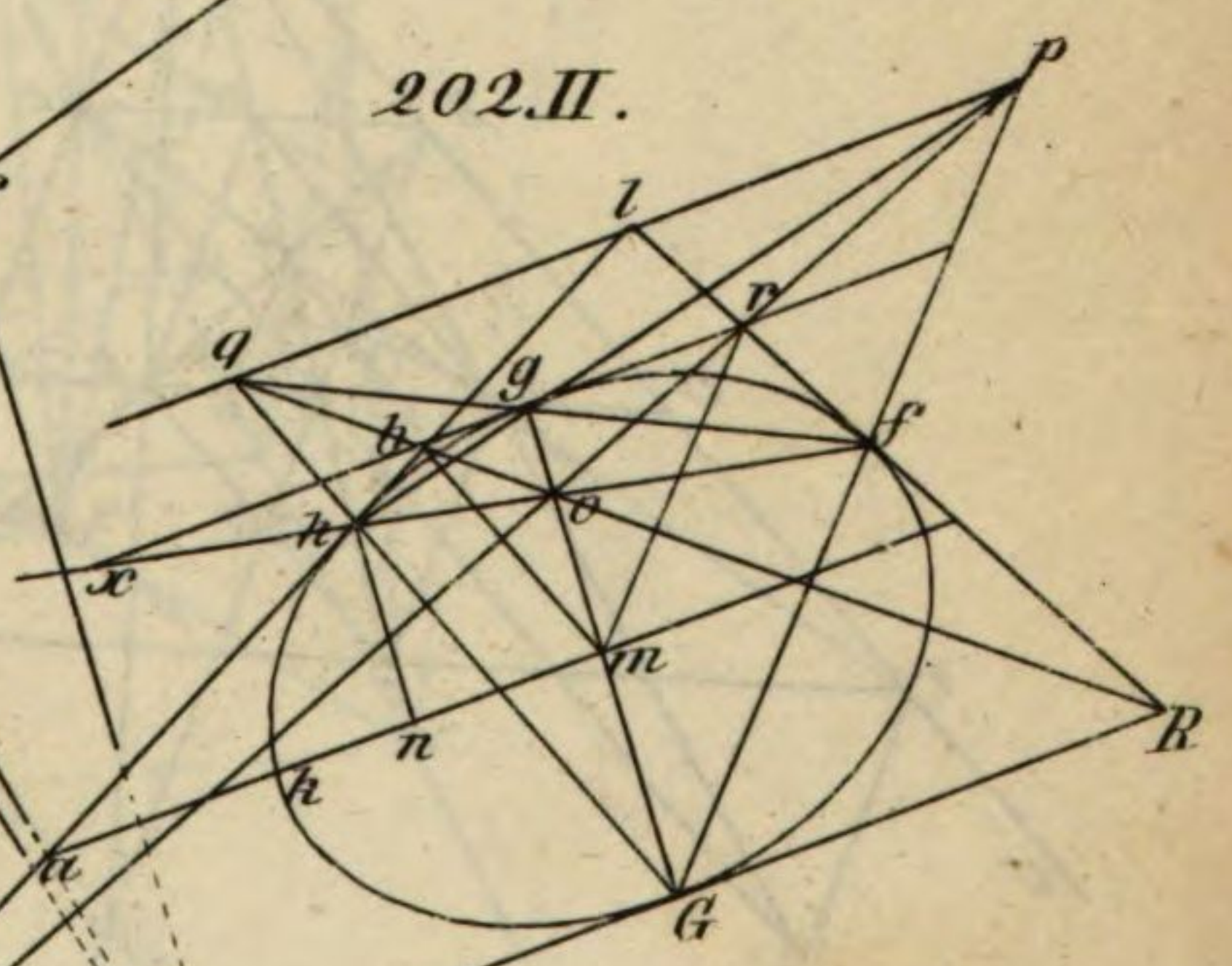
201.

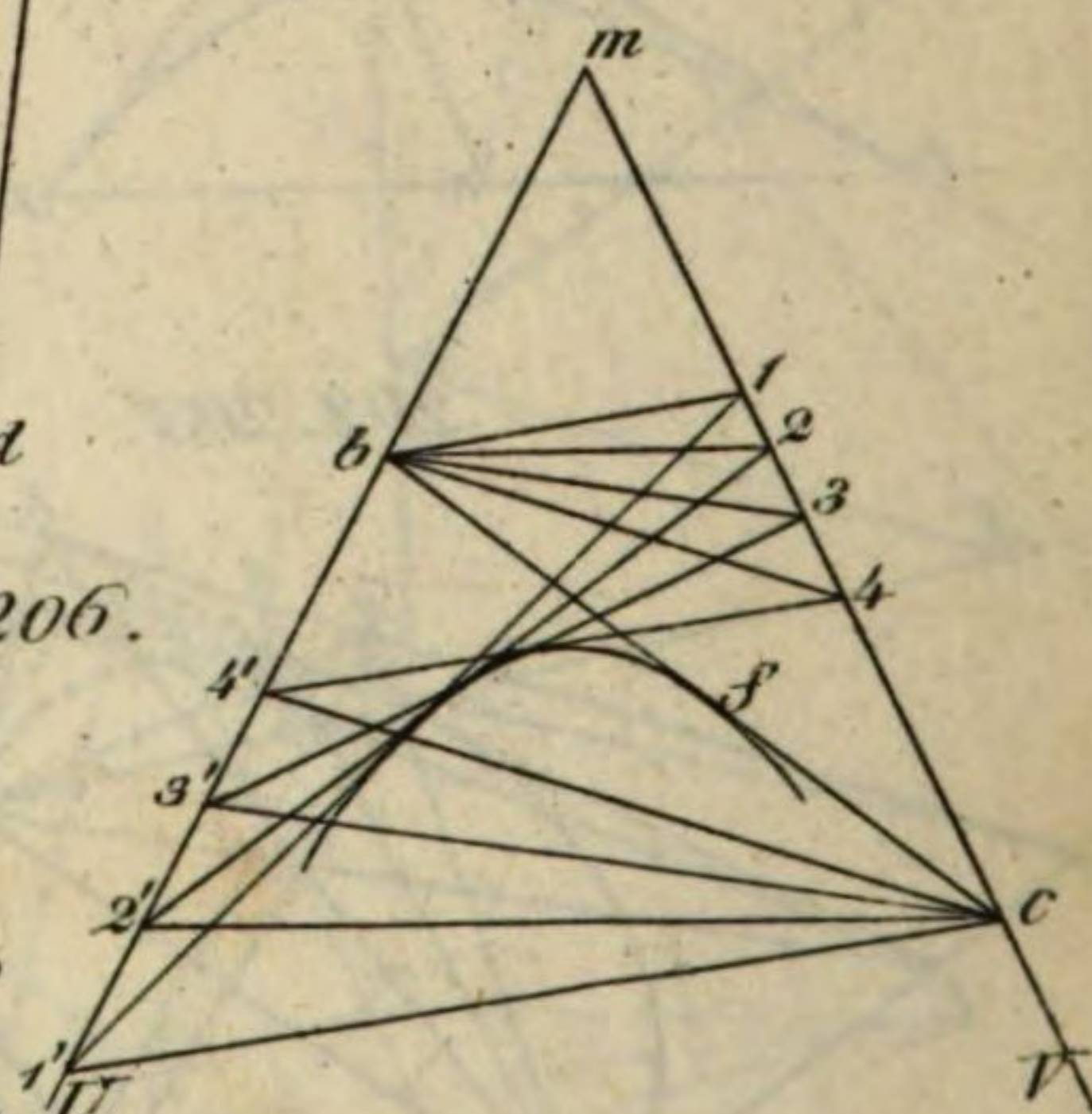
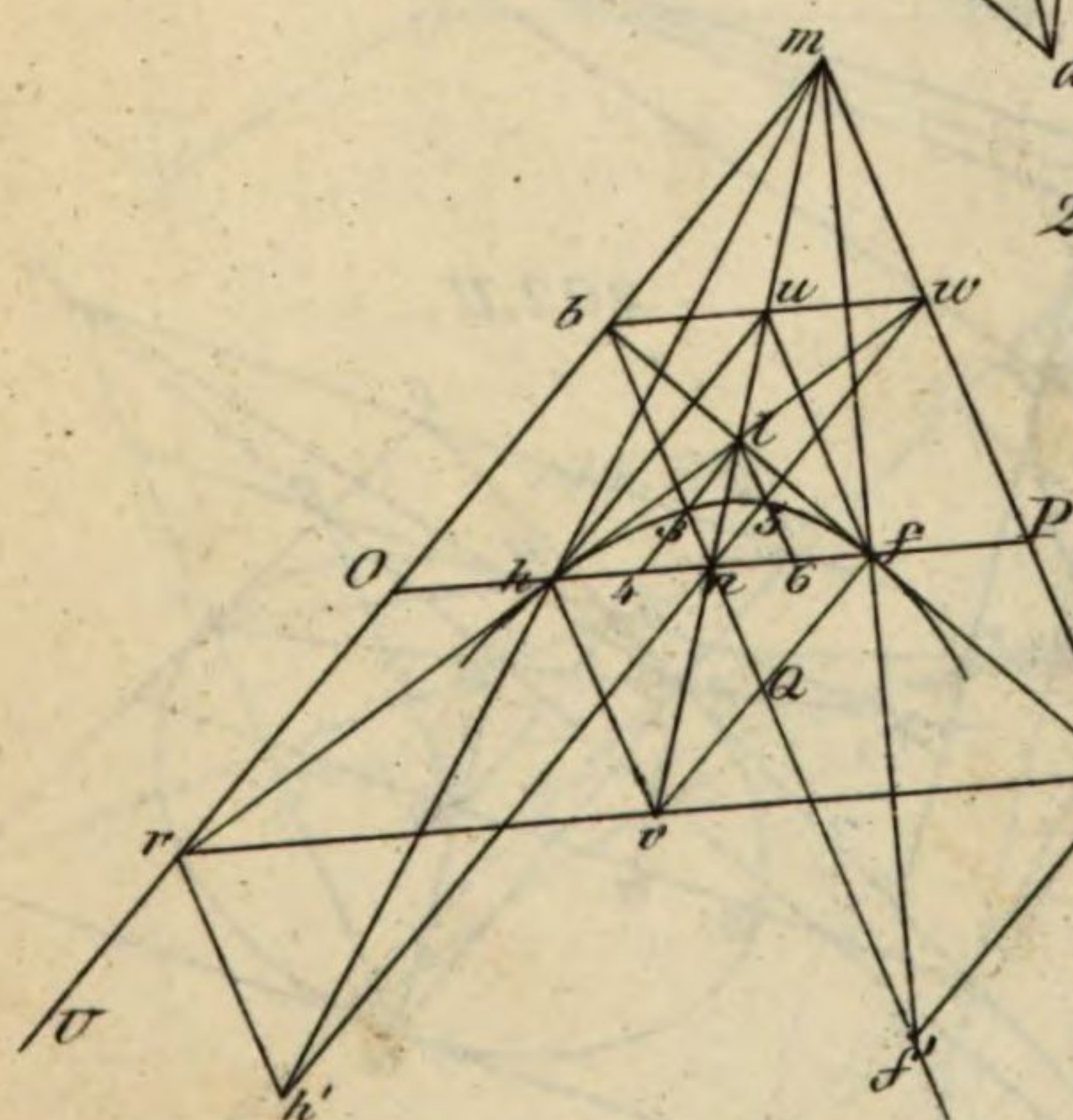
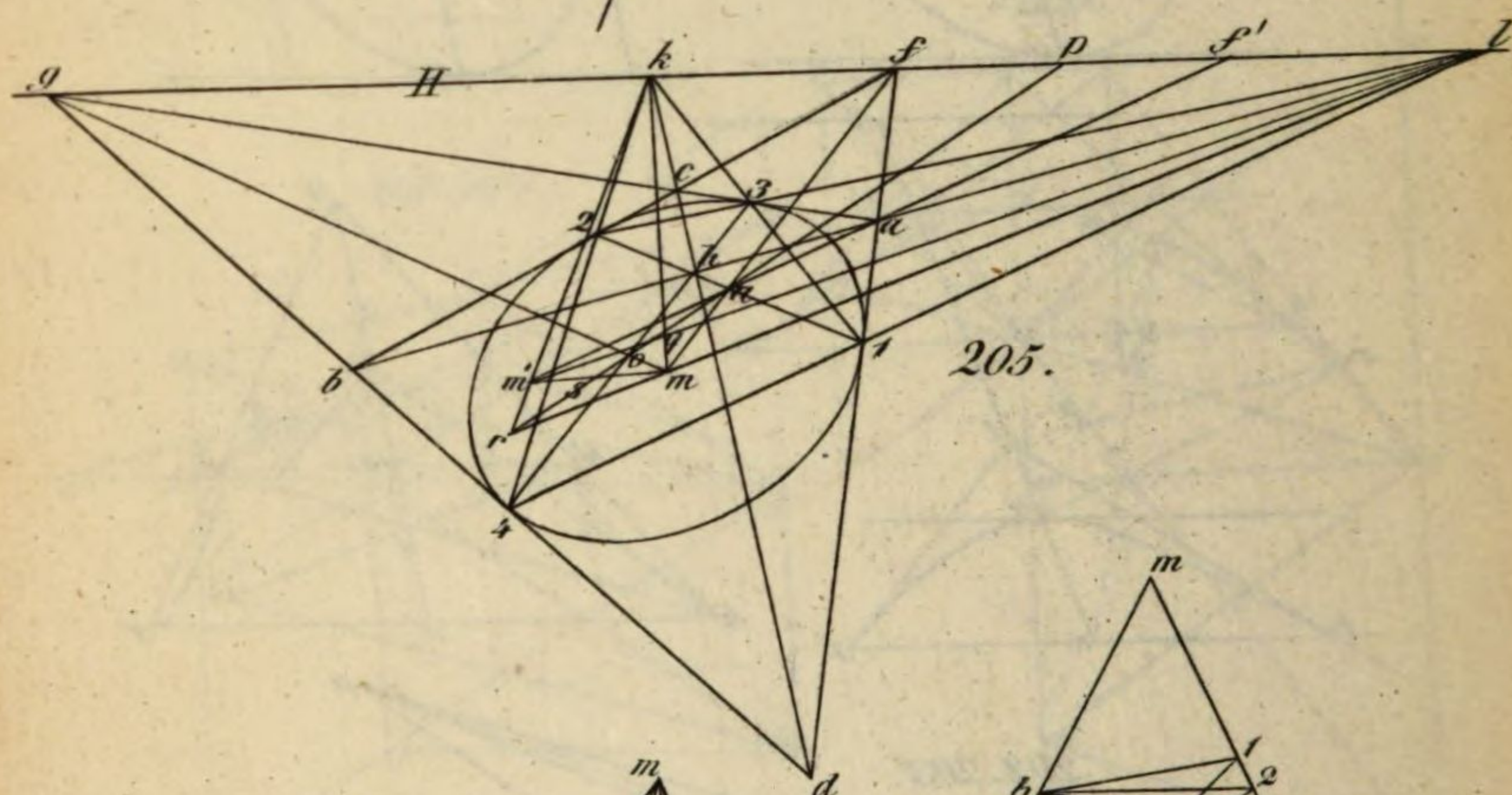
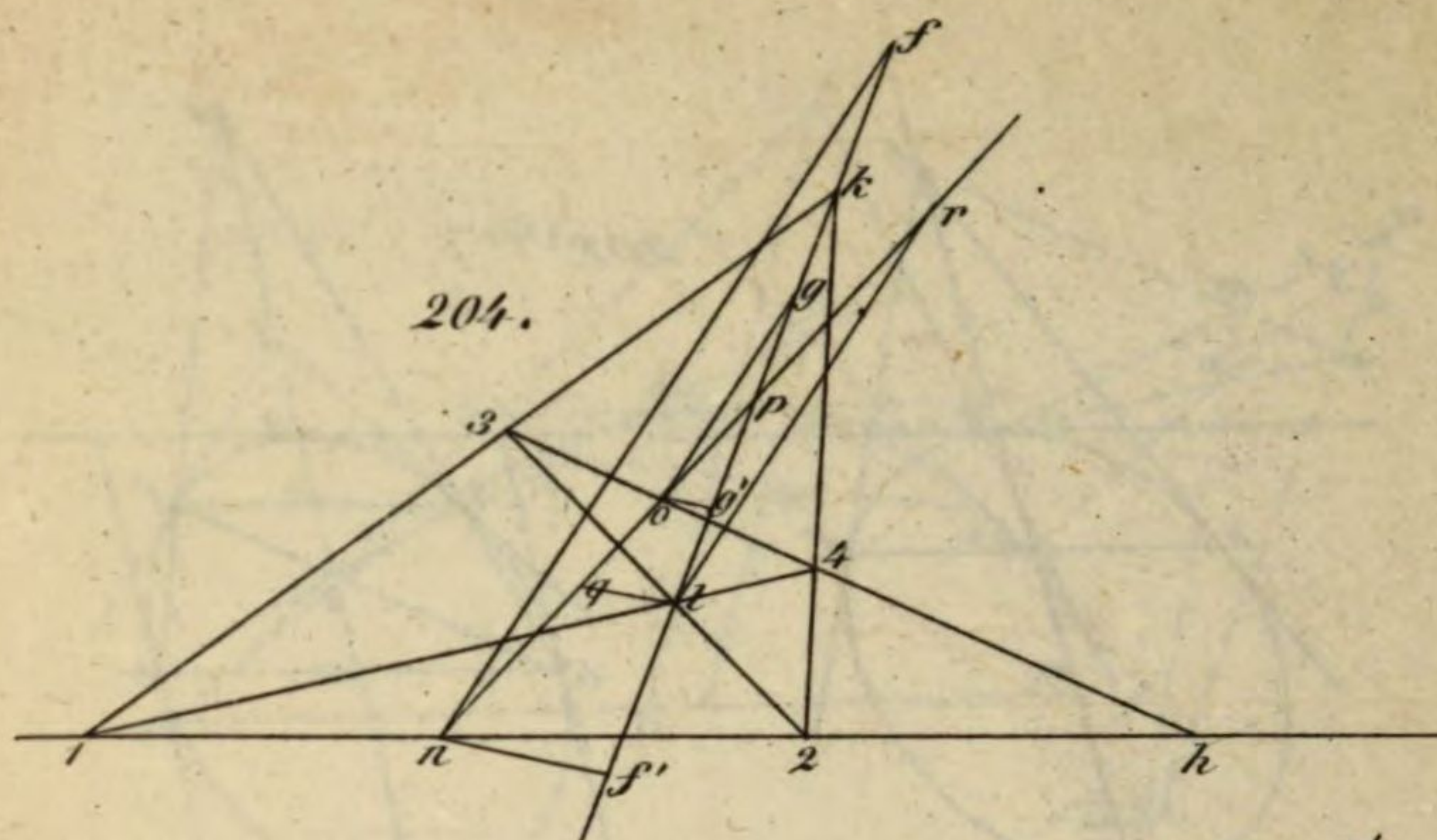


202.203.

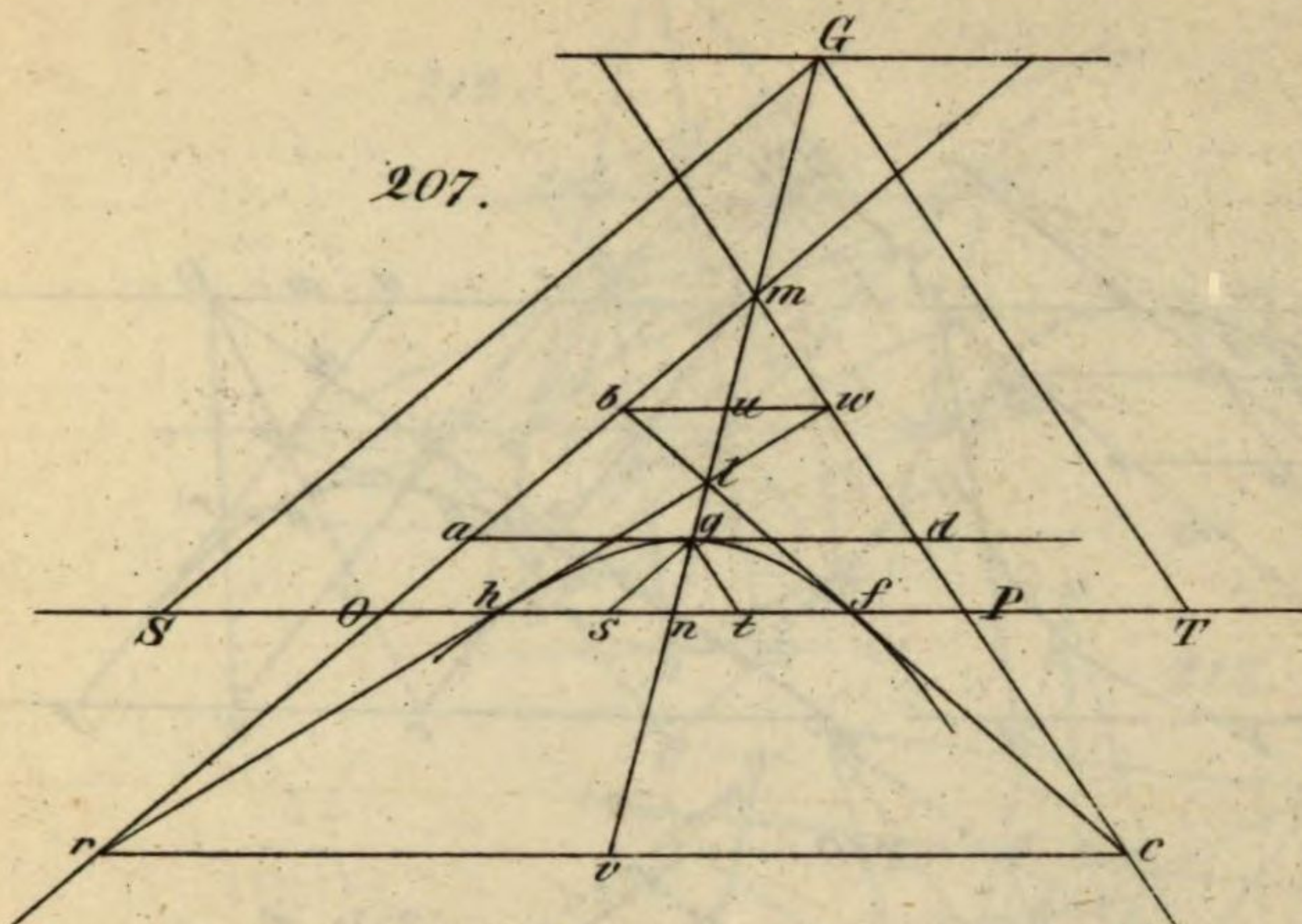


202.II.

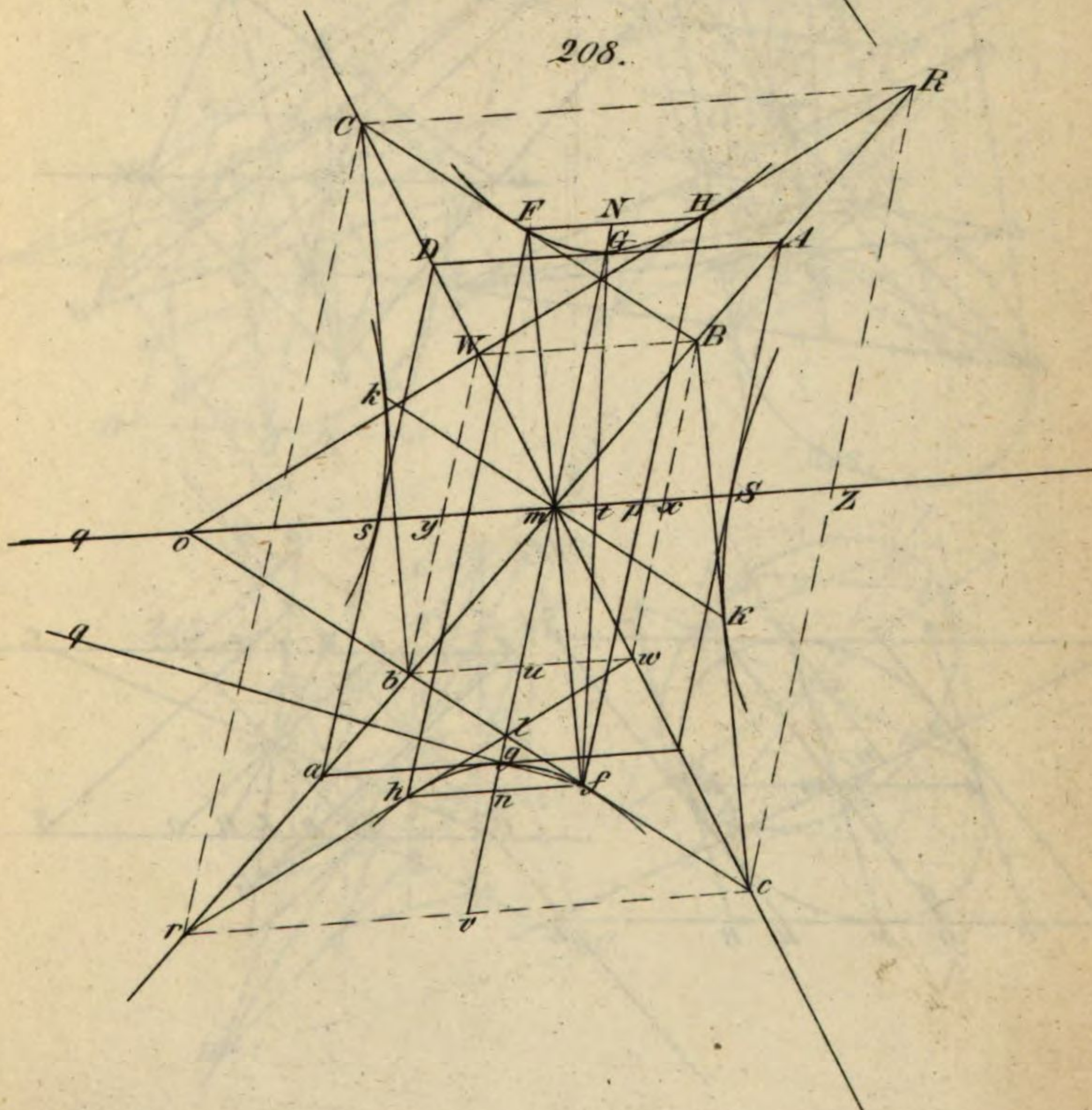




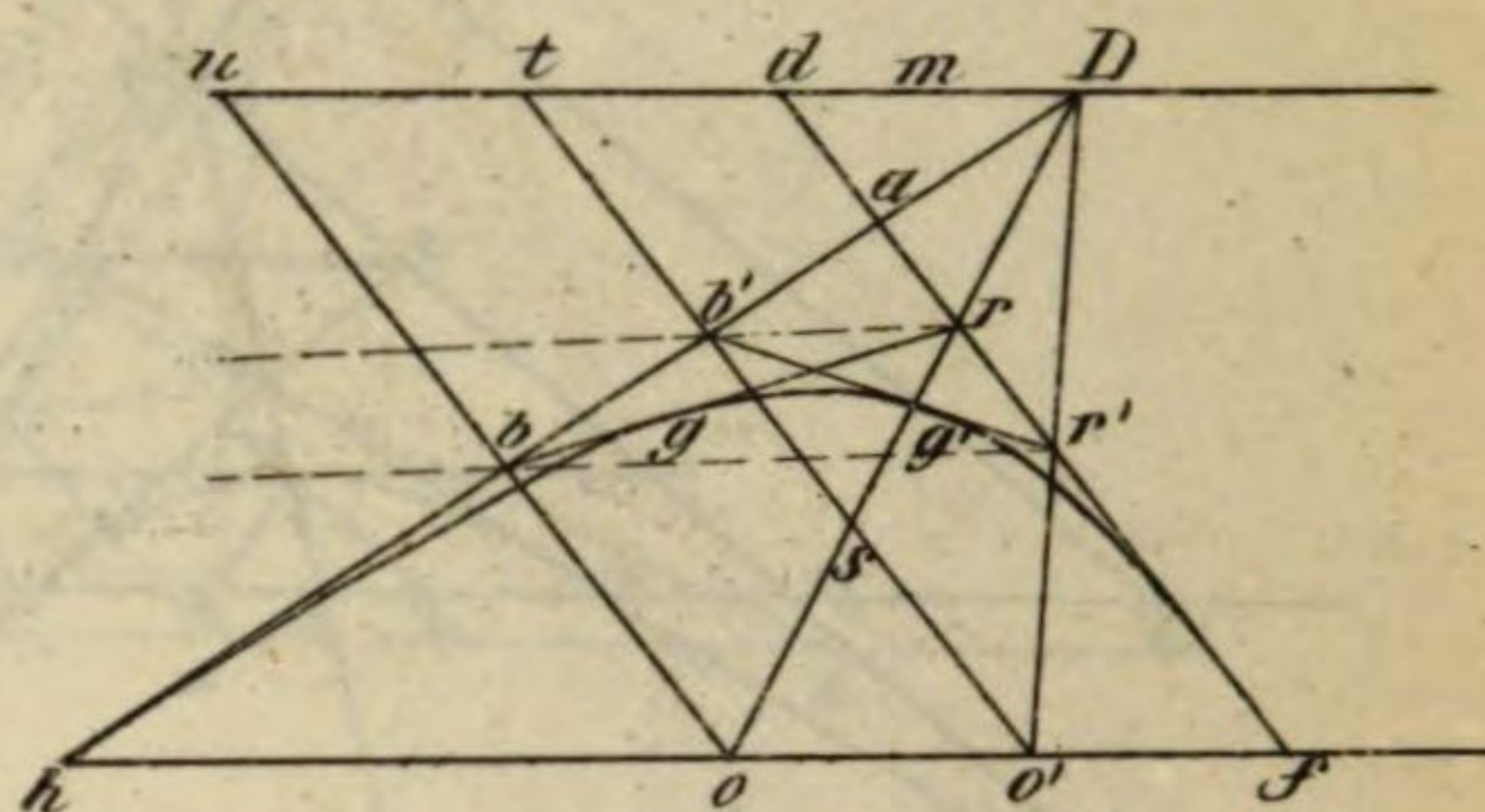
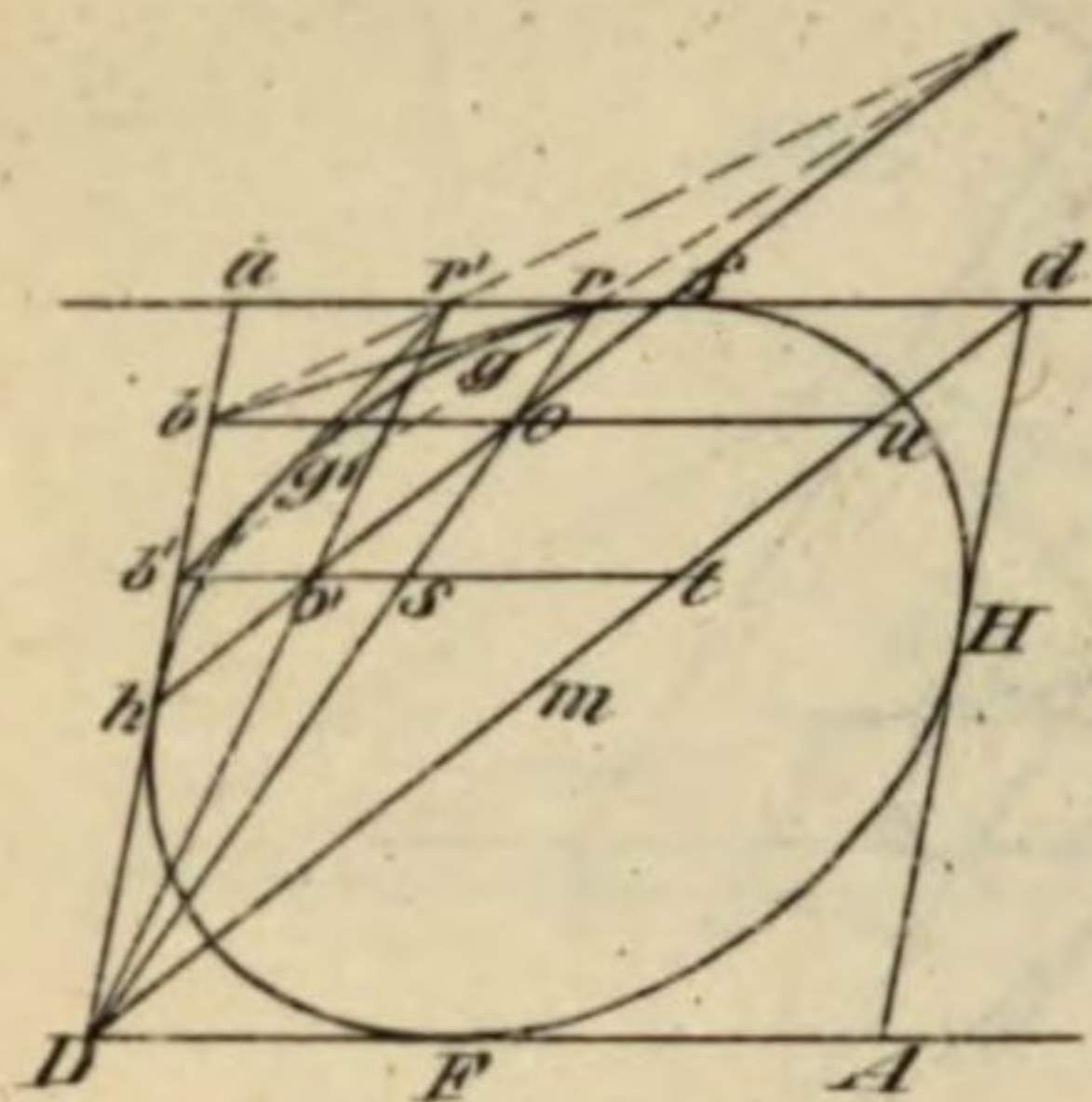
207.



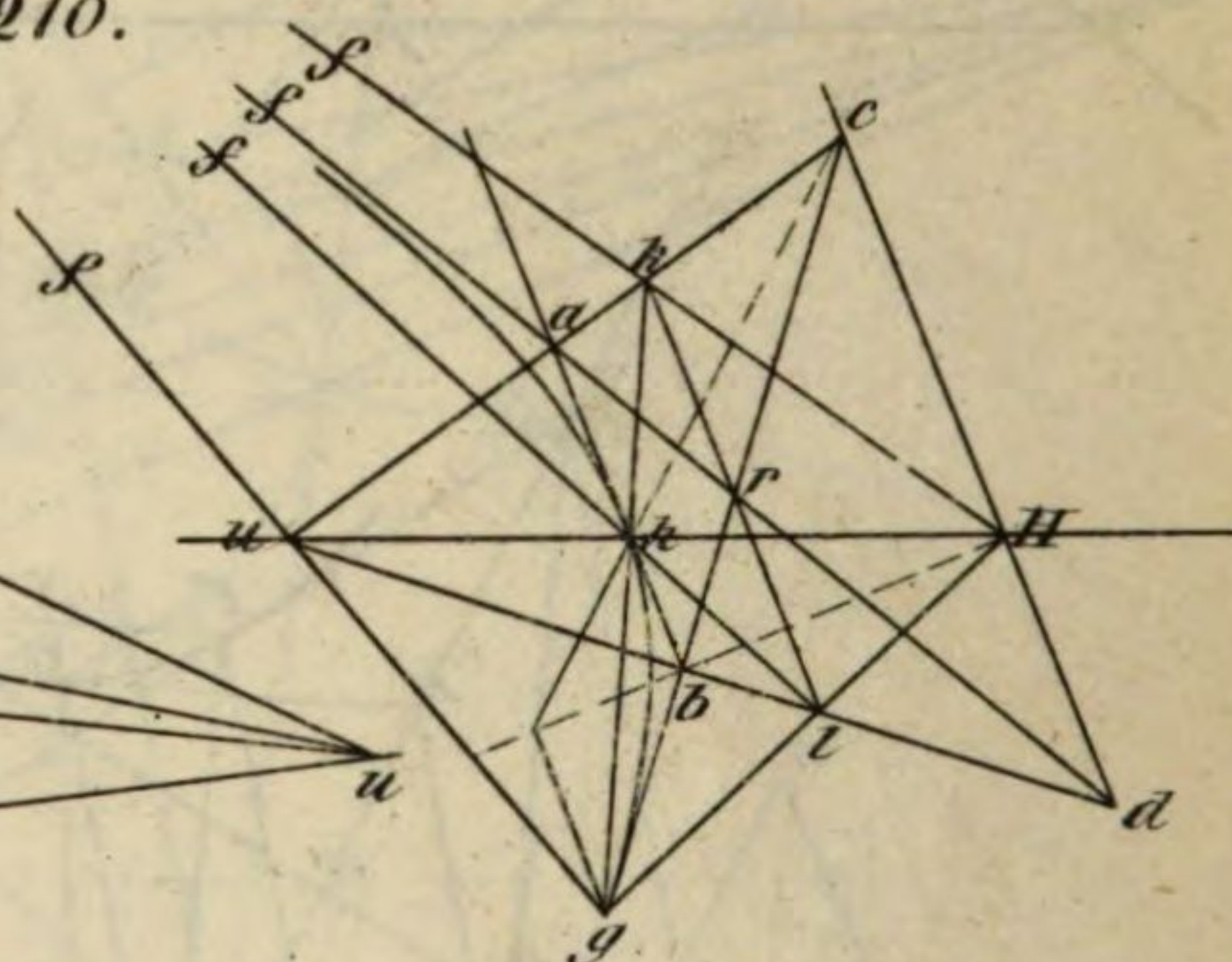
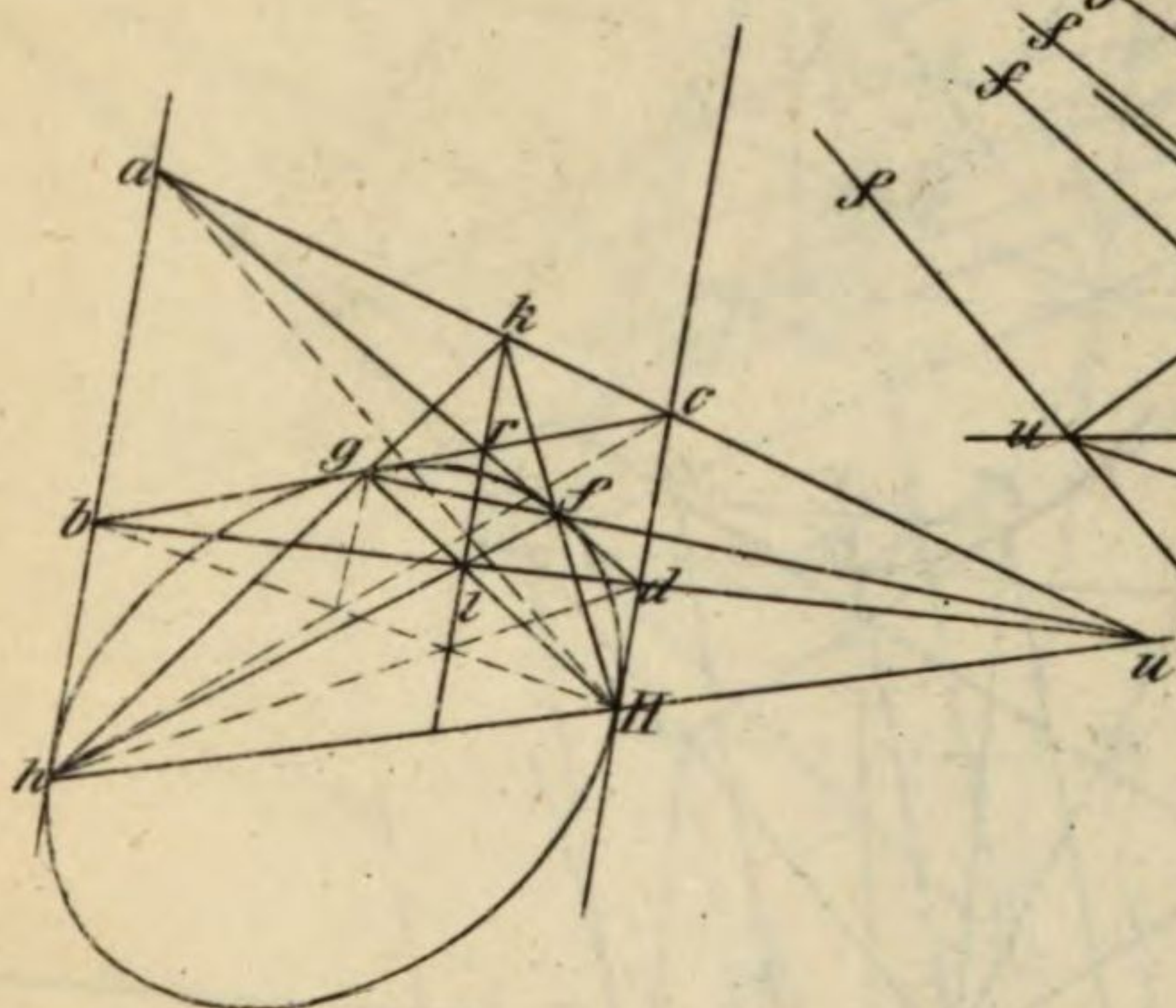
208.



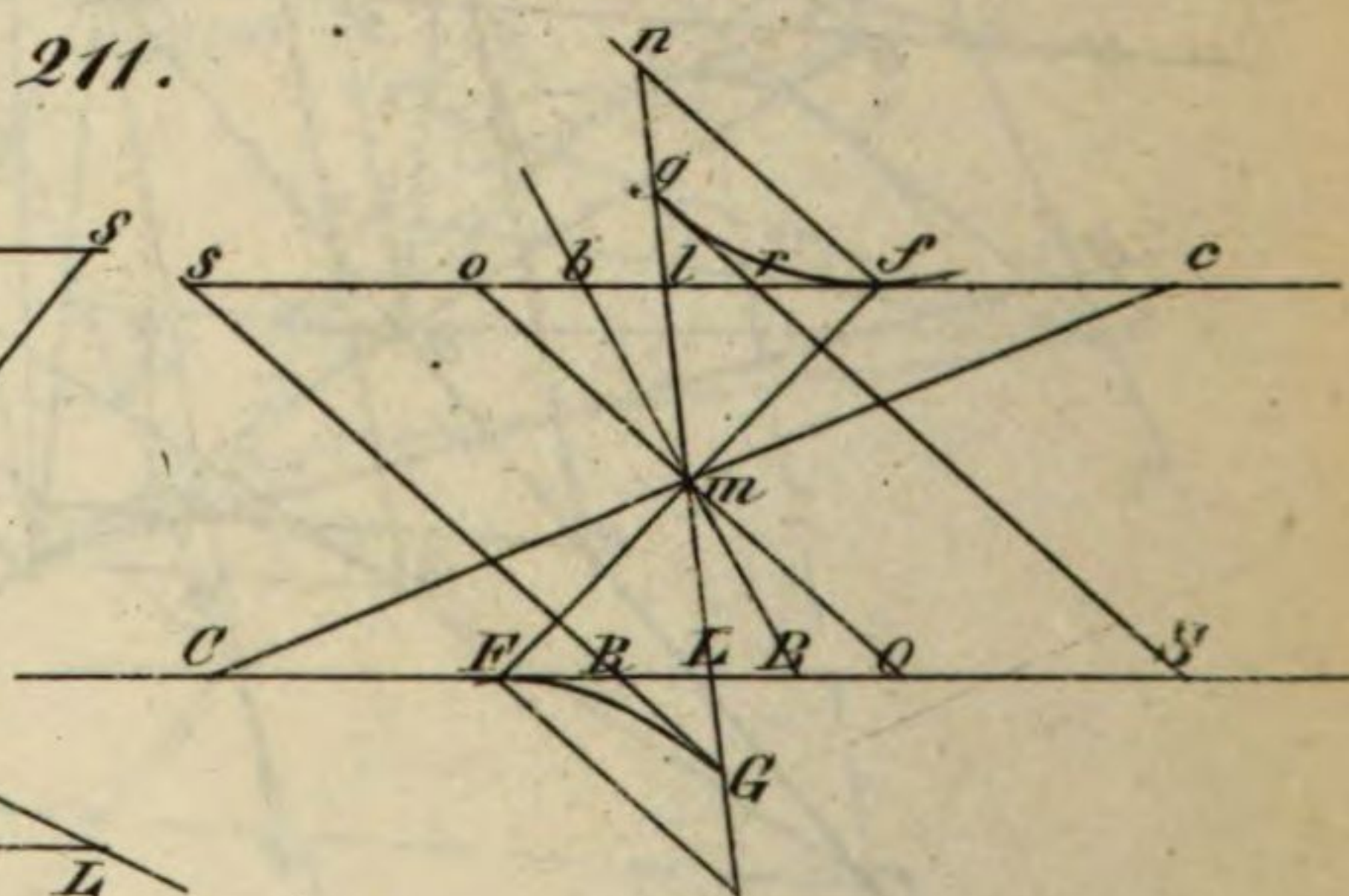
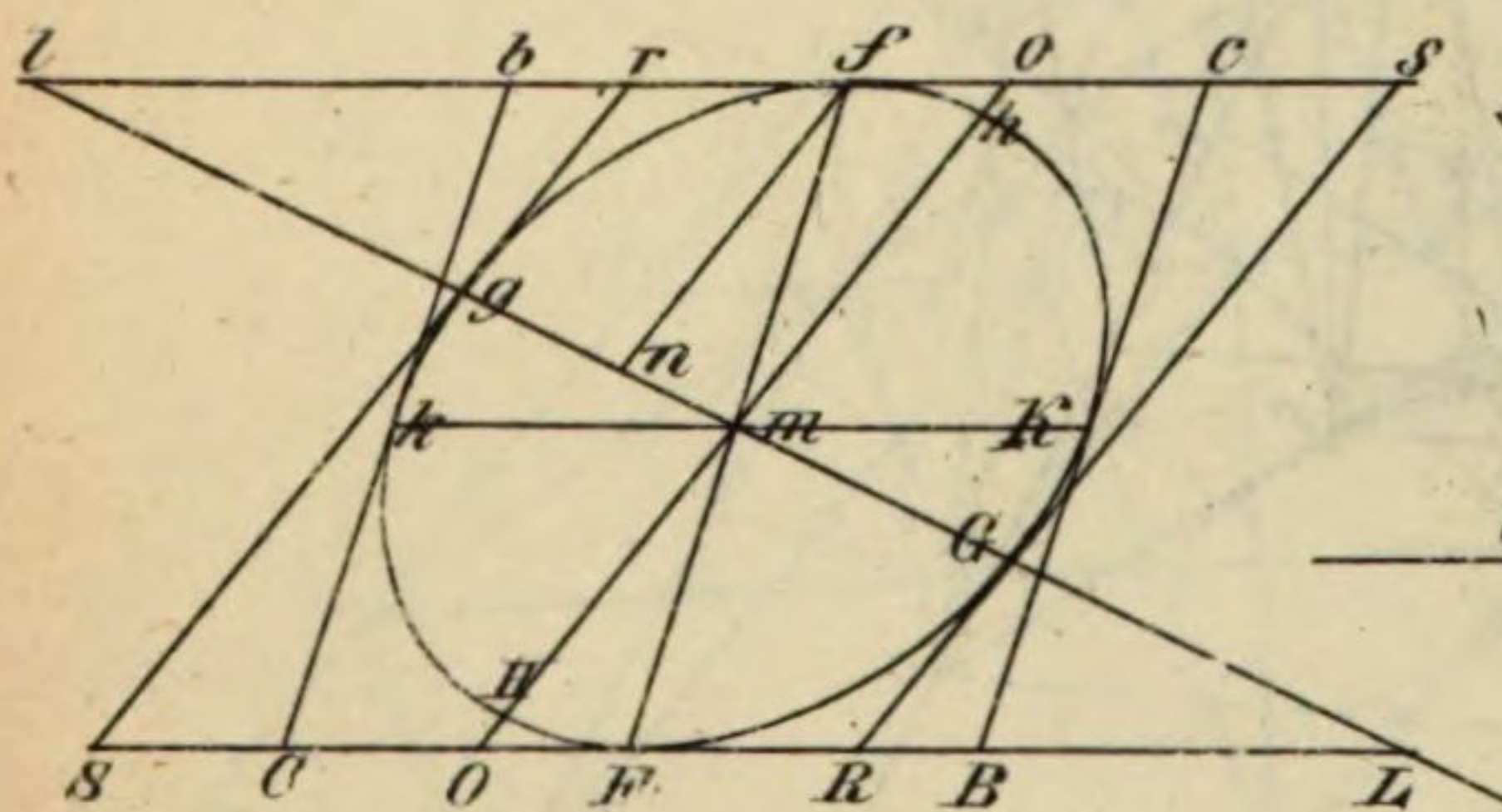
209.



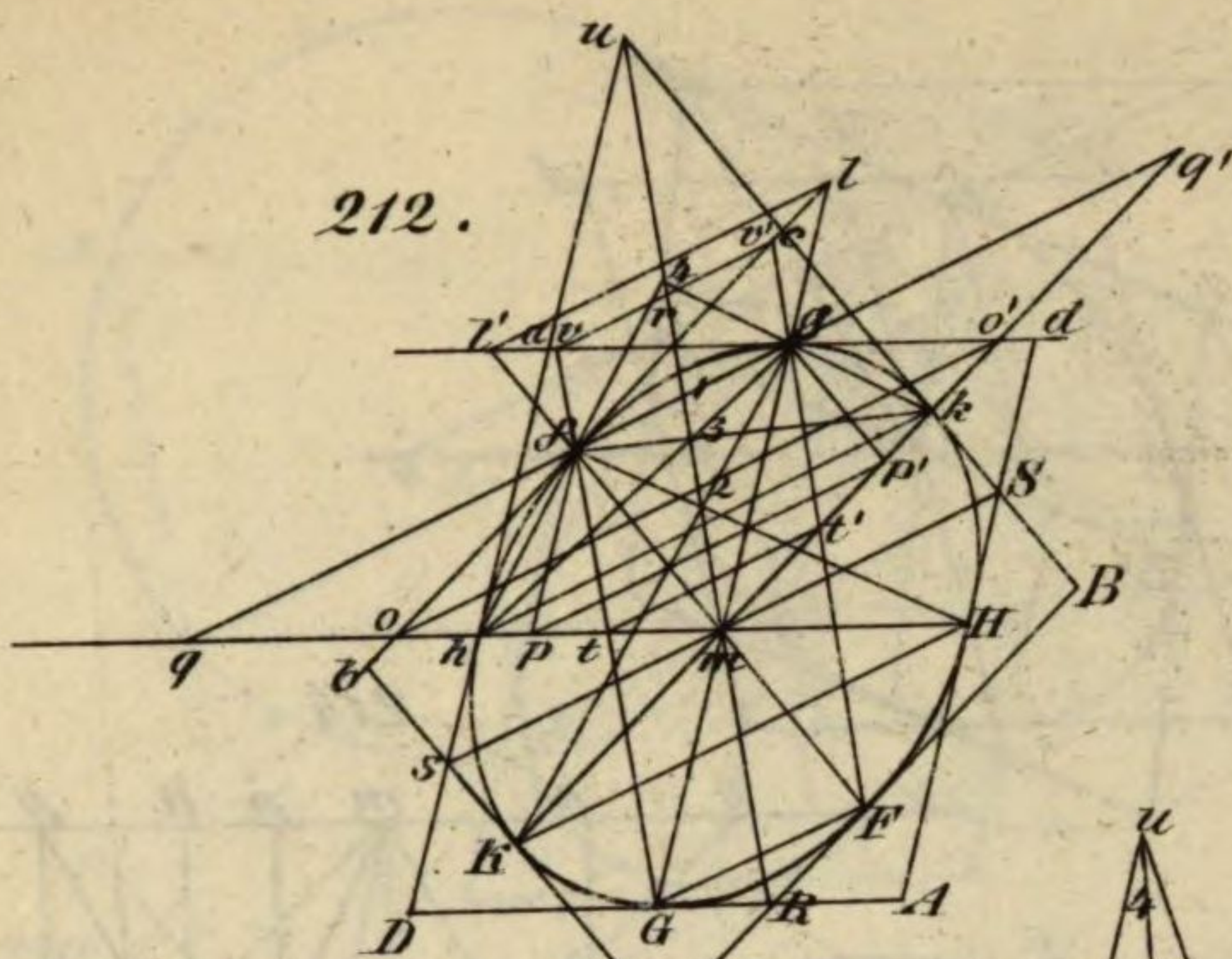
210.



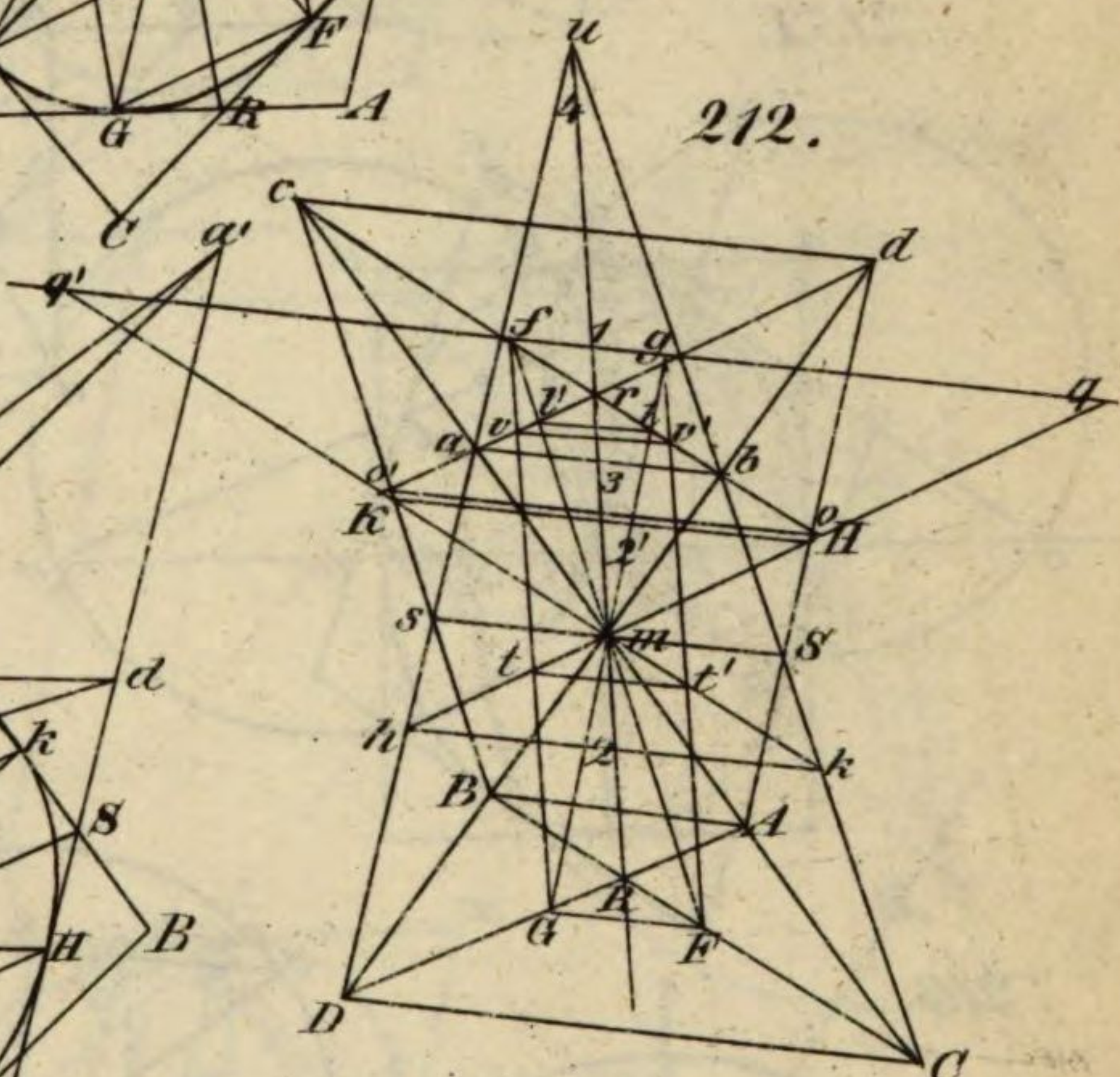
211.



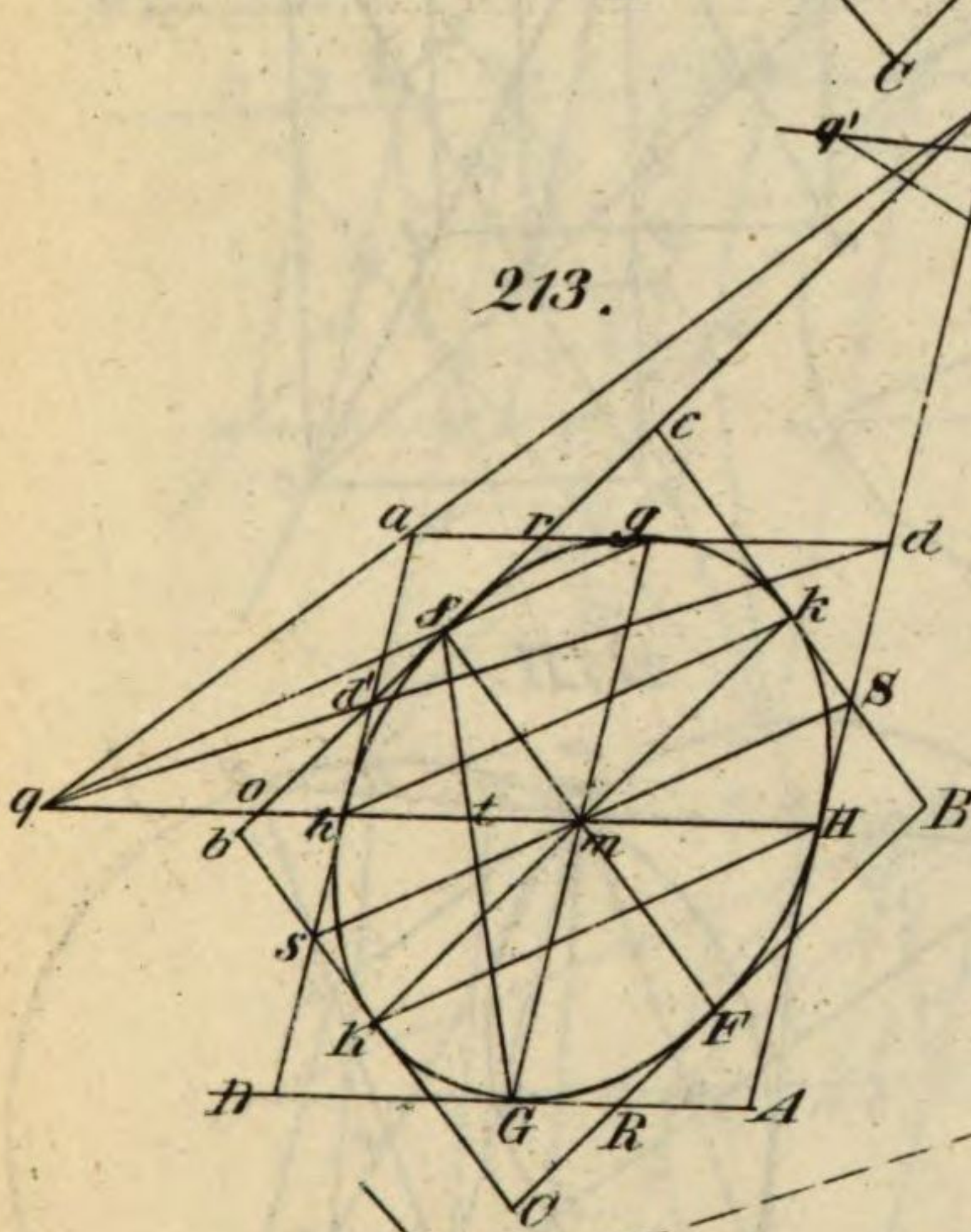
212.



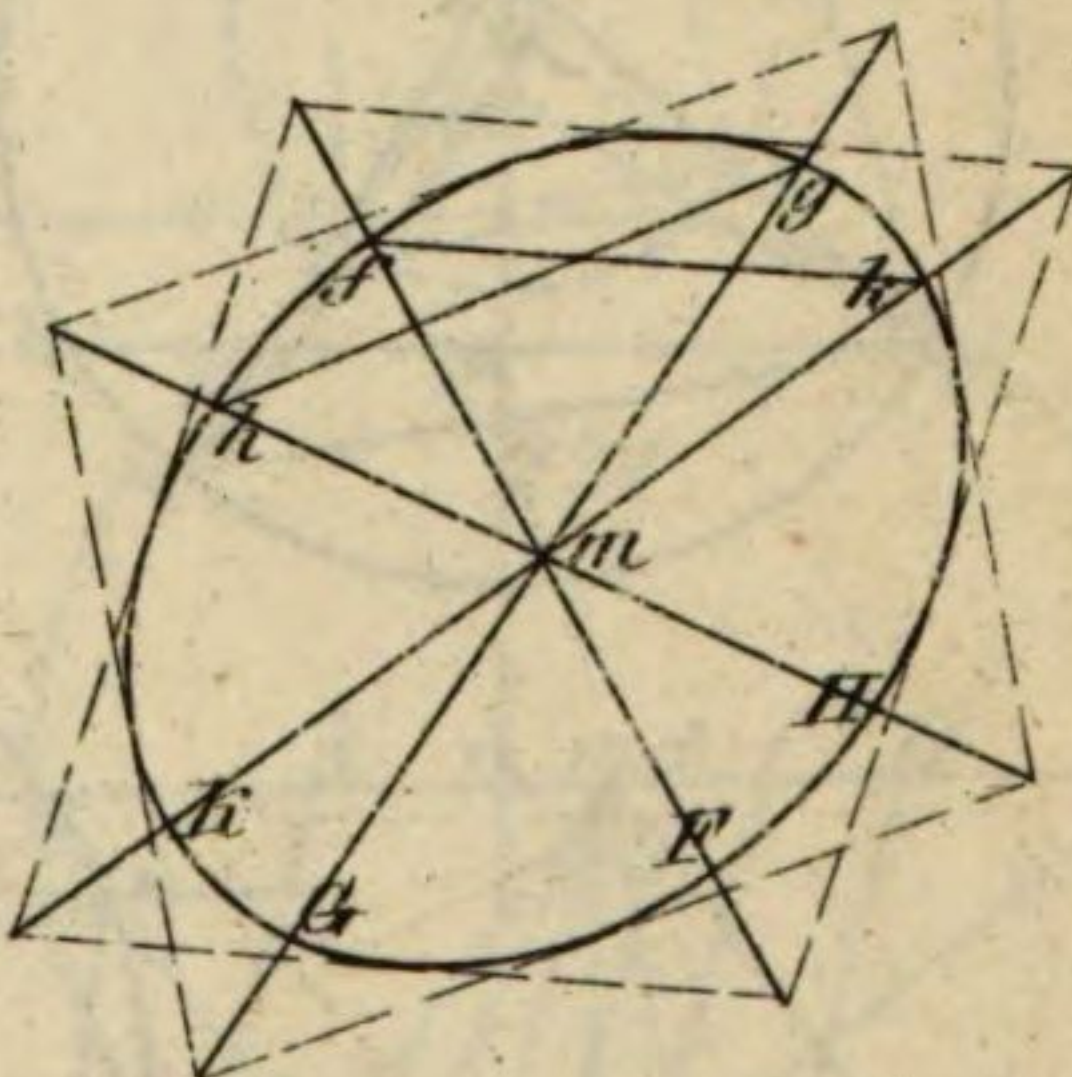
212.



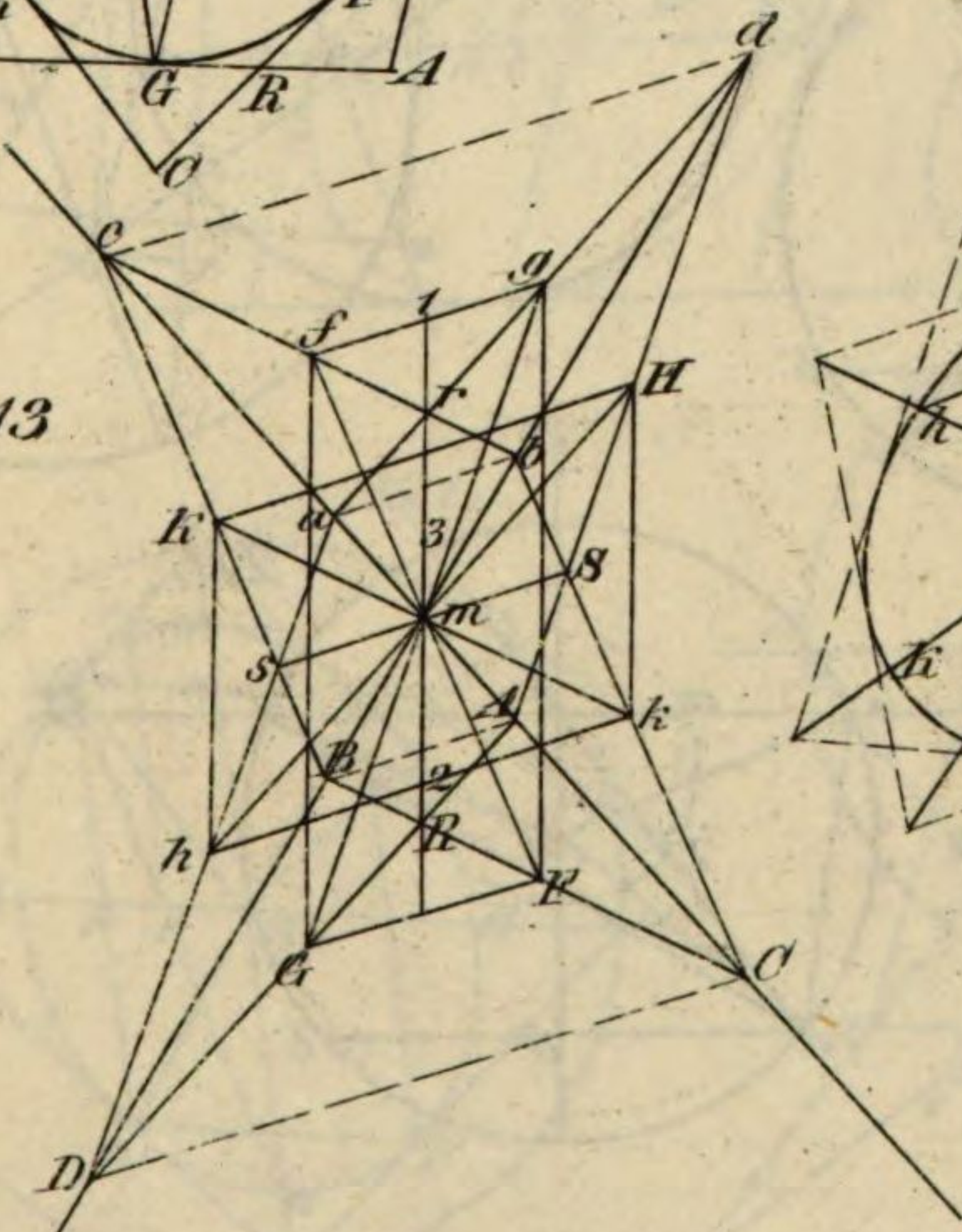
213.

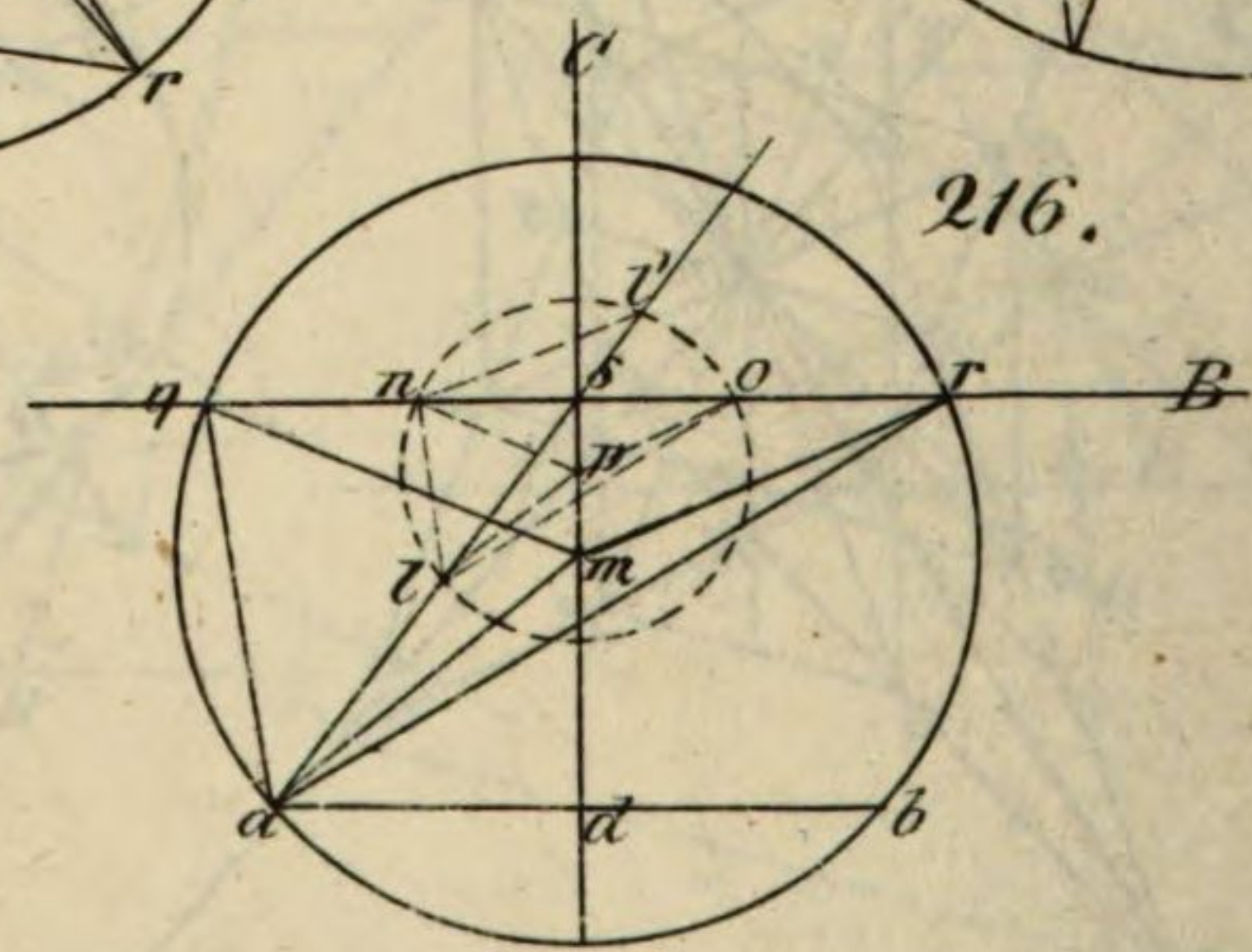
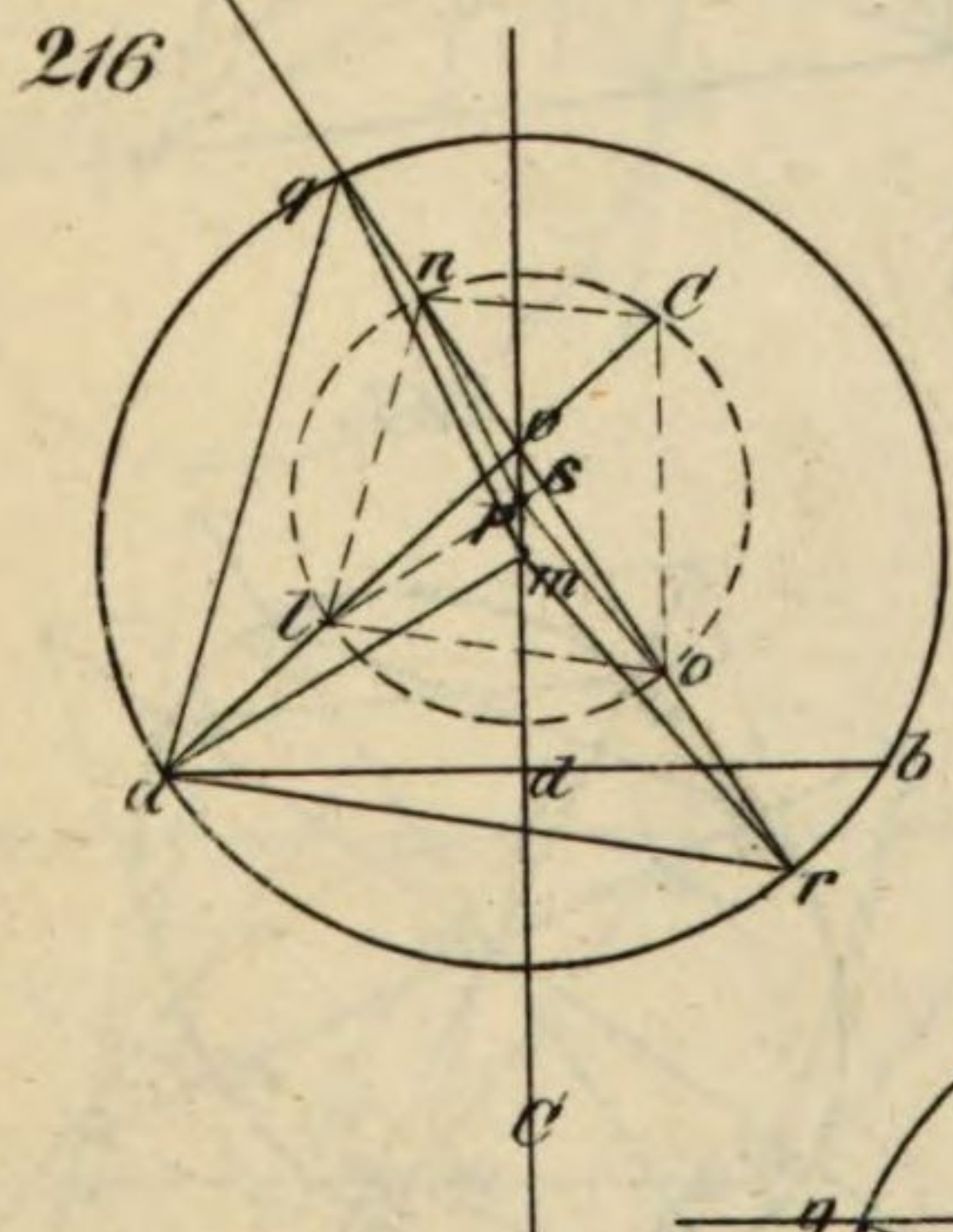
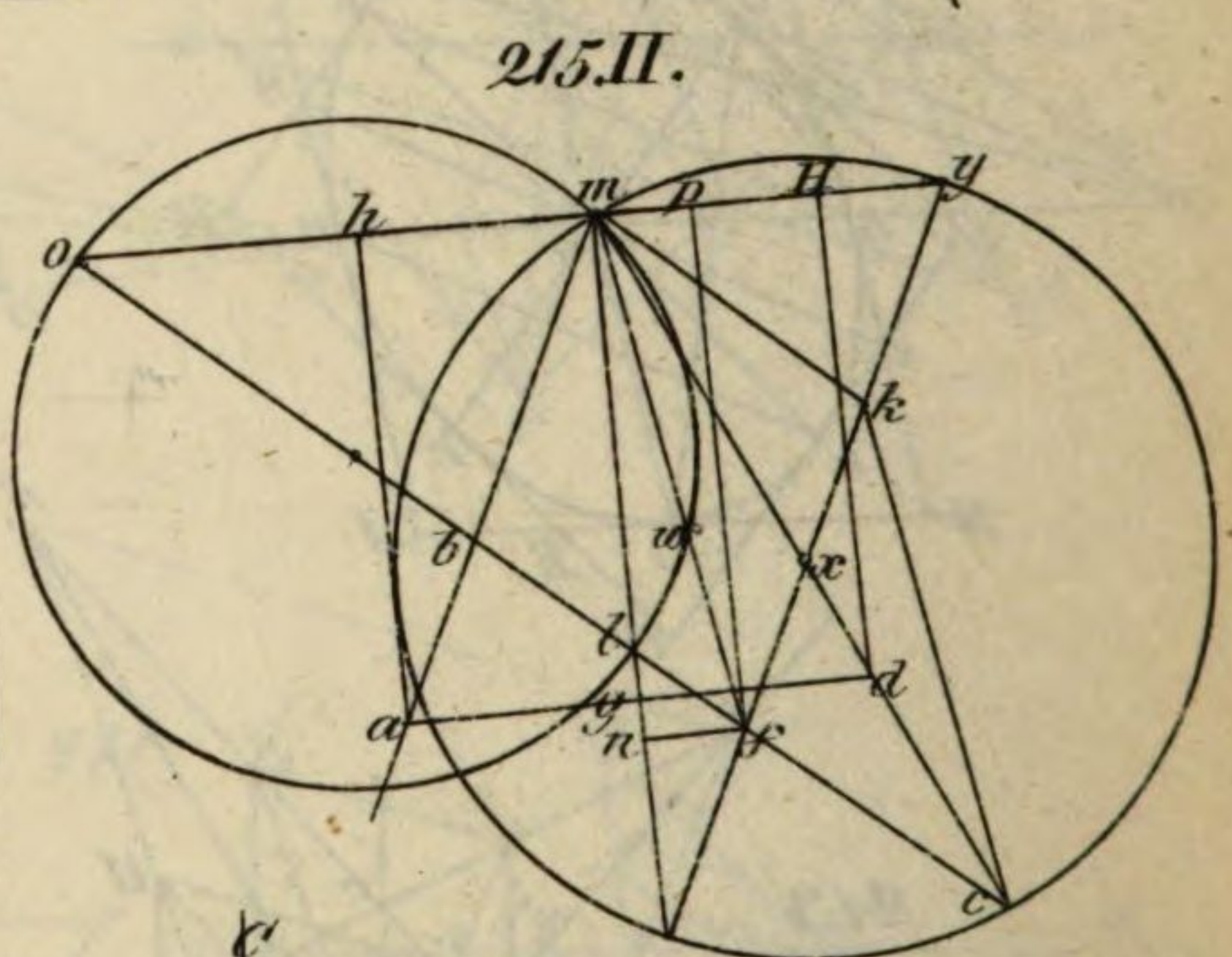
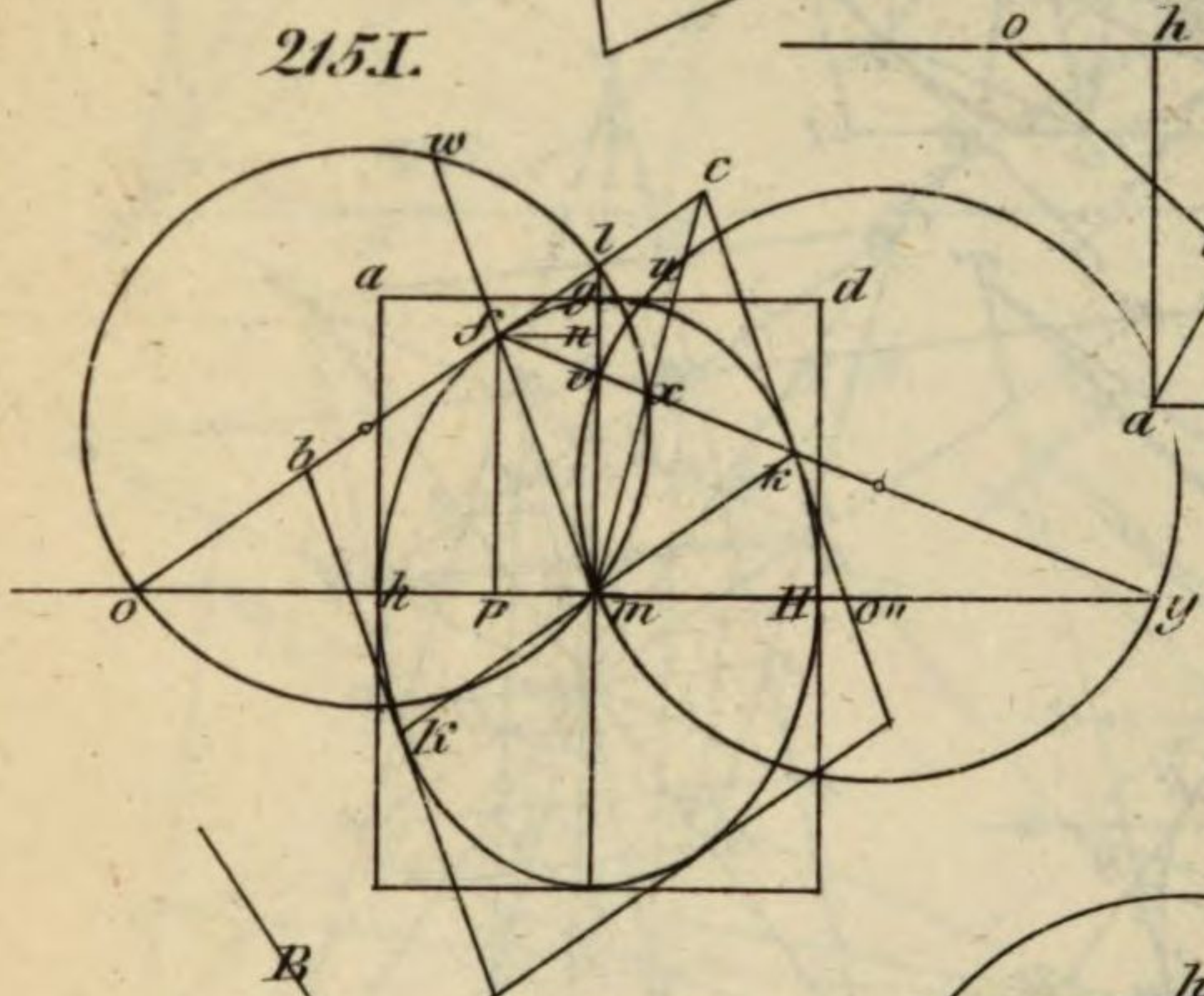
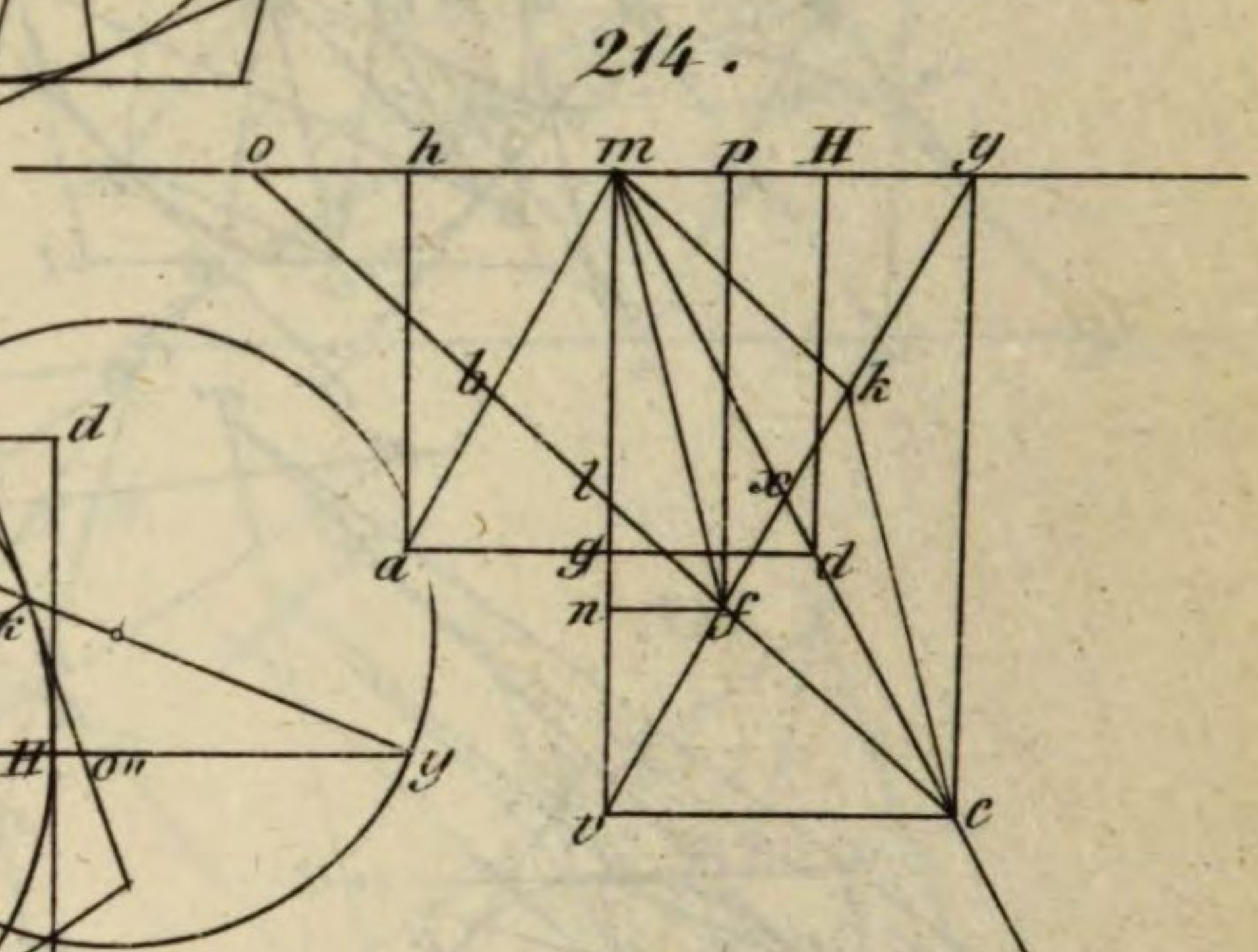
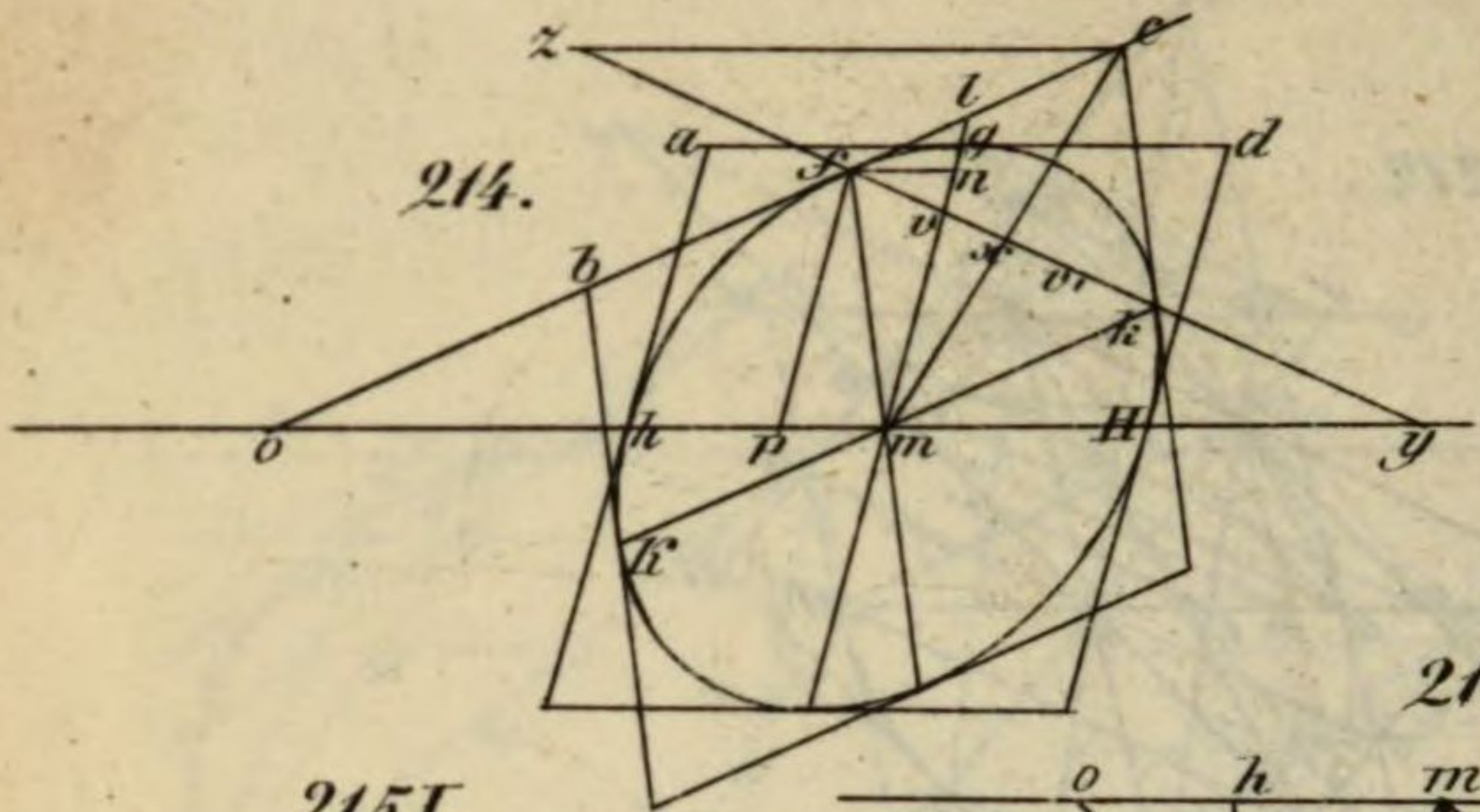


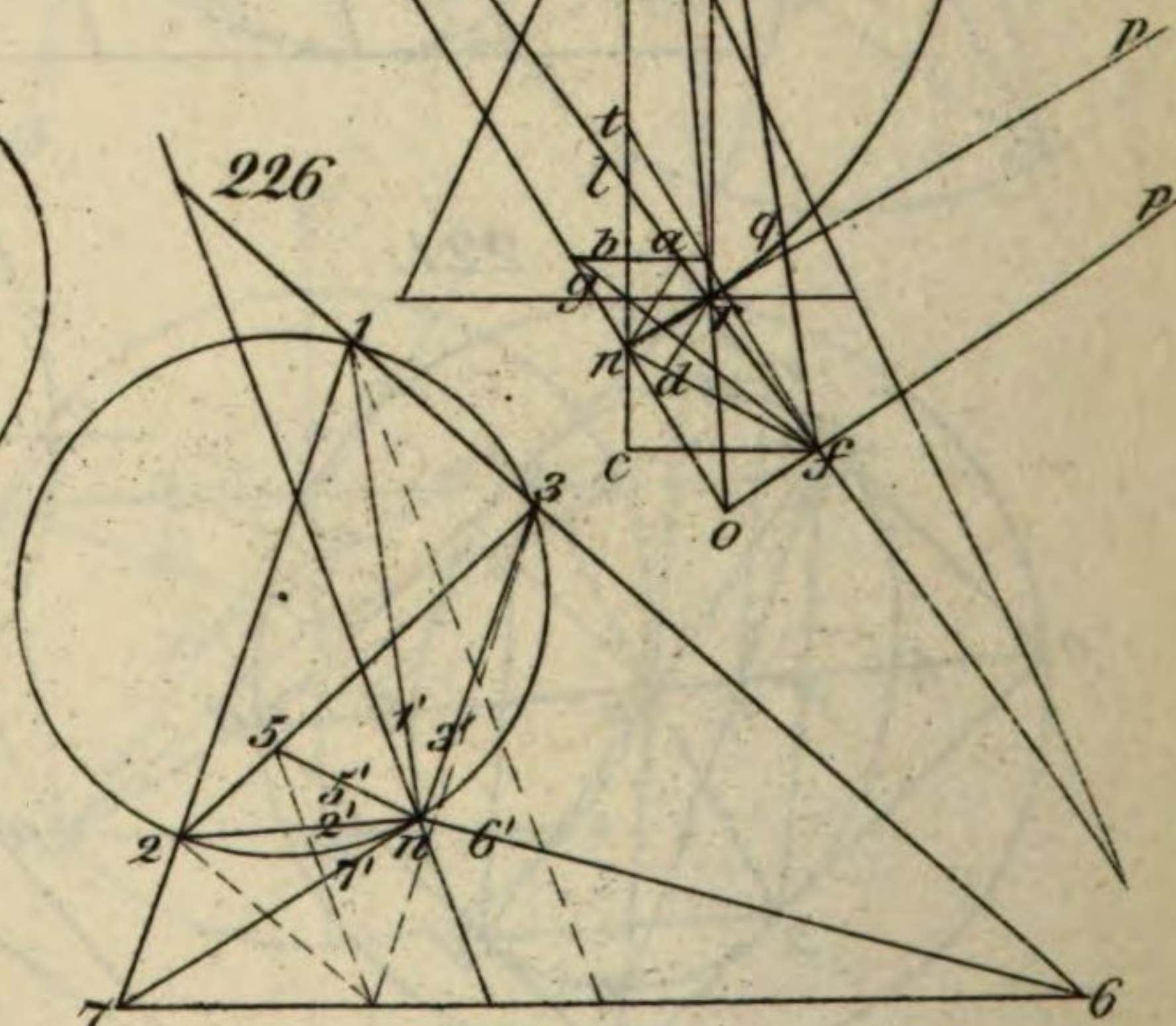
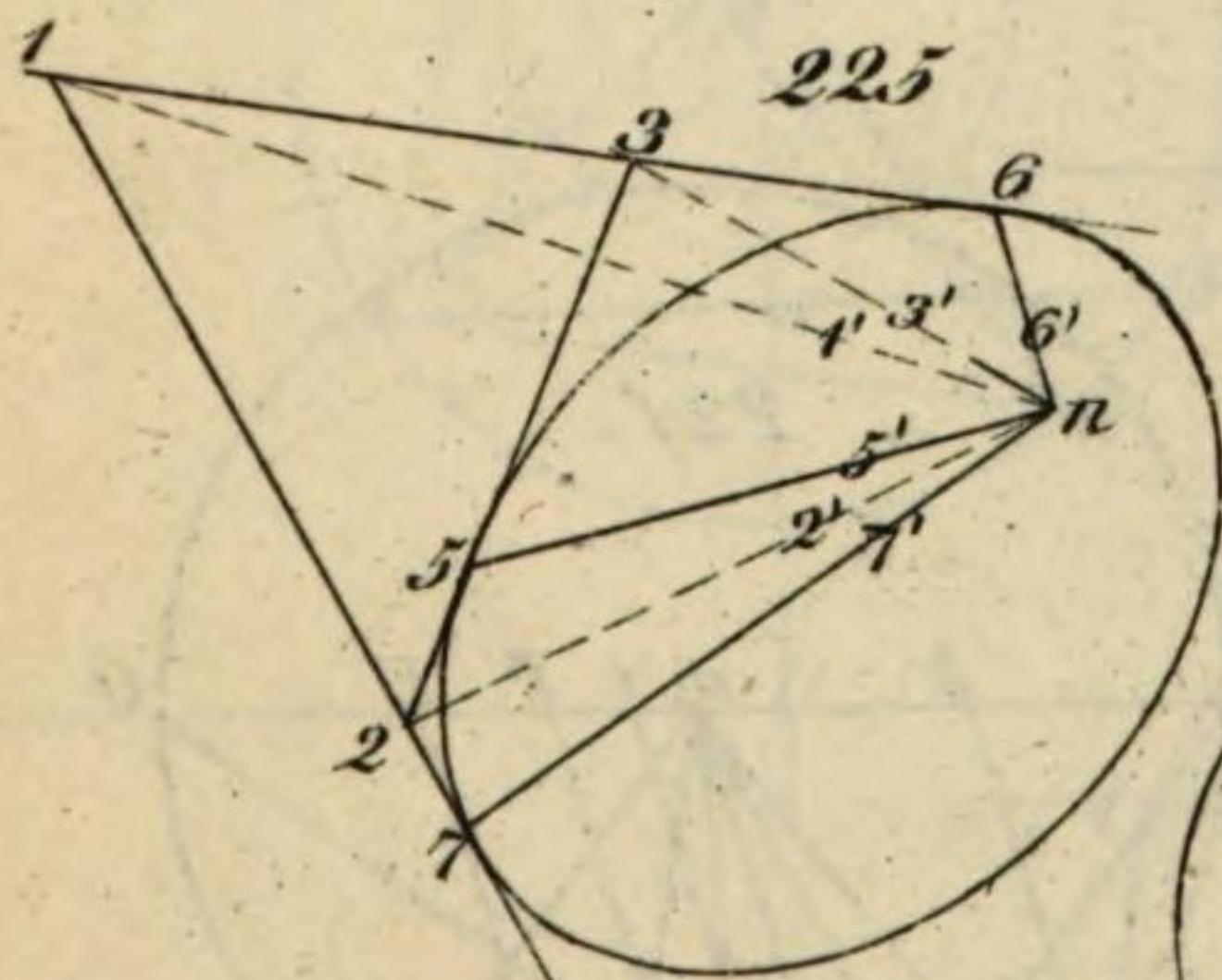
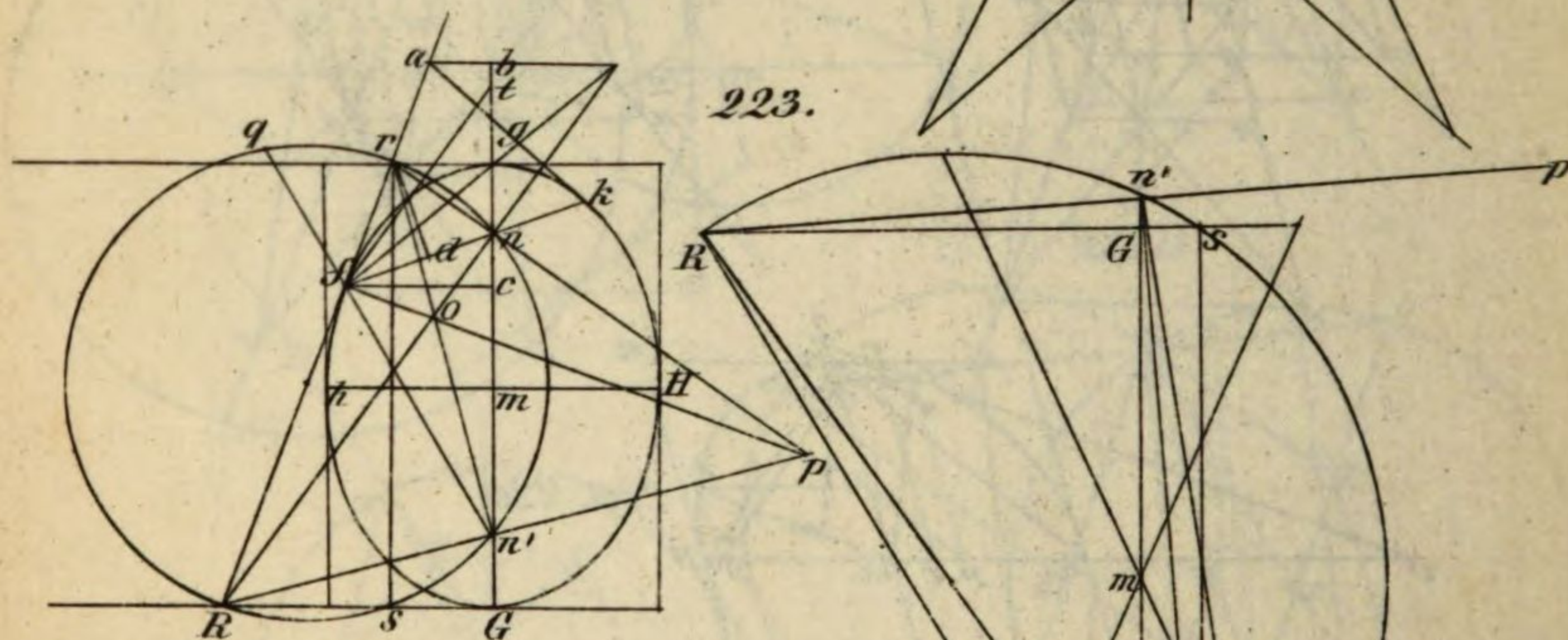
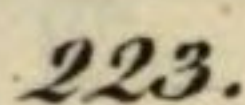
213.



213



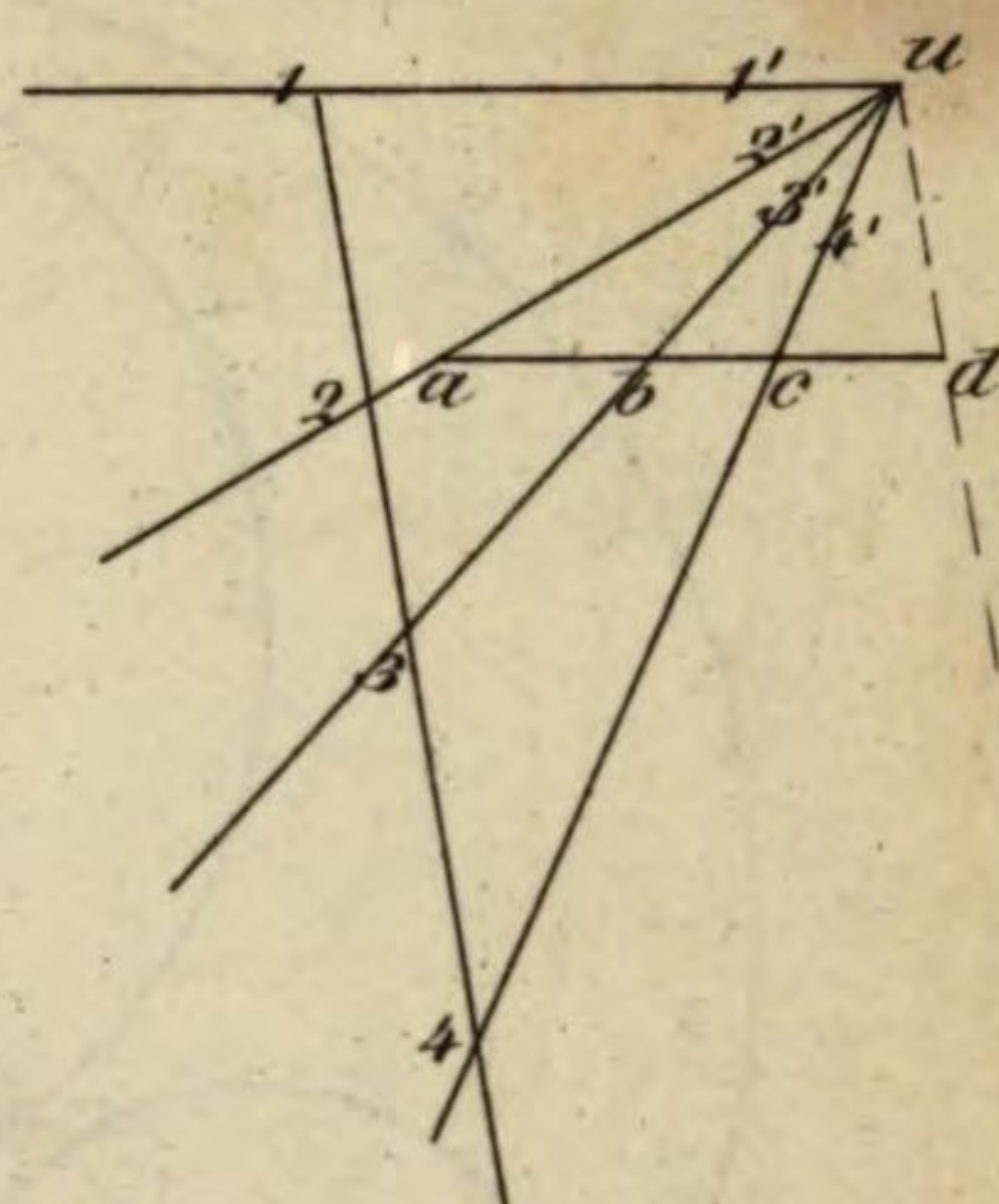
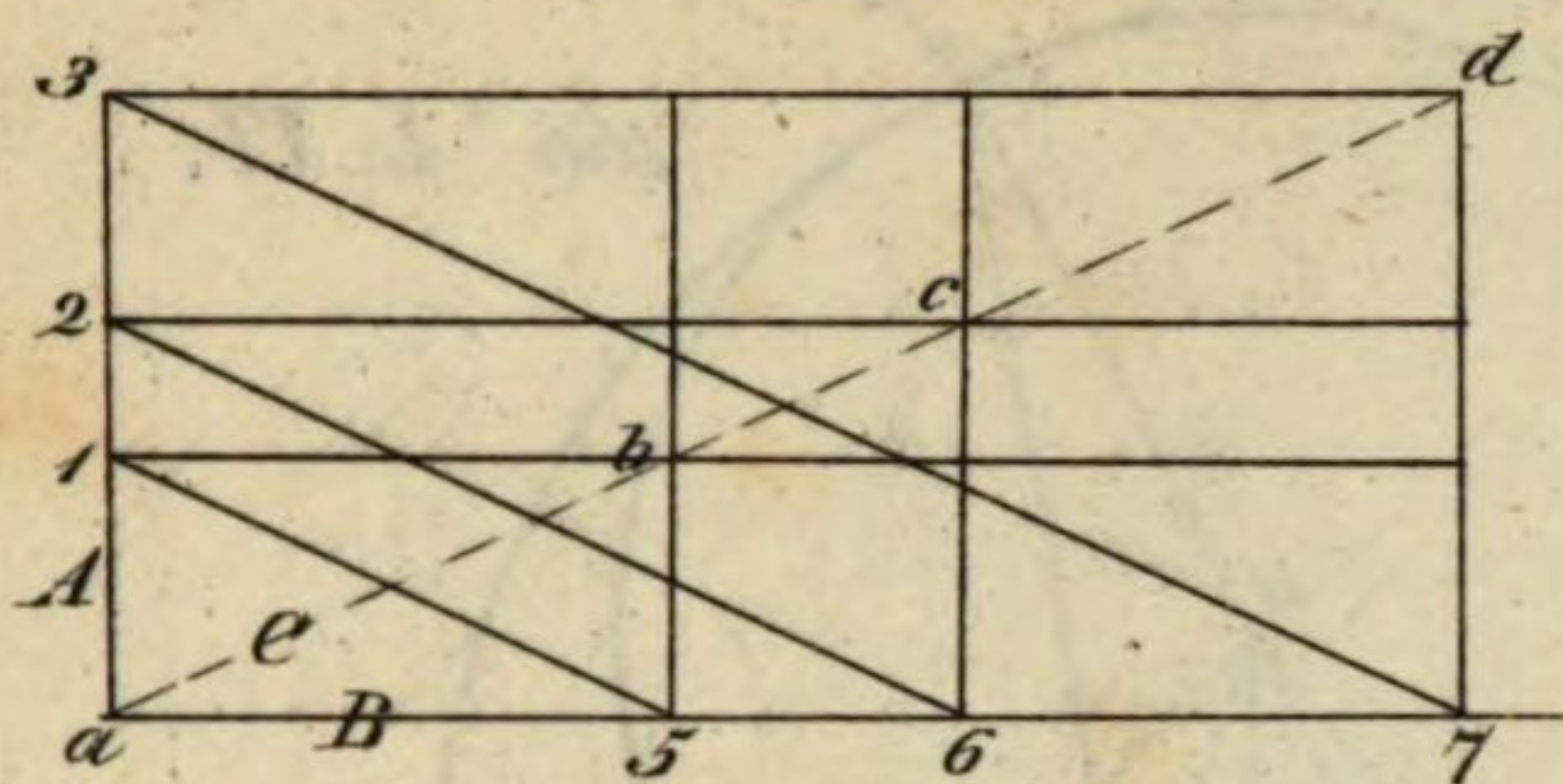




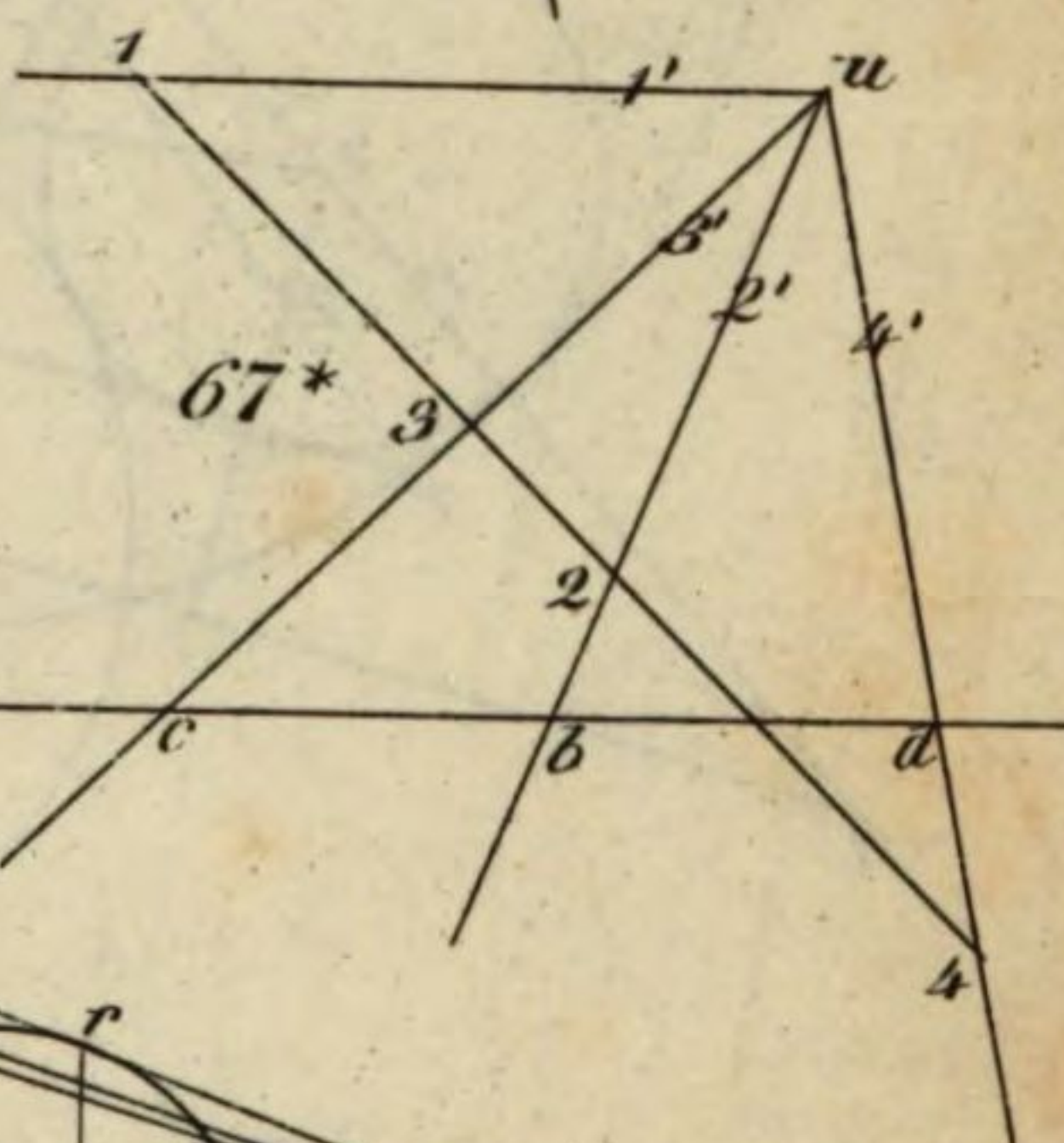
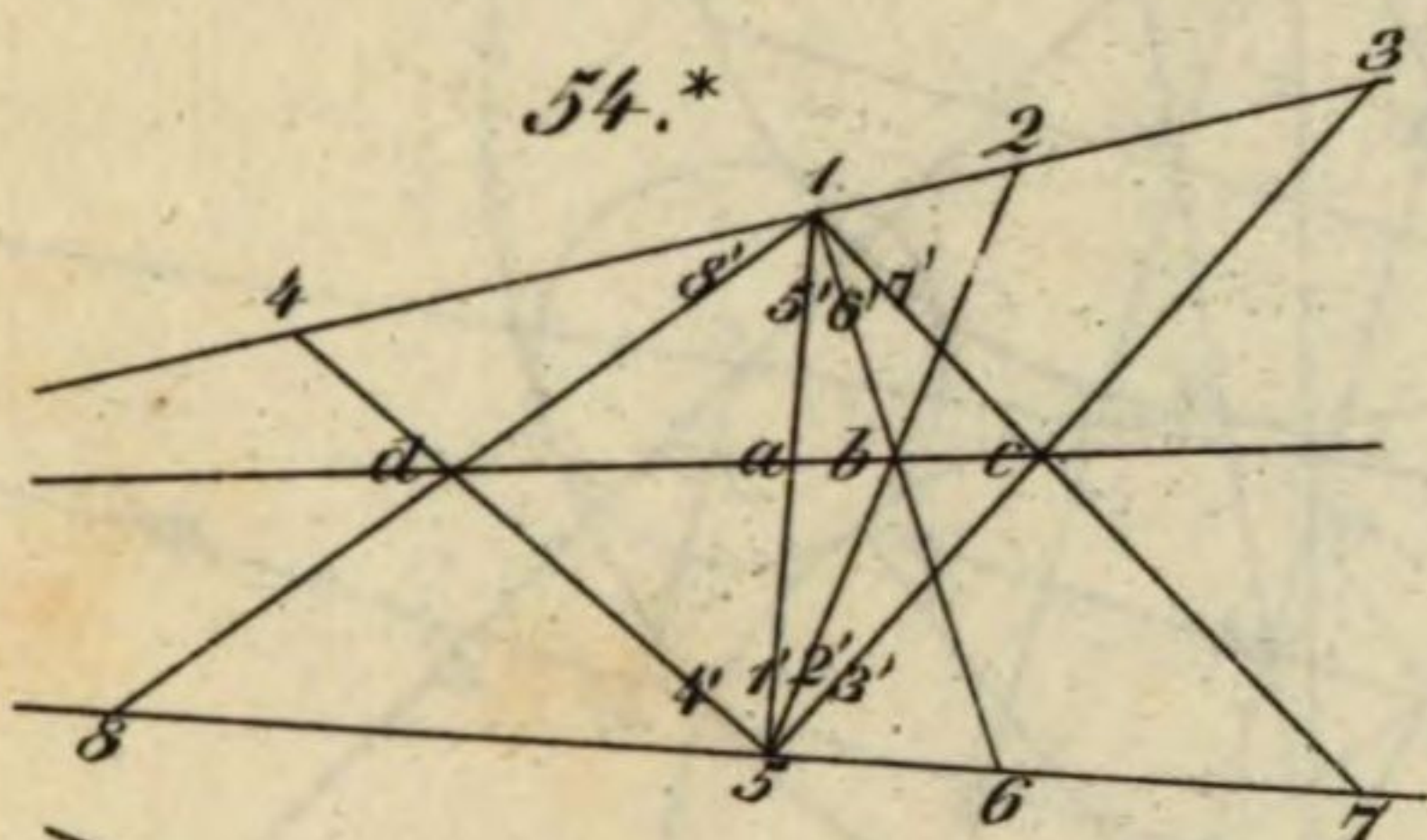
24*

42.*

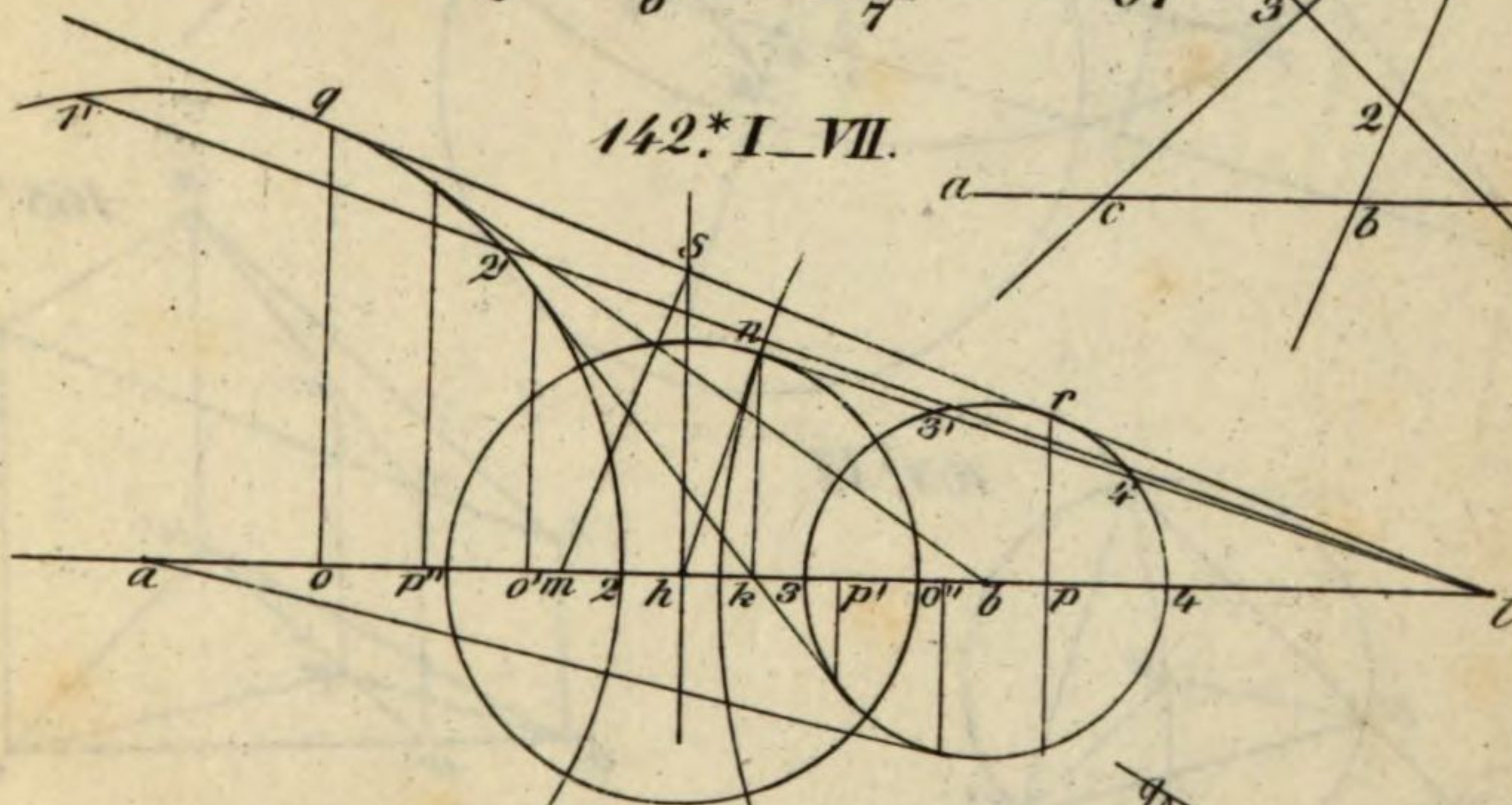
99.



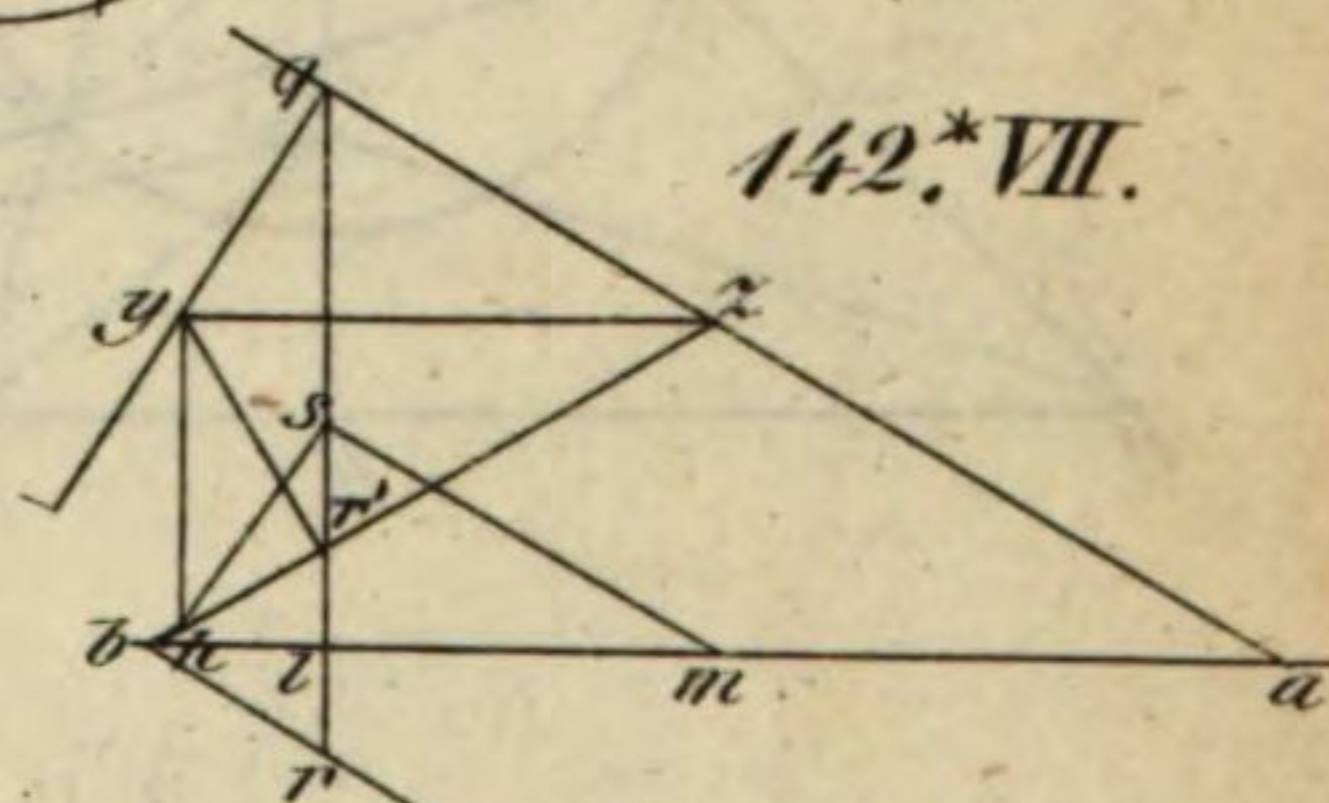
54.*



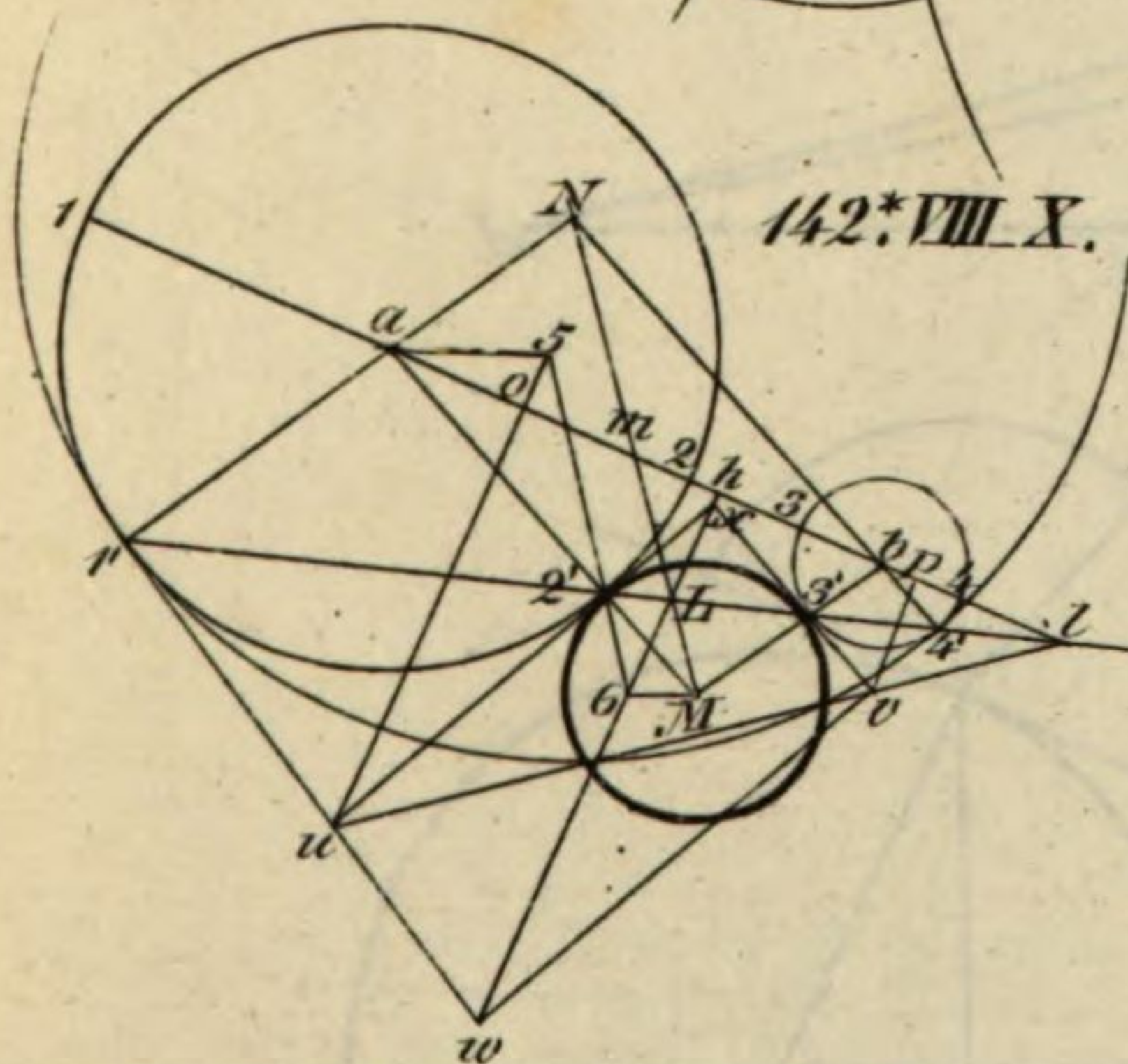
142.* I-VII.

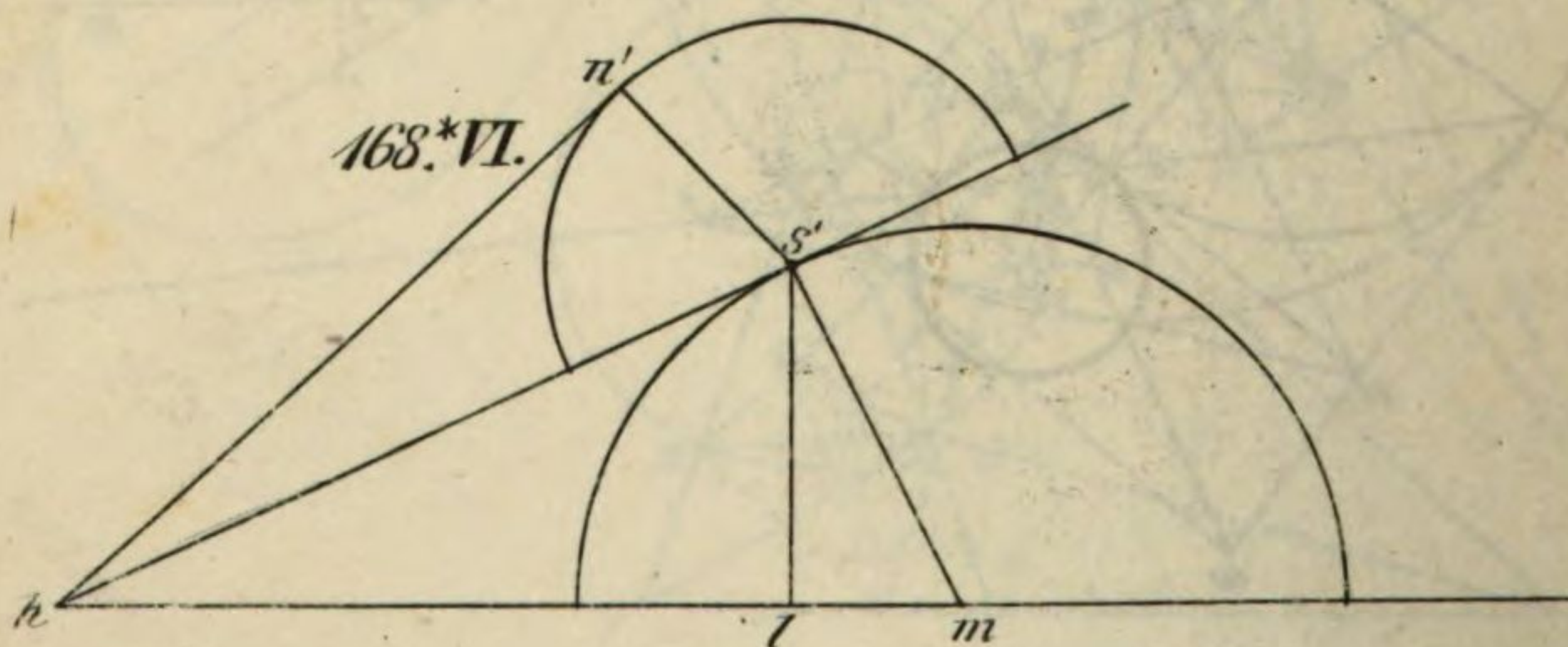
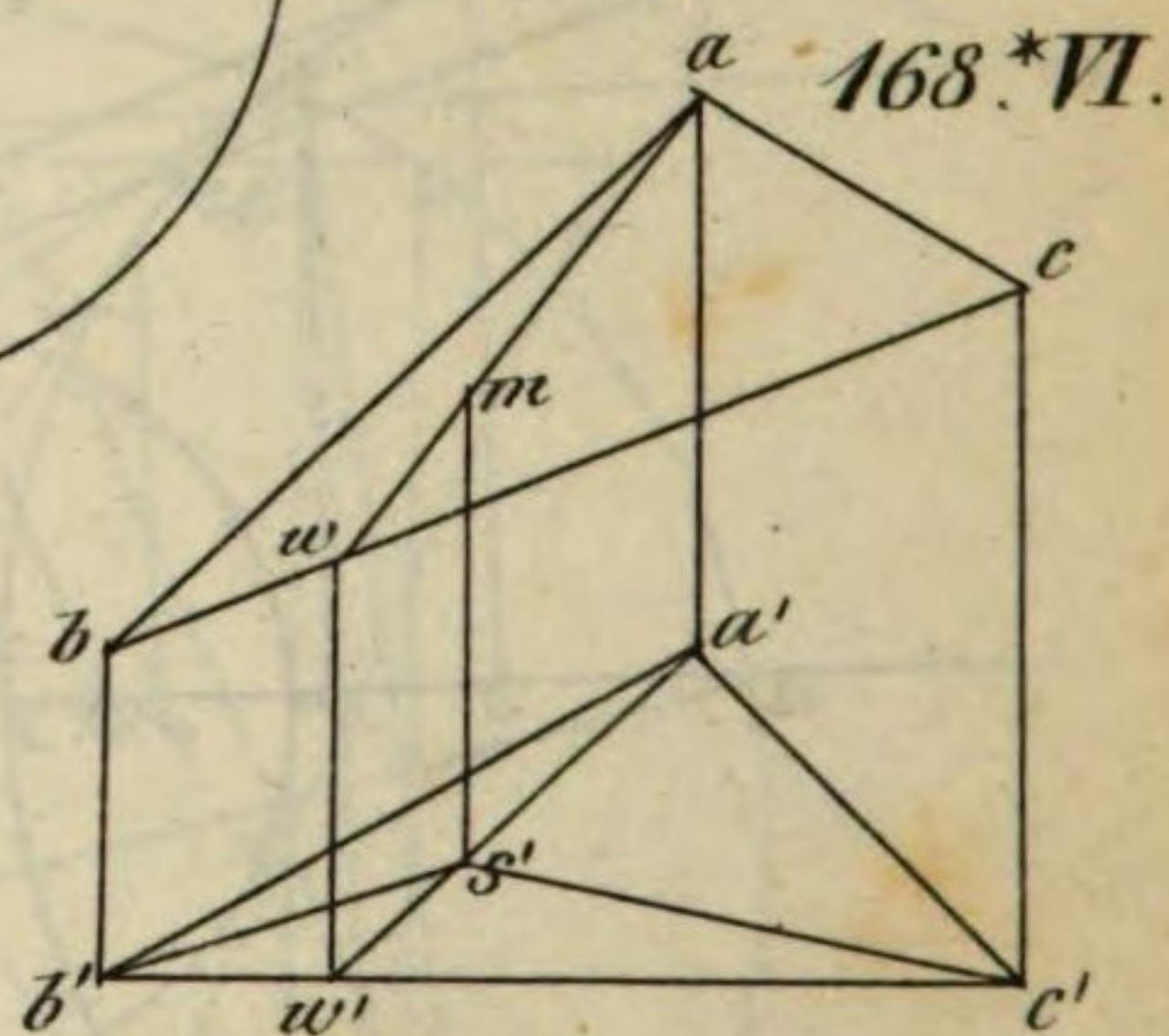
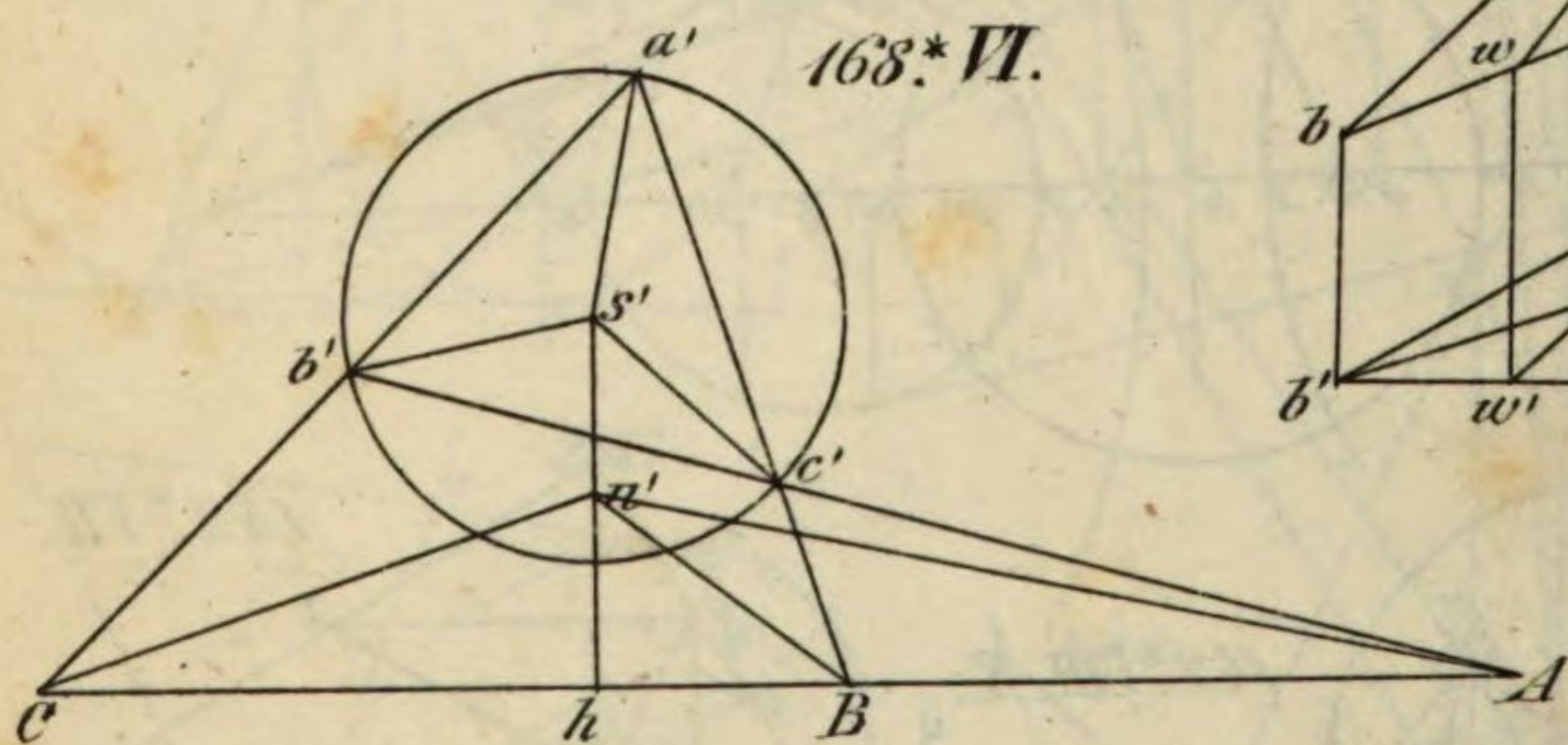
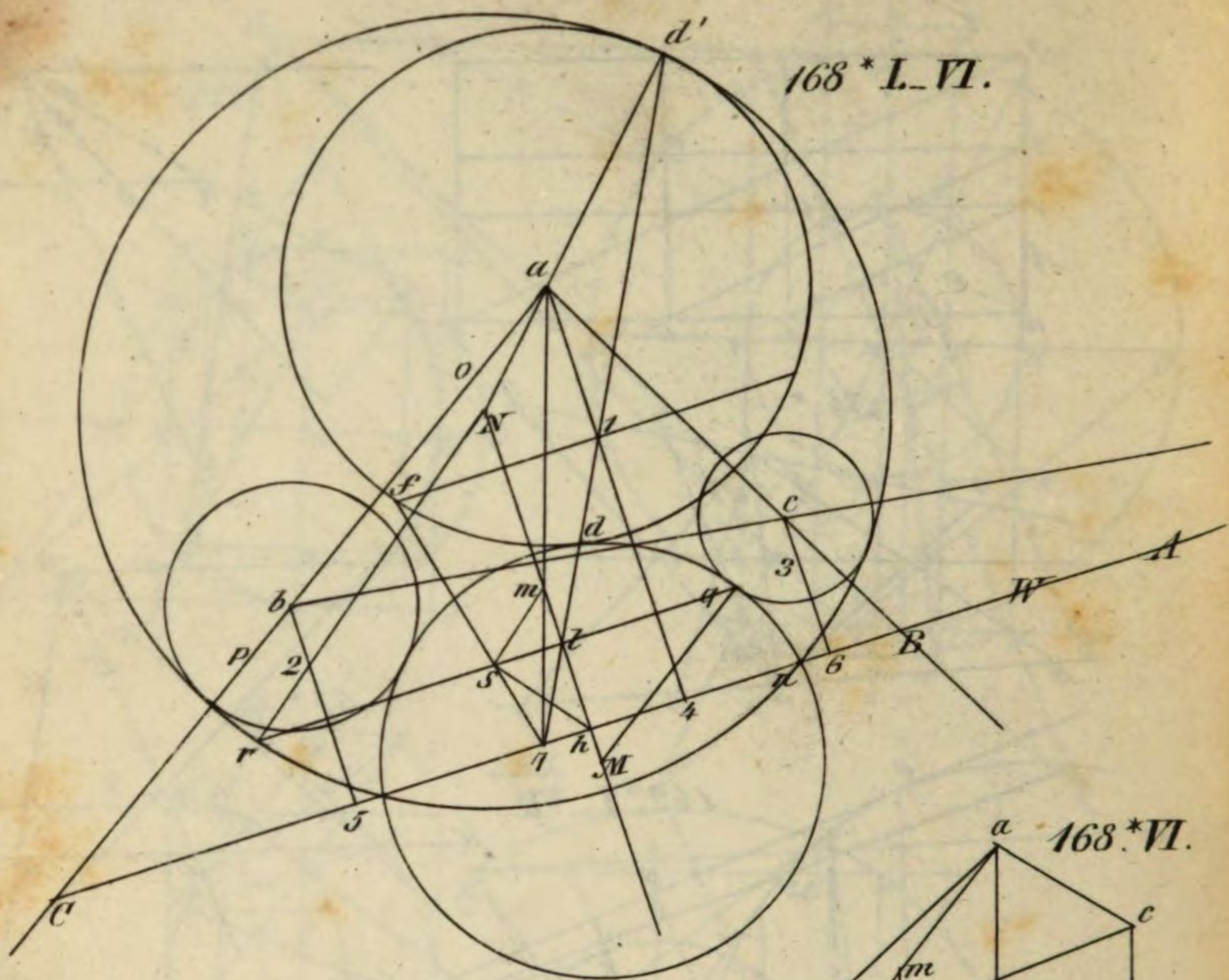


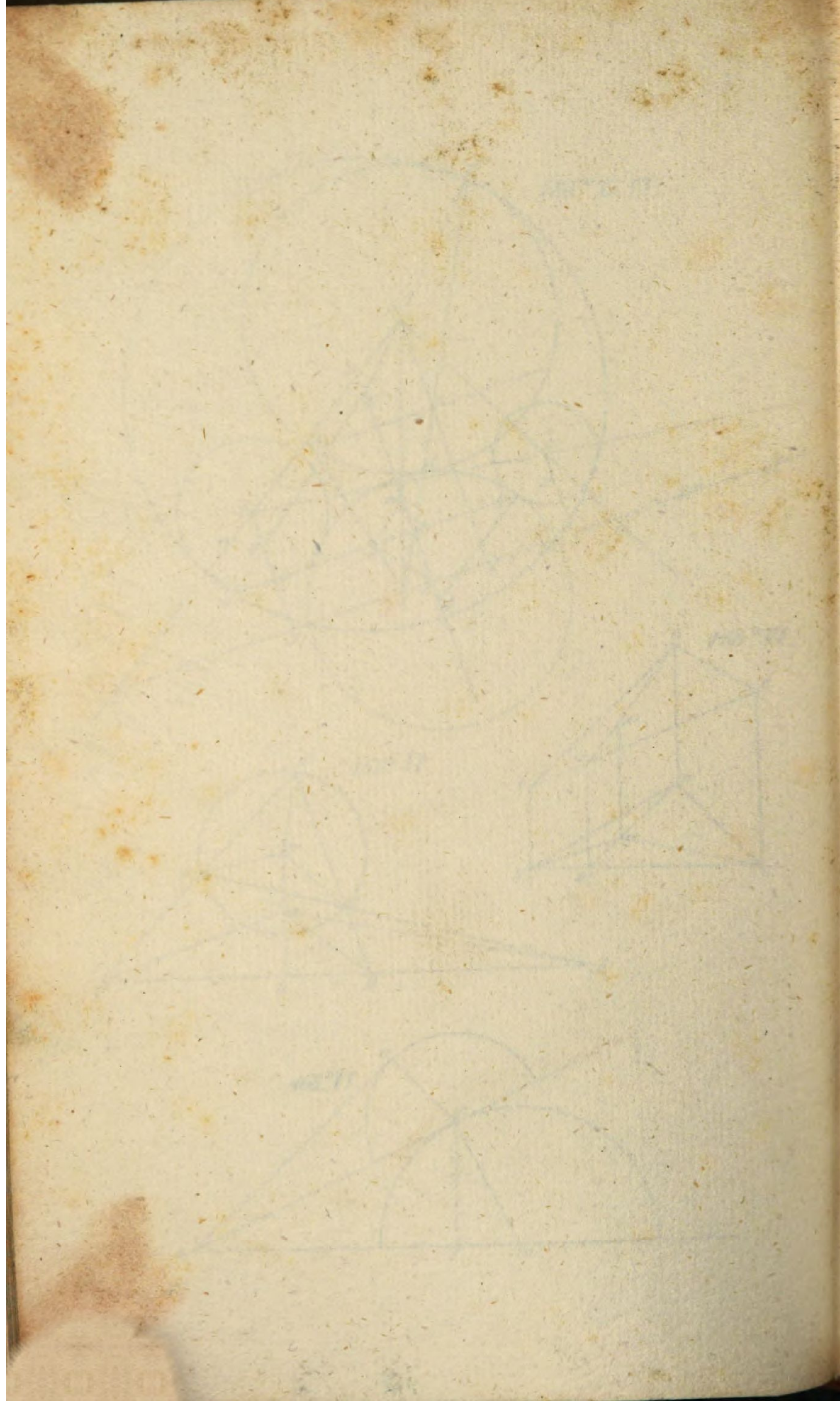
142.* VII.



142.* VIII X.







Paucker, Magnus Georg <<von>>,

Die Bildlehre

Mitau 1846

Math.p. 409 r

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082550-0